MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

L. BIEBERBACH W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON H. WEYL

36. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

L. BIEBERBACH W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON H. WEYL

36. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

66 F3178

QA1
M88
v.36

Inhaltsverzeichnis

Seite

Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis 640
Aumann, G., Eine Ungleichung der Integralrechnung 143
Behrend, F., Über einen Satz von Herrn Jarník 298
Bergmann, St., Über den Wertevorrat einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen 171
Blaschke, W., Über die Schwerpunkte von Eibereichen 166
Finikoff, S., Congruences stratifiables paraboliques 344
Goeritz, L., Knoten und quadratische Formen 647
Heilbronn, H., Über den Primzahlsatz von Herrn Hoheisel 394
Hölder, E., Zur Theorie inhomogener Gleichgewichtsfiguren. 1. Mitteilung. Homogene Ausgangsfiguren 563
Jarník, V., Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. (Dritte Abhandlung.) 581
Jolles, St., Die Metrik im polaren F^2-Gebüsche einer linearen Strahlenkongruenz 35
Kaufmann, B., Über die Invarianz der Randelemente bei topologischen Abbildungen in der Ebene und im Raume 279
Koksma, J. F., Diophantische Approximationen von Irrationalzahlen mit Kettenbruchnennern von eingeschränktem Wachstum 739
Lense, J., Über lineare Transformationen von Zahlenfolgen 99
Lichtenstein, L., Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Dritte Abhandlung. Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der Erde 481
Lösch, F., Lückensätze und Überkonvergenz bei zweifachen Potenzreihen . . . 202
Markoff, A., Stabilität im Liapounoffschen Sinne und Fastperiodizität 708
Maruhn, K., Über den Laplaceschen Ringkörper 122
Meixner, J., Die Greensche Funktion des wellenmechanischen Keplerproblems . 677
Nikliborc, W., Eine Bemerkung über die Volumpotentiale II. 167
Nikliborc, W., Über die Lage des Schwerpunktes eines ebenen konvexen Bereiches und die Extrema des logarithmischen Flächenpotentials eines konvexen Bereiches 161
Nikliborc, W., Über die Niveaukurven logarithmischer Flächenpotentiale . . . 641
Nikliborc, W., Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten. II. 655
Ostrowski, A., Asymptotische Abschätzungen der Argumentvariation einer Funktion, die die Werte 0 und 1 nicht annimmt 302
Pall, G., The Structure of the Number of Representations Function in a Positive Binary Quadratic Form 321
Perron, O., Über das Minimum positiver Hermitescher Formen 148
Pfeifer, G., Über die allgemeinen Integrale von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion und von Systemen solcher Gleichungen, die Integrale im Sinne von S. Lie zulassen 790

Seite
Przeborski, A., Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik . . . 184
Rado, R., Studien zur Kombinatorik 424
Raff, H., Beschränkte divergente Folgen und reguläre Matrizen 1
Rembs, E., Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen 110
Salié, H., Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen . . . 263
Scheffers, G., Unendlichviele Rotationsflächen, die einander längs derselben Kurve berühren 293
Underwood, F., Some conditions for the existence of two periodic integrals of the homogeneous linear differential equation of the second order 195
Viola, T., Classificazione secondo Baire delle funzioni continue da una parte e dei loro numeri derivati 377
van der Waerden, B. L., Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen . . 780
Wiener, N., A One-Sided Tauberian Theorem 787
Wintner, A., Über die statistische Unabhängigkeit der asymptotischen Verteilungsfunktionen inkommensurabler Partialschwingungen 618
Wintner, A., Dynamische Systeme und unitäre Matrizen 630
Wintner, A., Bemerkung zum Eindeutigkeitssatz der Laplaceschen Transformierten 638
Wundheiler, A., Kovariante Ableitung und die Cesàroschen Unbeweglichkeitsbedingungen 104
Wünsche, A., Topologische Fragen der Differentialgeometrie. XLI. Ein Diagonalproblem 358

Beschränkte divergente Folgen und reguläre Matrizen.

Von

Hermann Raff in Tübingen.

Einleitung und Inhaltsübersicht.

Unter einer *regulären Matrix* wird eine Matrix

$$A = (a_{n\nu}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0\nu} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1\nu} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{n\nu} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

verstanden, deren Elemente folgenden Bedingungen genügen:

1. Die Folge der Glieder jeder einzelnen Spalte ist eine Nullfolge, oder bei beliebigem, festgehaltenem ν strebt

$$a_{n\nu} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

2. Die Reihen aus den Absolutbeträgen der Glieder einer Zeile sind konvergent und haben beschränkte Summen, d. h.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| < K \quad \text{für alle } n.$$

3. Die Reihensummen aus den Gliedern einer Zeile streben mit wachsender Zeilennummer gegen 1, also

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\right) \to 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Ist nun (s_n) eine gegebene Folge und konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ zum Werte t_n, so wird die Folge (t_n) die A-Transformation von (s_n) genannt. Falls $\lim_{n \to \infty} t_n = t$ existiert, sagt man, (s_n) sei zum Werte t limitiert.

O. Toeplitz[1]) und I. Schur[2]) haben bewiesen, daß die genannten Bedingungen notwendig und hinreichend sind, um aus $s_n \to s$ auf die Konvergenz der transformierten Folge (t_n) zum selben Grenzwerte schließen zu können.

Derselbe Satz gilt auch, wenn die Bedingung 2 ersetzt wird durch die ersichtlich gleichwertige:

2a. Es existiert ein endlicher $\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|\right)$,

eine Bedingung, die sich bei späteren Formulierungen als sehr handlich erweist. Damit ist begründet:

I. Eine Matrix, die den Bedingungen 1, 2a und 3 genügt, soll eine *reguläre Matrix* genannt werden.

II. Unter der *Norm einer regulären* Matrix wird der durch

$$N = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|\right)$$

definierte Wert verstanden.

Jeder regulären Matrix kommt also eine eindeutig bestimmte Norm $\geqq 1$ zu, und es gibt reguläre Matrizen beliebiger Norm $\geqq 1$.

Als *Kern einer beschränkten Folge* bezeichnet man den kleinsten konvexen abgeschlossenen Bereich, der sämtliche Häufungspunkte dieser Folge enthält[3]). Der Kern einer konvergenten Folge besteht demnach aus einem einzigen Punkt, dem Grenzwert der Folge.

Wir untersuchen nun die *A-Transformationen vorgelegter divergenter beschränkter Folgen*, wenn zur Konkurrenz alle regulären Matrizen einer Norm $N \leqq K$ ($K \geqq 1$ vorgegeben) zugelassen sind, und wollen besonders Aufschluß über die Lage der Häufungspunkte der Transformierten erhalten. Die Existenz der Folge mit den Gliedern $t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ ist in diesem Falle wegen der absoluten Konvergenz der rechtsstehenden Reihen gesichert.

In § 1 wird die Limitierung von Folgen mit genau zwei Häufungspunkten behandelt. In § 2 werden Folgen untersucht, die drei, nicht in einer Geraden liegende Häufungswerte haben. Der Inhalt dieses Paragraphen ist allerdings für die Gewinnung der Sätze des § 5 nicht notwendig, da die in § 1 erhaltenen Resultate als Voraussetzung für den später zu machenden Induktionsschluß genügen. Aber bei drei und mehr

---

[1]) O. Toeplitz, Über lineare Mittelbildungen, Prace matematyczno-fizyczne 22 (1911), S. 113—119.

[2]) I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **151** (1921), S. 79—111.

[3]) K. Knopp, Zur Theorie der Limitierungsverfahren I, Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 97—127, bes. S. 113—115.

Häufungspunkten treten die zu beweisenden Tatsachen in einer Gestalt auf, die von der Struktur der entsprechenden Formeln in § 1 wesentlich verschieden ist und die einen anderen Beweisgang bedingt. § 3 enthält Sätze über Folgen, deren Häufungspunkte in den Ecken eines konvexen p-Ecks liegen. Das gewonnene Resultat wird in § 4 auf Folgen ausgedehnt, deren *Kern* ein konvexes p-Eck ist. Schließlich kommen in § 5 allgemeine Sätze über beliebige beschränkte Folgen und als Teilresultat der Kernsatz von K. Knopp [4]) in einer Spezialisierung auf reguläre Matrizen.

§ 1.

Folgen mit genau zwei Häufungspunkten $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$.

Vorgelegt sei eine beschränkte Folge (s_n), die genau zwei Häufungspunkte, $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$, besitzt. (s_n) kann auf beliebig viele Arten in zwei Teilfolgen $(\sigma_\lambda^{(1)})$ und $(\sigma_\lambda^{(2)})$ zerlegt werden, so daß $(\sigma_\lambda^{(1)})$ gegen $a^{(1)}$, $(\sigma_\lambda^{(2)})$ gegen $a^{(2)}$ strebt und jedes Glied von (s_n) in genau einer der beiden Folgen vorkommt. Um die n-te Zeile einer regulären Matrix $(a_{n\nu})$ der Eigenschaft zu finden, daß $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ gegen einen vorgegebenen Wert z strebt, greift man aus (s_n) zwei Glieder $s_{\nu'}$ und $s_{\nu''}$ heraus, deren Indizes größer als die Zeilennummer n sind. Weiter soll $s_{\nu'}$ bei der oben genannten Zerlegung zu $(\sigma_\lambda^{(1)})$, $s_{\nu''}$ zu $(\sigma_\lambda^{(2)})$ gehören. Dann setzt man

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{z - a^{(2)}}{a^{(1)} - a^{(2)}} & \text{für } \nu = \nu', \\ \dfrac{a^{(1)} - z}{a^{(1)} - a^{(2)}} & \text{für } \nu = \nu'', \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man erkennt leicht, daß $(a_{n\nu})$ regulär ist und die Norm

$$N(z) = \frac{|z - a^{(1)}| + |z - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}$$

besitzt. Da weiter

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu = \frac{z - a^{(2)}}{a^{(1)} - a^{(2)}} s_{\nu'} + \frac{a^{(1)} - z}{a^{(1)} - a^{(2)}} s_{\nu''} = z \frac{s_{\nu'} - s_{\nu''}}{a^{(1)} - a^{(2)}} + \frac{a^{(1)} s_{\nu''} - a^{(2)} s_{\nu'}}{a^{(1)} - a^{(2)}}$$

und die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen z strebt, ist damit eine reguläre Matrix der verlangten Art gefunden.

Wir beweisen noch einen später gebrauchten

Hilfssatz. (s_n) sei beschränkt, $(a_{n\nu})$ sei regulär und habe die Norm N und $(t_n) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ strebe gegen den Wert t. Dann gibt es

[4]) K. Knopp, Zur Theorie der Limitierungsverfahren, a. a. O.

reguläre Matrizen beliebiger Norm $N^* > N$, die (s_n) zum selben Werte limitieren.

Beweis. Nach dem Satze von Bolzano-Weierstraß besitzt die Ausgangsfolge mindestens einen Häufungspunkt $a^{(0)}$. $(\sigma_\lambda^{(0)})$ sei eine zum Werte $a^{(0)}$ konvergente Teilfolge von (s_n). Dem Gliede $\sigma_\lambda^{(0)}$ komme in der ursprünglichen Folge die Nummer n_λ zu. In der n-ten Zeile der gegebenen Matrix werden jetzt zwei Glieder, $a_{n\nu_{1n}}$ und $a_{n\nu_{2n}}$, herausgegriffen, die ihrem Absolutbetrag nach kleiner als $\frac{1}{2n}$ sind, deren zweite Indizes unter den n_λ vorkommen und größer als n sind. Die Matrix $(a_{n\nu}^*)$ mit

$$a_{n\nu}^* = \begin{cases} \frac{1}{2}(N^* - N), & \text{falls } \nu = \nu_{1n}, \\ -\frac{1}{2}(N^* - N), & \text{falls } \nu = \nu_{2n}, \\ a_{n\nu} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist regulär und hat die Norm N^*. (s_n) wird durch $(a_{n\nu}^*)$ zum Werte t limitiert, falls $(t_n) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ gegen t strebt; denn

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^* s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu - a_{n\nu_{1n}} s_{\nu_{1n}} - a_{n\nu_{2n}} s_{\nu_{2n}} + \frac{1}{2}(N^* - N)(s_{\nu_{1n}} - s_{\nu_{2n}})$$

strebt nach den Voraussetzungen über $s_{\nu_{1n}}$, $s_{\nu_{2n}}$ und $(a_{n\nu})$ gegen t.

Bisher ist bewiesen:

Besitzt (s_n) die einzigen Häufungspunkte $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$, so ist (s_n) nach Vorgabe einer beliebigen Konstanten $K \geqq 1$ zu jedem Werte der abgeschlossenen Ellipse

$$\text{(I)} \qquad \frac{|z - a^{(1)}| + |z - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|} \leqq K$$

durch reguläre Matrizen beliebiger Norm $N \geqq K$ limitierbar. Für $K = 1$ wird unter (I) natürlich die Strecke $a^{(1)} \ldots a^{(2)}$ verstanden.

Weiterhin gilt:

(s_n) ist zu keinem außerhalb der Ellipse (I) *gelegenen Wert durch reguläre Matrizen einer Norm $N \leqq K$ limitierbar.*

Denn ist $(a_{n\nu})$ eine reguläre Matrix, strebt $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ mit unbegrenzt wachsendem n gegen den Wert z^* und ist

$$\text{(1)} \qquad \frac{|z^* - a^{(1)}| + |z^* - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|} > K$$

(z^* kann dabei von $a^{(2)}$ verschieden gedacht werden), so gilt, wenn $a_{n\nu} = a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ gesetzt wird, falls bei obiger Zerlegung $s_\nu = \sigma_\lambda^{(\varkappa)}$ ist ($\varkappa = 1$ oder 2),

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(1)} \sigma_\lambda^{(1)} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(2)} \sigma_\lambda^{(2)} \to z^* \quad \text{für } n \to \infty,$$

deshalb auch, wie man leicht erkennt,

$$(z^* - a^{(1)}) \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(1)} + (z^* - a^{(2)}) \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(2)} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Eine der links stehenden Reihen, etwa die erste, kann nach der Bedingung 3 für reguläre Matrizen für unendlich viele n ihrem Absolutbetrag nach $\geqq \frac{1}{4}$ gedacht werden. Für diese n wird mit Hilfe einer Nullfolge (ε_n)

$$q_n = \frac{\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(2)}}{\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(1)}} = \frac{a^{(1)} - z^*}{z^* - a^{(2)}} + \frac{\varepsilon_n}{(z^* - a^{(2)}) \sum a_{n\lambda}^{(1)}}$$

gesetzt. Da

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|}{\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\right|} \geqq \frac{\left|\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(1)}\right| + \left|\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(2)}\right|}{\left|\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(1)} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(2)}\right|} = \frac{1 + |q_n|}{|1 + q_n|},$$

da weiter der Limes dieser rechten Seite für die genannte Teilfolge der n existiert und gleich $\frac{|z^* - a^{(1)}| + |z^* - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}$ ist, so gilt

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|}{\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\right|} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \geqq \frac{|z^* - a^{(1)}| + |z^* - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}.$$

Nach (1) ist also die Norm der transformierenden regulären Matrix größer als K. Insgesamt ist jetzt bewiesen:

Satz. *Ist (s_n) eine Folge mit den einzigen Häufungspunkten $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$, z beliebig, so ist (s_n) zu diesem Werte durch reguläre Matrizen jeder Norm $N^* \geqq N(z)$ limitierbar, wo*

$$N(z) = \frac{|z - a^{(1)}| + |z - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}$$

ist. Keine reguläre Matrix geringerer Norm leistet dasselbe.

§ 2.

Folgen mit drei, nicht in einer Geraden liegenden Häufungspunkten.

1. *Definition einer gewissen Punktmenge.*

In § 1 war zu einem gegebenen Punktepaar $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ und zu einem festen, von nun an ζ genannten Werte z eine Konstante $N(z) \geqq 1$ bestimmt worden, die fortan Z heißen soll. Also ist

$$Z = \frac{|\zeta - a^{(1)}| + |\zeta - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}. \tag{1}$$

Z ist eine in ζ stetige Funktion.

Mit Hilfe von (1) wird nun für festes $\zeta \neq a^{(3)}$ die Funktion

$$\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \tag{2}$$

gebildet. Diese ist stetig in z. Weiterhin ist (2) bei festem z stetig in $\zeta \neq a^{(3)}$ und genügt folgenden Beziehungen:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{\zeta \to a^{(3)}} \frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} = +\infty, \text{ falls } z \neq a^{(3)} \text{ ist.}$$

$$\text{(b)} \qquad \lim_{\zeta \to \infty} \frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} = 2\,\frac{|z-a^{(3)}|}{|a^{(1)}-a^{(2)}|}+1.$$

Bei variablem z und festem $\zeta \neq a^{(3)}$ gilt entsprechend:

$$\text{(c)} \qquad \lim_{z \to \infty} \frac{1}{|z|}\,\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} = \frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|}.$$

Wir fassen nun ζ als Parameter auf und fragen, für welche Werte z und ζ die Funktion (2) den Wert 1 hat. $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ sollen dabei nicht in einer Geraden liegen.

In der Abschätzung

$$\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq \frac{|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq 1$$

stehen genau dann beide Gleichheitszeichen, wenn entweder $z = a^{(3)}$ und dann ζ beliebig, aber von $a^{(3)}$ verschieden ist, oder wenn $Z = 1$, ζ also auf der Strecke $a^{(1)} \ldots a^{(2)}$, und z auf der Strecke $\zeta \ldots a^{(3)}$ liegt. Somit gilt:

Die Gesamtheit der Punkte z, für welche die Funktion (2) *bei geeigneter Wahl von ζ den Wert* 1 *annehmen kann, ist identisch mit den Punkten des Dreiecks $a^{(1)}\,a^{(2)}\,a^{(3)}$.*

Ist nun eine Konstante $K > 1$ gegeben, so betrachten wir die Menge aller z, für die bei festgehaltenem $\zeta \neq a^{(3)}$

$$\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \leqq K \tag{I}$$

ist. (I) stellt ein abgeschlossenes, konvexes Gebiet dar, das symmetrisch zur Strecke $\zeta \ldots a^{(3)}$ liegt. Die Randkurve ist eine algebraische Kurve vierter Ordnung.

Zuerst wird gezeigt werden, daß die für die Elemente einer beliebigen Punktmenge $\{\zeta\}$ $(\zeta \neq a^{(3)})$ konstruierten *Bereiche* (I) *gleichmäßig beschränkt* sind; das soll heißen:

Es läßt sich eine Konstante $R = R(K) > 0$ finden, so daß

$$\text{(II)} \qquad \frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} > K \text{ für alle } |z-a^{(3)}| > R \text{ und alle } \zeta.$$

Wegen (b) ist nämlich für hinreichend großes $|\zeta - a^{(3)}|$

$$(3) \qquad \frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} > 2\frac{|z-a^{(3)}|}{|a^{(1)}-a^{(2)}|}, \text{ z. B. für } |\zeta - a^{(3)}| \geqq r,$$

andrerseits ist für $|\zeta - a^{(3)}| < r$

$$(4) \qquad \frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} > \frac{|z-a^{(3)}|}{r}.$$

Aus (3) und (4) ergibt sich die Behauptung, denn

$$\frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} > K, \text{ falls } |z-a^{(3)}| > R = \mathrm{Max}\left\{K\frac{|a^{(1)}-a^{(2)}|}{2};\ Kr\right\}.$$

Wählt man jetzt eine in der ganzen Ebene dichte Menge $\{\zeta\}$ $(\zeta \neq a^{(3)})$, so ist durch (I) eine Menge nicht leerer Punktmengen definiert. Wir bilden die Summe $\mathfrak{S}$ dieser Bereiche und gewinnen nötigenfalls unter Hinzunahme der Randpunkte von $\mathfrak{S}$ eine wegen (II) beschränkte, abgeschlossene Menge

$$\mathfrak{M}^{(3)} = \mathfrak{M}^{(3)}(K; \{\zeta\}; a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) = \mathfrak{M}^{(3)}(K).$$

Die Bereiche (I) sollen die *Elementarbereiche von* $\mathfrak{M}^{(3)}$ heißen.

2. $\mathfrak{M}^{(3)}$ *ist perfekt und unabhängig von der speziellen Wahl von* $\{\zeta\}$; $\mathfrak{M}^{(3)}$ ist also mit Hilfe einer abzählbaren, überall dichten Menge in abzählbar vielen Schritten zu finden.

$\{\zeta\}$ und $\{\eta\}$ seien beliebige, überall dichte Mengen mit von $a^{(3)}$ verschiedenen Elementen, $\mathfrak{M}^{(3)} = \mathfrak{M}^{(3)}(K; \{\zeta\})$ und $\mathfrak{N}^{(3)} = \mathfrak{N}^{(3)}(K; \{\eta\})$ nach obigem Verfahren konstruiert; H bedeute die dem Werte η nach (1) zugeordnete Konstante.

Jeder Punkt von $\mathfrak{M}^{(3)}$ ist Häufungsstelle innerer Punkte von Elementarbereichen dieser Menge.

Für *innere Punkte* der Bereiche (I) ist dies trivial.

Ist aber z_r *Randpunkt* eines Elementarbereiches, dann gilt in (I) bei geeignetem ζ für $z = z_r$ das Gleichheitszeichen. Die Punkte

$$(5) \qquad z = z_r - \tau(z_r - a^{(3)}) \qquad (0 < \tau < 1)$$

haben den Häufungspunkt z_r und sind innere Punkte des für das betreffende ζ definierten Gebietes, da für sie

$$\frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \leqq (1-\tau)\frac{Z|z_r-a^{(3)}|+|z_r-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} + \tau < K.$$

Jeder weitere Punkt z von $\mathfrak{M}^{(3)}$ gehört nicht zu $\mathfrak{S}$, ist jedoch Häufungsstelle innerer Punkte dieser Menge. Da $\mathfrak{M}^{(3)}$ hiernach *in sich dicht*, nach Voraussetzung aber *abgeschlossen* ist, so ist sie *perfekt*. Dasselbe gilt auch für $\mathfrak{N}^{3}$.

Die inneren Punkte von Elementarbereichen von $\mathfrak{M}^{(3)}$ sind stets innere Punkte gewisser Elementarbereiche von $\mathfrak{N}^{(3)}$. Denn zu jedem solchen Punkte z_i von $\mathfrak{M}^{(3)}$ gibt es ein ζ, so daß

$$\frac{Z\,|z_i - a^{(3)}| + |z_i - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} = K - \delta \qquad (\delta > 0).$$

Wegen der Stetigkeit von (2) in ζ und weil $\{\eta\}$ überall dicht ist, existieren demnach gewisse $\eta \neq a^{(3)}$, für die

$$\frac{H\,|z_i - a^{(3)}| + |z_i - \eta|}{|\eta - a^{(3)}|} < K.$$

Weil $\mathfrak{M}^{(3)}$ und $\mathfrak{N}^{(3)}$ perfekt sind, ist hiernach jeder Punkt von $\mathfrak{M}^{(3)}$ auch Punkt von $\mathfrak{N}^{(3)}$, $\mathfrak{M}^{(3)}$ *also Teilmenge von* $\mathfrak{N}^{(3)}$. Ebenso zeigt man, daß $\mathfrak{N}^{(3)}$ *Teilmenge von* $\mathfrak{M}^{(3)}$ ist; damit ist die *Identität von* $\mathfrak{M}^{(3)}$ *und* $\mathfrak{N}^{(3)}$ bewiesen.

3. *K und K' seien Konstanten mit* $1 \leqq K < K'$, $\mathfrak{M}^{(3)} = \mathfrak{M}^{(3)}(K; a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$, $\mathfrak{N}^{(3)} = \mathfrak{N}^{(3)}(K'; a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ *die nach* **1.** *konstruierten Mengen*, wobei unter $\mathfrak{M}^{(3)}(1)$ eventuell die Punkte des Dreiecks $a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}$ zu verstehen sind. *Dann liegt* $\mathfrak{M}^{(3)}$ *total in* $\mathfrak{N}^{(3)}$.

Wegen **2.** kann unter $\{\zeta\}$ die Gesamtheit der Punkte der Ebene mit Ausnahme von $a^{(3)}$ verstanden werden.

Eine Funktionenmenge $\Phi(z, p)$ (p Element der Parametermenge $\mathfrak{P}$, einer Menge komplexer Zahlen) heiße *im Punkte* z_0 *gleichgradig stetig* auf der Parametermenge, wenn $\Phi(z, p)$ für jedes p in z_0 und ein und derselben Umgebung definiert ist und wenn nach Vorgabe von $\varepsilon > 0$ ein nur von ε und z_0, nicht aber von p abhängiges $\delta > 0$ angegeben werden kann, so daß ist

$$(6) \qquad |\Phi(z, p) - \Phi(z_0, p)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |z - z_0| < \delta.$$

In diesem Sinn ist die durch (2) definierte Funktionenmenge auf der Parametermenge $|\zeta - a^{(3)}| \geqq r > 0$ gleichgradig stetig. Da nämlich

$$(7) \qquad \lim_{\zeta \to \infty} \frac{Z+1}{|\zeta - a^{(3)}|} = L^{(2)} = \frac{2}{|a^{(1)} - a^{(2)}|} > 0,$$

so gilt nach Wahl von $r > 0$

$$(8a) \qquad \frac{Z+1}{|\zeta - a^{(3)}|} < 2L^{(3)} \quad \text{für} \quad |\zeta - a^{(3)}| \geqq R \geqq r > 0.$$

Für $|\zeta - a^{(3)}| \leqq R$ ist weiter $Z + 1$ beschränkt, z. B. $< M$, somit

$$(8b) \qquad \frac{Z+1}{|\zeta - a^{(3)}|} < \frac{M}{r}, \quad \text{falls} \quad r \leqq |\zeta - a^{(3)}| \leqq R.$$

(8a) und (8b) bedeuten: Nach Vorgabe von $\varepsilon > 0$ und $r > 0$ ist

$$\text{(III)} \quad \left| \frac{\mathsf{Z}\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} - \frac{\mathsf{Z}\,|z_0-a^{(3)}|+|z_0-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \right| \leqq |z-z_0| \frac{\mathsf{Z}+1}{|\zeta-a^{(3)}|} < \varepsilon,$$

falls $|\zeta - a^{(3)}| \geqq r$ und $|z - z_0| < \varepsilon h^{(3)}$ ist.

$h^{(3)}$, die Abkürzung für $\operatorname{Min}\left\{\frac{1}{2L^{(2)}}; \frac{r}{M}\right\}$, nennen wir die Konstante der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionenmenge (2) für die Parametermenge $|\zeta - a^{(3)}| \geqq r > 0$.

Ist speziell $K = 1$, nach Voraussetzung also $\mathfrak{M}^{(3)}$ identisch mit den Punkten des Dreiecks $a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}$, so gibt es nach **1.** zu jedem Punkt z' des Dreiecks ein ζ, so daß

$$\frac{\mathsf{Z}\,|z'-a^{(3)}|+|z'-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} = 1$$

ist. z' ist demnach innerer Punkt des für dasselbe ζ konstruierten Elementarbereiches von $\mathfrak{N}^{(3)}$.

K wird nun größer als 1 *gedacht.* Jeder Punkt z' von $\mathfrak{M}^{(3)}$ ist Häufungsstelle von Werten z, die zu Elementarbereichen von $\mathfrak{M}^{(3)}$ gehören. Dabei darf z' von $a^{(3)}$ verschieden vorausgesetzt werden. Beschränken wir uns mit z zuerst auf eine Umgebung $|z - z'| < \frac{1}{2}|z' - a^{(3)}|$ von z', so ist

$$\text{(9)} \quad \frac{\mathsf{Z}\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq \frac{|z'-a^{(3)}|-|z-z'|}{|\zeta-a^{(3)}|} > K + K',$$

falls $|\zeta - a^{(3)}| < r = \frac{|z'-a^{(3)}|}{2(K+K')}$ ist. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit von (2) auf $|\zeta - a^{(3)}| \geqq r$ gehört jeder solche Punkt z und damit auch z' mit einer δ-Umgebung ($\delta = \operatorname{Min}\{(K'-K)h^{(3)}; \frac{1}{2}|z'-a^{(3)}|\}$) zu $\mathfrak{N}^{(3)}$. *z' ist also innerer Punkt von* $\mathfrak{N}^{(3)}$.

4. *Jedem nicht zum Dreieck $a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}$ gehörigen Punkte $z^{(3)}$ kommt eindeutig eine Konstante $N^{(3)}(z^{(3)}) > 1$ zu, so daß $z^{(3)}$ Randpunkt der Menge $\mathfrak{M}^{(3)} = \mathfrak{M}^{(3)}(N^{(3)}(z^{(3)}); a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ ist, die nach* **1.** *mit Hilfe einer überall dichten Menge $\{\zeta\}$ zu bilden ist. Es ist*

$$\text{(IV)} \quad \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{\mathsf{Z}\,|z^{(3)}-a^{(3)}|+|z^{(3)}-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} = N^{(3)}(z^{(3)}).$$

Beweis. (IV) bedeutet wegen der Stetigkeit von (2) in ζ und weil $\{\zeta\}$ überall dicht, daß nach Wahl von $\varepsilon > 0$

$$\text{(IVa)} \quad \frac{\mathsf{Z}\,|z^{(3)}-a^{(2)}|+|z^{(3)}-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} < N^{(3)}(z^{(3)}) + \varepsilon \text{ für unendlich viele } \zeta,$$

und daß

$$\text{(IVb)} \quad \frac{\mathsf{Z}\,|z^{(3)}-a^{(3)}|+|z^{(3)}-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq N^{(3)}(z^{(3)}) \text{ für alle } \zeta.$$

Wir zeigen nun zuerst:

A. *In jeder Umgebung von $z^{(3)}$ liegen innere Punkte von $\mathfrak{M}^{(3)}$.*

Zu jedem Gliede einer Nullfolge mit positiven Gliedern ε_n wird ein ζ_n bestimmt, so daß (IVa) erfüllt ist. Ein etwaiger Häufungswert dieser ζ_n sei ζ genannt.

a) *Ist kein solcher (endlicher) Häufungswert vorhanden,* so gilt wegen (b) und (7)

$$L^{(2)}|z^{(3)}-a^{(3)}|+1=N^{(3)}(z^{(3)}).$$

$N^{(3)}(z^{(3)})$ ist dabei größer als 1, da $L^{(2)}|z^{(3)}-a^{(3)}|>0$ ist. Für jedes

$$z_\tau=z^{(3)}-\tau(z^{(3)}-a^{(3)}) \qquad (0<\tau<1) \tag{10}$$

ist nun

$$L^{(2)}|z_\tau-a^{(3)}|+1=L^{(2)}|z^{(3)}-a^{(3)}|+1-\tau L^{(2)}|z^{(3)}-a^{(3)}|.$$

Nach (b) existiert also ein ζ und eine Konstante $r_\tau>0$, so daß

$$\frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}<N^{(3)}(z^{(3)}) \quad \text{für} \quad |z-z_\tau|<r_\tau. \tag{Va}$$

b) *Ist ein Häufungswert ζ vorhanden,* so ist, wenn Z die ihm nach (1) zugeordnete Konstante bedeutet, wie in **1.** gezeigt,

$$\frac{Z|z^{(3)}-a^{(3)}|+|z^{(3)}-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}=N^{(3)}(z^{(3)})>1. \tag{11}$$

Für die Punkte (10) folgt dann genau wie in **2.**:

$$\frac{Z|z_\tau-a^{(3)}|+|z_\tau-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}\leqq N^{(3)}(z^{(3)})-\tau(N^{(3)}(z^{(3)})-1)<N^{(3)}(z^{(3)}). \tag{Vb}$$

Nach (Va) und (Vb) liegen also, da die Punkte z_τ den Häufungspunkt $z^{(3)}$ besitzen, in jeder Umgebung von $z^{(3)}$ innere Punkte gewisser Elementarbereiche von $\mathfrak{M}^{(3)}$, also innere Punkte von $\mathfrak{M}^{(3)}$. — Weiter gilt:

B. *In jeder Umgebung von $z^{(3)}$ liegen äußere Punkte von $\mathfrak{M}^{(3)}$.*

$$z_\tau=z^{(3)}+\tau(z^{(3)}-a^{(3)}) \qquad (\tau>0) \tag{12}$$

sind solche äußeren Punkte von $\mathfrak{M}^{(3)}$. Wegen (IVb) ist nämlich

$$\frac{Z|z_\tau-a^{(3)}|+|z_\tau-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}\geqq\frac{Z|z^{(3)}-a^{(3)}|+|z^{(3)}-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}+\tau(N^{(3)}(z^{(3)})-1). \tag{13}$$

Durch Wahl von τ beschränken wir uns auf $|z_\tau-z^{(3)}|<\frac{1}{4}|z^{(3)}-a^{(3)}|$ und legen hier ein $z_\tau\neq z^{(3)}$ fest. Wegen (9) ist

$$\frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}>2N^{(3)}(z^{(3)}), \tag{VIa}$$

$$\text{falls} \quad |\zeta-a^{(3)}|<\frac{|z^{(3)}-a^{(3)}|}{4N^{(3)}} \quad \text{und} \quad |z-z^{(3)}|<\frac{1}{2}|z^{(3)}-a^{(3)}|.$$

Wegen der gleichgradigen Stetigkeit von (2) auf $|\zeta - a^{(3)}| \geqq r = \frac{|z^{(3)} - a^{(3)}|}{4N^{(3)}}$ gilt für $|\zeta - a^{(3)}| \geqq r$ und $|z - z_\tau| < \tau(N^{(3)} - 1)h^{(3)}$ bei Benutzung von (13)

$$\text{(VIb)} \qquad \frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} > N^{(3)}(z^{(3)}).$$

Nach (VIa) und (VIb) hat z_τ von $\mathfrak{S}$ und damit von $\mathfrak{M}^{(3)}$ einen Mindestabstand δ, wo $\delta = \text{Min}\left\{\tau(N^{(3)} - 1)h^{(3)}; \frac{|z^{(3)} - a^{(3)}|}{4}\right\}$ ist.

Aus A. und B. folgt, daß $z^{(3)}$ *Randpunkt der Menge* $\mathfrak{M}^{(3)}(N^{(3)}(z^{(3)}))$ ist, da in jeder Umgebung von $z^{(3)}$ sowohl innere als auch äußere Punkte von $\mathfrak{M}^{(3)}$ liegen.

5. *Zwei Eigenschaften der Funktion* $N^{(3)}(z^{(3)})$.

A. *Stetigkeit.* (IV) wird, weil sich zu jedem z^* von $a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}$ ein ζ angeben läßt, so daß

$$\frac{Z|z^*-a^{(3)}|+|z^*-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} = 1$$

ist, sinngemäß durch die Festsetzung

$$N^{(3)}(z^*) = 1$$

erweitert.

Ist z^* ein beliebiger Punkt dieser Art, dann gilt wegen der Stetigkeit von (2) nach Vorgabe von $\varepsilon > 0$ für unendlich viele ζ aus $\{\zeta\}$

$$\frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} < 1+\varepsilon, \quad \text{falls} \quad |z-z^*| < \delta \qquad (\delta > 0).$$

Für dieselben z ist, weil der links stehende Ausdruck $\geqq 1$,

$$1 \leqq \underset{\{\zeta\}}{\text{fin}} \frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} < 1+\varepsilon.$$

Ist aber $z^{(3)}$ äußerer Punkt des Dreiecks $a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}$, so beschränken wir uns zunächst auf die Umgebung $|z - z^{(3)}| < \frac{|z^{(3)} - a^{(3)}|}{4}$ von $z^{(3)}$.

Dann gilt (VIa). $h^{(3)}$ sei ebenso bestimmt wie früher, ε beliebig klein positiv gegeben, daß schon $\varepsilon h^{(3)} < \frac{1}{2}|z^{(3)} - a^{(3)}|$. Nach (IVa) und wegen der gleichgradigen Stetigkeit ist somit für geeignetes ζ

$$\text{(14)} \qquad \frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} < N^{(3)}(z^{(3)}) + \varepsilon, \quad \text{falls} \quad |z-z^{(3)}| < \frac{\varepsilon}{2}h^{(3)},$$

deshalb

$$\text{(15a)} \quad N^{(3)}(z) = \underset{\{\zeta\}}{\text{fin}} \frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} < N^{(3)}(z^{(3)}) + \varepsilon, \quad \text{falls} \quad |z-z^{(3)}| < \frac{\varepsilon}{2}h^{(3)}.$$

z' sei nun ein fester Punkt der $\frac{\varepsilon}{2}h^{(3)}$-Umgebung von $z^{(3)}$; er liegt mit

einer $\frac{\varepsilon}{2}h^{(3)}$-Umgebung in dem Kreise $|z-z^{(3)}|<\frac{1}{2}|z^{(3)}-a^{(3)}|$. Der ihm zugewiesene Funktionswert sei $N^{(3)}(z')$. z' spielt dann dieselbe Rolle wie eben $z^{(3)}$, also gilt speziell, weil $|z'-z^{(3)}|<\frac{\varepsilon}{2}h^{(3)}$,

$$(15\text{b}) \qquad N^{(3)}(z^{(3)}) = \operatorname*{fin}_{(\zeta)} \frac{Z\,|z^{(3)}-a^{(3)}|+|z^{(3)}-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} < N^{(3)}(z')+\varepsilon.$$

(15a) und (15b) machen aber gerade die Behauptung aus.

B. $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{N^{(3)}(z)}{|z|} = \operatorname*{fin}_{(\zeta)}\frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|}$ *existiert als positiver Wert.*

Die Existenz der rechten Seite folgt aus der Existenz des unter dem Finiszeichen stehenden Ausdrucks für $\zeta = a^{(3)}+1$. Weiter ist, wenn $L^{(2)}$ dieselbe Bedeutung wie in (7) hat,

$$\frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq \begin{cases} \frac{1}{2}L^{(2)}, & \text{falls} \quad |\zeta-a^{(3)}| \geqq R, \\ \frac{2}{R}, & \text{falls} \quad |\zeta-a^{(3)}| \leqq R, \end{cases}$$

also auch

$$\operatorname*{fin}_{(\zeta)}\frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq \operatorname{Min}\left\{\frac{L^{(2)}}{2};\frac{2}{R}\right\} > 0.$$

Wegen (IVb) ist nun weiter für jedes $\zeta \neq a^{(3)}$

$$\frac{1}{|z|}\cdot\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq \frac{N^{(3)}(z)}{|z|},$$

deshalb bei festem ζ wegen (c) auch der Limes der linken Seite nicht kleiner als der Limes superior der rechten, somit

$$(16\text{a}) \qquad \operatorname*{fin}_{(\zeta)}\frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq \overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{N^{(3)}(z)}{|z|}.$$

Aus (IVa) erhalten wir schließlich nach Wahl von $\varepsilon>0$:

$$\frac{1}{|z|}\cdot\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} < \frac{1}{|z|}\left(N^{(3)}(z)+\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ für mindestens ein } \zeta \neq a^{(3)}.$$

Der Limes inferior der rechten Seite existiert als endlicher Wert, da nach (16a) die Existenz des Limes superior gesichert ist. Es gibt also gewisse z von genügend großem Absolutwert und zu jedem dieser z ein ζ, so daß

$$\frac{1}{|z|}\cdot\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} < \varliminf_{z\to\infty}\frac{N^{(3)}(z)}{|z|}+\varepsilon$$

ist. Da

$$\frac{1}{|z|}\cdot\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq \frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|}\left\{1-\frac{1}{|z|}\cdot\frac{|\zeta|+|a^{(3)}|}{Z+1}\right\}$$

und der Faktor von $\frac{1}{|z|}$

$$\frac{|\zeta|+|a^{(3)}|}{Z+1} \leqq \begin{cases} \frac{2}{L^{(2)}} & \text{für } |\zeta| \geqq R, \\ \frac{R+|a^{(3)}|}{2} & \text{für } |\zeta| \leqq R, \end{cases}$$

so ist für alle z von hinreichend hohem Absolutbetrag

$$\frac{1}{|z|}\,\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq \vartheta\,\frac{Z+1}{\zeta-a^{(3)}|},$$

wo ϑ einen beliebig nahe an 1 gelegenen, vorgebbaren festen echten Bruch bedeutet. Deshalb gilt auch

$$\vartheta \operatorname*{fin}_{(\zeta)} \frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|} < \varlimsup_{z\to\infty} \frac{N^{(3)}(z)}{|z|} + \varepsilon. \tag{16b}$$

Nach (16a) und (16b) ist dann, wie aus den Eigenschaften von ε und ϑ folgt,

$$\operatorname*{fin}_{(\zeta)} \frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|} \leqq \varliminf_{z\to\infty} \frac{N^{(3)}(z)}{|z|} \leqq \varlimsup_{z\to\infty} \frac{N^{(3)}(z)}{|z|} \leqq \operatorname*{fin}_{(\zeta)} \frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|}.$$

Das ist aber gerade die Behauptung.

6. *Jede Folge* (s_n) *mit den drei nicht in einer Geraden liegenden Häufungspunkten* $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ *ist nach Vorgabe einer Konstanten* $K \geqq 1$ *zu jedem Werte der nach* **1.** *konstruierten Menge* $\mathfrak{M}^{(3)} = \mathfrak{M}^{(3)}(K; a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ *durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar*, wobei $\mathfrak{M}^{(3)} = \mathfrak{M}^{(3)}(1)$ eventuell die Punkte von $a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}$ bedeutet.

Jede vorgelegte Folge (s_n) der genannten Eigenschaft kann auf beliebig viele Arten in drei Teilfolgen $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ zerlegt werden, so daß jedes Glied von (s_n) in genau einer der Folgen $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ vorkommt und $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ gegen $a^{(\varkappa)}$ strebt $(\varkappa = 1, 2, 3)$. Für den weiteren Beweis trennen wir in die Unterfälle $K = 1$ und $K > 1$.

a) $K = 1$. Jeder Punkt z von $a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}$ kann in der Form

$$z = \frac{\lambda_1 a^{(1)} + \lambda_2 a^{(2)} + \lambda_3 a^{(3)}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \tag{17}$$

dargestellt werden, wo $\lambda_\varkappa$ nicht negativ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0$ ist. Zur Bestimmung der n-ten Zeile einer regulären Matrix, die das Verlangte leistet, wählt man in (s_n) drei Glieder $s_{\nu_{1n}}, s_{\nu_{2n}}, s_{\nu_{3n}}$ aus, deren Indizes größer als n sind und die der Bedingung genügen, daß $s_{\nu_{\varkappa n}}$ zu $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ gehört. Dann setzt man

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \frac{\lambda_\varkappa}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, & \text{falls } \nu = \nu_{\varkappa n} \quad (\varkappa = 1, 2, 3), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{18}$$

$(a_{n\nu})$ ist regulär, hat die Norm 1, und es strebt nach (17)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu = \frac{\lambda_1 s_{\nu_1 n} + \lambda_2 s_{\nu_2 n} + \lambda_3 s_{\nu_3 n}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \to z.$$

b) $K > 1$. Nach dem Vorangehenden und nach dem Hilfssatz des § 1 ist (s_n) zu jedem Werte z des Dreiecks $a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}$ durch reguläre Matrizen jeder Norm $1 \leqq N \leqq K$ limitierbar.

(σ'_λ) sei die nach Aussonderung von $(\sigma_\lambda^{(3)})$ aus (s_n) übrig bleibende Folge mit den Häufungspunkten $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$.

Ist für z bei geeigneter Wahl von ζ

$$\frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} \leqq K, \tag{19}$$

dann gibt es nach dem Satze des vorigen Paragraphen eine reguläre Matrix $(a'_{n\lambda})$ der Norm Z, mit deren Hilfe (σ'_λ) zum Werte ζ limitierbar ist. Man wählt nun in (s_n) ein Glied $s_{\nu_{3n}}$ aus, das zu $(\sigma_\lambda^{(3)})$ gehört und dessen Index $> n$ ist, und setzt

$$a_{n\nu} = \begin{cases} a'_{n\lambda} \dfrac{z-a^{(3)}}{\zeta - a^{(3)}}, & \text{falls } s_\nu \text{ das } \lambda\text{-te Glied von } (\sigma'_\lambda), \\ \dfrac{\zeta - z}{\zeta - a^{(3)}}, & \text{falls } \nu = \nu_{3n}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{20}$$

Diese Matrix $(a_{n\nu})$ ist regulär und hat die Norm

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) = \frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|}.$$

Weiter strebt nach den Voraussetzungen über $(a'_{n\lambda})$ und $s_{\nu_{3n}}$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu = \frac{z-a^{(3)}}{\zeta - a^{(3)}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a'_{n\lambda} \sigma'_\lambda + \frac{\zeta - z}{\zeta - a^{(3)}} s_{\nu_{3n}}$$

mit wachsendem n gegen z.

Existiert aber zu z kein ζ, so daß eine Beziehung (19) besteht, so greifen wir eine gegen z strebende Punktfolge $(z^{(m)})$ heraus, für deren Glieder eine Beziehung (19) gilt (vgl. (10)). Wie eben bewiesen, gibt es zu jedem $z^{(m)}$ reguläre Matrizen $(a_{n\nu}^{(m)})$ der Norm K, so daß $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(m)} s_\nu \right) \to z^{(m)}$ strebt. Aus $(a_{n\nu}^{(m)})$ wird nun eine Zeile ausgewählt, für die

1. $|a_{n\nu}^{(m)}| < \frac{1}{m}$ für $\nu \leqq m$; 2. $\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}^{(m)}| - K \right| < \frac{1}{m}$;

3. $\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(m)} - 1 \right| < \frac{1}{m}$ und 4. $\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(m)} s_\nu - z^{(m)} \right| < \frac{1}{m}$.

Eine solche Zeile von $(a_{n\nu}^{(m)})$ gibt die m-te Zeile der Matrix $(a_{m\nu}^{*})$; diese ist regulär, hat die Norm K, und es strebt $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m\nu}^{*} s_\nu\right)$ gegen z. Damit ist die Behauptung bewiesen.

7. *Die Folge (s_n) mit den drei nicht in einer Geraden liegenden Häufungspunkten $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ ist zu keinem außerhalb $\mathfrak{M}^{(3)}(K; a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ gelegenen Wert durch reguläre Matrizen einer Norm $N \leqq K$ limitierbar $(K \geqq 1)$.*

(s_n) wird in drei Teilfolgen $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ $(\varkappa = 1, 2, 3)$ zerlegt, so daß jedes Glied von (s_n) in genau einer dieser Folgen vorkommt und $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ gegen $a^{(\varkappa)}$ strebt. Ist $(a_{n\nu})$ eine reguläre Matrix, so können die Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}$ mit Hilfe dieser Zerlegung je in drei absolut konvergente Reihen $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ zerlegt werden, indem man $a_{n\nu} = a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ setzt, falls s_ν das λ-te Glied der Teilfolge $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ ist $(\varkappa = 1, 2$ oder $3)$.

Aus $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right) \to z$ folgt dann

$$(21) \qquad \frac{a^{(1)} \sum a_{n\lambda}^{(1)} + a^{(2)} \sum a_{n\lambda}^{(2)} + a^{(3)} \sum a_{n\lambda}^{(3)}}{\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)} + \sum a_{n\lambda}^{(3)}} \to z \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Wir treffen zunächst die Voraussetzung:

A. *Es existiere eine $\delta > 0$, so daß für eine Teilfolge der n*

$$(22) \qquad \left| \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(1)} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(2)} \right| \geqq \delta > 0,$$

setzen für diese n

$$(23) \qquad \zeta_n = \frac{a^{(1)} \sum a_{n\lambda}^{(1)} + a^{(2)} \sum a_{n\lambda}^{(2)}}{\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)}} \quad \text{und} \quad q_n = \frac{\sum a_{n\lambda}^{(3)}}{\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)}}$$

und finden, nachdem Zähler und Nenner von (21) durch $\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)}$ dividiert sind, daß $\frac{\zeta_n + q_n a^{(3)}}{1 + q_n}$ gegen z strebt.

(ζ_n) ist beschränkt, besitzt also nach dem Satze von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt ζ, dem in (1) ein Z zugeordnet ist. Diejenige Folge, die nach Aussonderung von $(\sigma_\lambda^{(3)})$ aus (s_n) übrigbleibt, nennen wir (σ_ν'). Es sei

$$a_{n\nu}' = \frac{a_{n\lambda}^{(\varkappa)}}{\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)}}, \quad \text{falls } \sigma_\nu' \text{ das } \lambda\text{-te Glied von } (\sigma_\lambda^{(\varkappa)}) \quad (\varkappa = 1, 2).$$

Da mit der Matrix $(a_{n\nu})$ auch $(a_{n\nu}')$ regulär ist und da $\sum a_{n\nu}' \sigma_\nu'$ den Häufungspunkt ζ hat, ist

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\sum |a_{n\lambda}^{(1)}| + \sum |a_{n\lambda}^{(2)}|}{\left| \sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)} \right|} \geqq Z.$$

Dieselbe Aussage gilt sogar für den unteren Limes.

Wegen (21) besitzt auch $\frac{\zeta + q_n a^{(3)}}{1+q_n}$ den Häufungspunkt z, und daraus folgt, daß q_n den Häufungspunkt $\frac{\zeta - z}{z - a^{(3)}}$ hat. Da

$$\frac{\sum |a_{n\nu}|}{|\sum a_{n\nu}|} = \frac{\sum |a_{n\lambda}^{(1)}| + \sum |a_{n\lambda}^{(2)}| + \sum |a_{n\lambda}^{(3)}|}{|\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)} + \sum a_{n\lambda}^{(3)}|} \geqq \frac{|q_n| + \frac{\sum |a_{n\lambda}^{(1)}| + \sum |a_{n\lambda}^{(2)}|}{|\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)}|}}{|1+q_n|},$$

so gilt, wie man leicht erkennt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) \geqq \frac{\mathrm{Z}\,|z-a^{(3)}| + |z-\zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} > K. \tag{VIIa}$$

B. *Strebt aber* $\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)} \to 0$, *also* $\sum a_{n\lambda}^{(3)} \to 1$ *für* $n \to \infty$, so setzt man

$$\sum a_{n\lambda}^{(2)} = -\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \varepsilon_n \qquad (\varepsilon_n \to 0).$$

Aus (21) folgt dann, daß $\sum a_{n\lambda}^{(1)}$ gegen $\frac{z-a^{(3)}}{a^{(1)}-a^{(2)}}$ strebt. Da

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \geqq \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(1)}| + \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(2)}| + \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(3)}| \geqq 2\,\frac{|z-a^{(3)}|}{|a^{(1)}-a^{(2)}|} + 1 + \varepsilon_n',$$

wo ε_n' gegen 0 strebt, so findet man aus der Voraussetzung

$$\operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{\mathrm{Z}\,|z-a^{(3)}| + |z-\zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} > K$$

mit Hilfe von (b) auch in diesem Fall

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) > K. \tag{VIIb}$$

Durch (VIIa) und (VIIb) ist die Behauptung bewiesen.

Wir fassen die Resultate zusammen in dem

Satz. *Besitzt* (s_n) *genau die drei nicht in einer Geraden liegenden Häufungspunkte* $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$, *so ist* (s_n) *zu einem beliebigen Wert* z *durch reguläre Matrizen jeder Norm* $N \geqq N^{(3)}(z)$ *limitierbar, wo*

$$N^{(3)}(z) = \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{\mathrm{Z}\,|z-a^{(3)}| + |z-\zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|}$$

ist. Keine reguläre Matrix geringerer Norm leistet dasselbe.

8. $\mathfrak{M}^{(3)}(K; a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ *ist unabhängig von der Reihenfolge der* $a^{(\varkappa)}$ *und ist ein konvexes abgeschlossenes Gebiet.*

Weil $\mathfrak{M}^{(3)}(K; a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ genau die Punkte darstellt, zu denen (s_n) durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar ist, kann $\mathfrak{M}^{(3)}$ von der Reihenfolge der $a^{(\varkappa)}$ nicht abhängen.

Weil $\mathfrak{M}^{(3)}$ perfekt, ist nur noch zu zeigen, daß sämtliche Punkte der Verbindungsstrecke zweier innerer Punkte z_1 und z_2 von $\mathfrak{M}^{(3)}$ innere Punkte von $\mathfrak{M}^{(3)}$ sind. Zu z_1 und z_2 gibt es nämlich nach **3.**, **4.** und **6.**

reguläre Matrizen $(a_{n\nu}^{(1)})$ und $(a_{n\nu}^{(2)})$, beide von einer Norm kleiner als K, so daß, wenn (s_n) die Ausgangsfolge mit den Häufungspunkten $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ ist, $\sum a_{n\nu}^{(1)} s_\nu$ gegen z_1 und $\sum a_{n\nu}^{(2)} s_\nu$ gegen z_2 strebt. Jeder Punkt der Verbindungsstrecke $z_1 \dots z_2$ ist dargestellt durch $z = z_1 + \tau(z_2 - z_1)$ $(0 < \tau < 1)$, also strebt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu = \sum [a_{n\nu}^{(1)} + \tau (a_{n\nu}^{(2)} - a_{n\nu}^{(1)})] s_\nu \to z.$$

Die Norm der regulären Transformationsmatrix $(a_{n\nu}^{(1)} + \tau(a_{n\nu}^{(2)} - a_{n\nu}^{(1)}))$ ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) \leqq (1-\tau) \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum |a_{n\nu}^{(1)}| \right) + \tau \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum |a_{n\nu}^{(2)}| \right) < K,$$

z demnach innerer Punkt von $\mathfrak{M}^{(3)}(K)$.

§ 3.

Die Ecken eines konvexen p-Ecks seien die Häufungspunkte von (s_n).

Untersucht man Folgen, deren Häufungspunkte die Ecken eines konvexen Vierecks sind, so gewinnt man analog entsprechende Resultate. Dies legt einen Induktionsschluß auf Folgen nahe, deren Häufungspunkte in den Ecken eines konvexen p-Ecks liegen.

1. ***Definition einer Punktmenge*** $\mathfrak{M}^{(p)}$.

Im Satze des letzten Paragraphen war jedem z durch

$$N^{(3)}(z) = \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z|z-a^{(3)}| + |z-\zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|}$$

eine Konstante zugeordnet. Denken wir uns nun $\zeta^{(4)}$ statt z, $Z^{(4)}$ statt $N^{(3)}(z)$, $\zeta^{(3)}$ für ζ und $Z^{(3)}$ für Z geschrieben, so kann als *Induktionsvoraussetzung* benützt werden:

Jedem $\zeta^{(p)}$ ist nach Vorgabe des konvexen $(p-1)$-Ecks $a^{(1)} \dots a^{(p-1)}$ durch

$$(1) \qquad Z^{(p)} = \operatorname*{fin}_{\{\zeta^{(p-1)}\}} \frac{Z^{(p-1)}|\zeta^{(p)} - a^{(p-1)}| + |\zeta^{(p)} - \zeta^{(p-1)}|}{|\zeta^{(p-1)} - a^{(p-1)}|}$$

ein Wert zugewiesen. $\{\zeta^{(p-1)}\}$ bezeichnet eine überall dichte Menge mit der Einschränkung $\zeta^{(p-1)} \neq a^{(p-1)}$, $Z^{(p-1)}$ ist durch die entsprechende Formel erklärt, wo der Buchstabe p um eine Einheit kleiner zu denken ist, falls $p \geqq 4$. Unter $Z^{(3)}$ ist der Wert $\frac{|\zeta^{(3)} - a^{(1)}| + |\zeta^{(3)} - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}$ zu verstehen. $Z^{(p)} = 1$ gilt genau dann, wenn $\zeta^{(p)}$ Punkt des $(p-1)$-Ecks $a^{(1)} \dots a^{(p-1)}$ ist. $Z^{(p)}$ ist stetig in $\zeta^{(p)}$, und $\frac{Z^{(p)}}{|\zeta^{(p)}|}$ strebt für $\zeta^{(p)} \to \infty$ dem positiven endlichen Grenzwert $L^{(p-1)} = \operatorname*{fin}_{\{\zeta^{(p-1)}\}} \frac{Z^{(p-1)} + 1}{|\zeta^{(p-1)} - a^{(p-1)}|}$ zu.

Die entsprechenden Tatsachen sind in § 2 für $p = 4$ bewiesen. Ohne Verwechslungen befürchten zu müssen, können wir in den folgenden Abschnitten statt $\zeta^{(p)}$ einfach ζ, statt $Z^{(p)}$ Z schreiben.

$a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ seien die Eckpunkte eines konvexen p-Ecks. Für jedes $\zeta \neq a^{(p)}$ kann mit Hilfe von (1) die Funktion

$$\frac{Z\,|z-a^{(p)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(p)}|} \tag{2}$$

gebildet werden. Weil Z in ζ stetig, ist (2) für festes z stetig in $\zeta \neq a^{(p)}$. Jede Funktion (2) ist stetig in z, und es gilt:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{\zeta \to a^{(p)}} \frac{Z\,|z-a^{(p)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(p)}|} = \infty, \quad \text{falls } z \neq a^{(p)}.$$

$$\text{(b)} \qquad \lim_{\zeta \to \infty} \frac{Z\,|z-a^{(p)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(p)}|} = L^{(p-1)}|z-a^{(p)}|+1$$

existiert nach der Induktionsvoraussetzung über $\frac{Z}{|\zeta|}$.

$$\text{(c)} \qquad \lim_{z \to \infty} \frac{Z\,|z-a^{(p)}|+|z-\zeta|}{|z|\,|\zeta-a^{(p)}|} = \frac{Z+1}{|\zeta-a^{(p)}|} \qquad (\zeta \neq a^{(p)}).$$

Ähnlich wie im entsprechenden Fall für drei Punkte zeigt man:

Die Gesamtheit der Punkte z, für welche die Funktion (2) *bei geeigneter Wahl von ζ den Wert* 1 *annehmen kann, ist identisch mit den Punkten des konvexen p-Ecks $a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(p)}$.*

Man bestimme nun alle z, für die bei gegebenem $K > 1$ und $\zeta \neq a^{(p)}$

$$\frac{Z\,|z-a^{(p)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(p)}|} \leqq K \tag{I}$$

ist. (I) stellt ein abgeschlossenes Gebiet dar. Wie in § 3, **1.** zeigt man, daß die für irgendeine Punktmenge $\{\zeta\}$ definierten Bereiche (I) gleichmäßig beschränkt sind. Man hat im Beweise nur $\frac{2}{|a^{(1)}-a^{(2)}|}$ durch den nach Voraussetzung existierenden, positiven Wert

$$L^{(p-1)} = \operatorname*{fin}_{\{\zeta^{(p-1)}\}} \frac{Z^{(p-1)}+1}{|\zeta^{(p-1)}-a^{(p-1)}|},$$

im übrigen die obern Indizes 3 sinnentsprechend durch p, 2 durch $p-1$ zu ersetzen.

Wählt man jetzt eine in der ganzen Ebene dichte Menge $\{\zeta\}$ $(\zeta \neq a^{(p)})$, so ist dafür in (I) eine Menge nicht leerer Punktmengen definiert. Wir bilden ihre Summe $\mathfrak{S}$ und gewinnen nötigenfalls unter Hinzunahme der Randpunkte von $\mathfrak{S}$ eine beschränkte abgeschlossene Menge

$$\mathfrak{M}^{(p)} = \mathfrak{M}^{(p)}(\lambda; \{\zeta\}; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)}) = \mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)}).$$

Die Bereiche (I) heißen die *Elementarbereiche der Menge* $\mathfrak{M}^{(p)}$. — Nun gilt

2. $\mathfrak{M}^{(p)}$ *ist perfekt und unabhängig von der Wahl von* $\{\zeta\}$.

3. *K und K' seien Konstanten mit* $1 \leqq K < K'$, *ferner* $\mathfrak{M}^{(p)} = \mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ *und* $\mathfrak{N}^{(p)} = \mathfrak{N}^{(p)}(K'; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ *die nach* **1.** *konstruierten Mengen, wobei unter* $\mathfrak{M}^{(p)}(1; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ *eventuell die Punkte des konvexen p-Ecks* $a^{(1)}\, a^{(2)} \ldots a^{(p)}$ *zu verstehen sind. Dann liegt* $\mathfrak{M}^{(p)}$ *total in* $\mathfrak{N}^{(p)}$.

4. *Jedem nicht zum konvexen Polygon* $a^{(1)}\, a^{(2)} \ldots a^{(p)}$ *gehörigen Punkte* $z^{(p)}$ *kommt eindeutig ein* $N^{(p)}(z^{(p)}) > 1$ *zu, so daß* $z^{(p)}$ *Randpunkt der nach* **1.** *gebildeten Menge* $\mathfrak{M}^{(p)} = \mathfrak{M}^{(p)}(N^{(p)}(z^{(p)}); a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ *ist. Es ist*

$$\text{(IV)} \qquad N^{(p)}(z^{(p)}) = \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z\,|z^{(p)} - a^{(p)}| + |z^{(p)} - \zeta|}{|\zeta - a^{(p)}|}.$$

5. *Zwei Eigenschaften der Funktion* $N^{(p)}(z)$.

A. *Stetigkeit.*

$$\text{B.} \quad \lim_{z \to \infty} \frac{N^{(p)}(z)}{|z|} = \lim_{z \to \infty} \left[\frac{1}{|z|} \cdot \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z\,|z - a^{(p)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(p)}|} \right] = \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z+1}{|\zeta - a^{(p)}|}$$

existiert als positiver endlicher Wert.

Die Beweise zu **2.** bis **5.** stehen vollständig in den entsprechenden Abschnitten des § 2. Nur hat man zu ersetzen: (7) durch

$$\text{(7)} \qquad \lim_{\zeta \to \infty} \frac{Z}{|\zeta|} = \operatorname*{fin}_{\{\zeta^{p-1}\}} \frac{Z^{(p-1)} + 1}{|\zeta^{(p-1)} - a^{(p-1)}|} = L^{(p-1)},$$

Wendungen wie „Dreieck $a^{(1)}\, a^{(2)}\, a^{(3)}$“ durch „konvexes Polygon $a^{(1)}\, a^{(2)} \ldots a^{(p)}$“ und die oberen Indizes 2 und 3 durch $p-1$ und p.

Damit ist der die Funktion $N^{(p)}(z)$ betreffende Induktionsbeweis vollendet, da die für $p-1$ vorausgesetzten, für die Werte 2 und 3 bewiesenen Beziehungen nun auch für den Wert p gelten.

6. *Jede Folge* (s_n), *deren Häufungspunkte die Ecken eines konvexen p-Ecks* $a^{(1)} \ldots a^{(p)}$ *sind, ist nach Vorgabe einer Konstanten* $K \geqq 1$ *zu jedem Werte der nach* **1.** *konstruierten Menge* $\mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ *durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar,* wobei $\mathfrak{M}^{(p)}(1; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ die Punkte des konvexen p-Ecks $a^{(1)} \ldots a^{(p)}$ bedeutet.

Als weitere *Induktionsvoraussetzung* wird benützt, daß eine Folge (s_n) mit den Häufungspunkten in den Ecken eines konvexen $(p-1)$-Ecks zu einem beliebigen Werte ζ durch reguläre Matrizen der Norm Z limitierbar ist, wo Z in (1) definiert ist. Für $p = 3$ ist diese Voraussetzung als richtig erwiesen.

Jede Folge der genannten Art kann in p Teilfolgen $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ zerlegt werden, so daß jedes Glied von (s_n) in genau einer dieser Folgen vorkommt und $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ gegen $a^{(\varkappa)}$ strebt $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$. Wie in § 2 behandeln wir die Fälle $K = 1$ und $K > 1$ getrennt.

a) $K = 1$. z ist also Punkt des p-Ecks $a^{(1)} \ldots a^{(p)}$.

Jeder Punkt des Polygons $a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(p)}$ läßt sich in der Form

$$z = \frac{\lambda_1 a^{(1)} + \lambda_2 a^{(2)} + \ldots + \lambda_p a^{(p)}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p} \tag{17}$$

darstellen, wobei alle $\lambda_\varkappa \geqq 0$ sind und $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p > 0$ ist[5]).

Man wähle nun aus (s_n) p Glieder $s_{\nu_{\varkappa n}}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$ aus, deren Indizes größer als n sind und die der Bedingung genügen, daß $s_{\nu_{\varkappa n}}$ zu $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ gehört. Dann setzt man

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_\varkappa}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p} & \text{für } \nu = \nu_{\varkappa n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{18}$$

$(a_{n\nu})$ ist regulär, hat die Norm 1, und nach (17) strebt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu = \frac{\lambda_1 s_{\nu_{1n}} + \lambda_2 s_{\nu_{2n}} + \ldots + \lambda_p s_{\nu_{pn}}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p} \to z.$$

b) $K > 1$. (σ_λ') sei jetzt die nach Aussonderung von $(\sigma_\lambda^{(p)})$ aus (s_n) übrig bleibende Folge mit den Häufungswerten $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p-1)}$. Der weitere Beweis ist nur unwesentlich von dem in § 2, 6. verschieden und wird deshalb unterdrückt.

7. *Die Folge (s_n), deren Häufungspunkte in den Ecken eines konvexen p-Ecks liegen, ist zu keinem außerhalb $\mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)})$ liegenden Wert durch reguläre Matrizen einer Norm $N \leqq K$ limitierbar $(K \geqq 1)$.*

Wie in 6. wird (s_n) in p Teilfolgen $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ zerlegt. Ähnlich wie in § 2, 7. werden die Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}$ mit Hilfe dieser Zerlegung je in p absolut konvergente Reihen $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ geteilt, indem man $a_{n\nu} = a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ setzt, falls s_ν das λ-te Glied von $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ ist $(\varkappa = 1, 2, \ldots$ oder $p)$.

Aus $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right) \to z$ folgt dann

$$\frac{\sum_{\varkappa=1}^{p} a^{(\varkappa)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}}{\sum_{\varkappa=1}^{p} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}} \to z \quad \text{für } n \to \infty. \tag{21}$$

[5]) Wesentlich weitergehende Sätze dieser Art finden sich in E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journal für die reine und angewandte Mathematik **143** (1913), S. 128–175.

Induktionsvoraussetzung ist, daß eine Folge (s_n) mit den Häufungspunkten in den Ecken eines konvexen $(p-1)$-Ecks $a^{(1)} \dots a^{(p-1)}$ durch reguläre Matrizen der Norm $K\ (\geqq 1)$ genau zu den Punkten von $\mathfrak{M}^{(p-1)}(K; a^{(1)}, \dots, a^{(p-1)})$ limitierbar ist. In § 3 ist dies für $p = 4$ gezeigt.

Wir treffen nun die Einschränkung:

A. *Es existiere ein* $\delta > 0$, *so daß für eine Teilfolge der* n

$$\left| \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \right| \geqq \delta. \tag{22}$$

Man setzt

$$\zeta_n = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{p-1} a^{(\varkappa)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}}{\sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}} \quad \text{und} \quad q_n = \frac{\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(p)}}{\sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}} \tag{23}$$

und findet, nachdem Zähler und Nenner in (21) durch $\sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ dividiert sind, daß $\frac{\zeta_n + q_n}{1 + q_n}$ gegen z strebt.

(ζ_n) ist beschränkt, besitzt also einen Häufungspunkt ζ, dem in (1) ein Z zugewiesen ist. Diejenige Folge, die nach Aussonderung von $(\sigma_\lambda^{(p)})$ aus (s_n) übrig bleibt, nennt man (σ'_μ). Man setzt $a'_{n\mu} = \frac{a_{n\lambda}^{(\varkappa)}}{\sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}}$, falls σ'_μ das λ-te Glied von $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$. Da mit der Matrix $(a_{n\nu})$ auch $(a'_{n\mu})$ regulär ist und und da $\sum_{\mu=0}^{\infty} a'_{n\mu} \sigma'_\mu$ den Häufungspunkt ζ hat, ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(\varkappa)}|}{\left| \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{\mu=0}^{\infty} |a'_{n\mu}|}{\left| \sum_{\mu=0}^{\infty} a'_{n\mu} \right|} \geqq Z.$$

Wegen (21) besitzt auch $\frac{\zeta + q_n}{1 + q_n}$ den Häufungsqunkt z, und daraus folgt, daß q_n den Häufungspunkt $\frac{\zeta - z}{z - a^{(p)}}$ hat. Die Beziehung

$$\frac{\sum |a_{n\nu}|}{|\sum a_{n\nu}|} = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{p} \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(\varkappa)}|}{\left| \sum_{\varkappa=1}^{p} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \right|} \geqq \left(\frac{\sum |a'_{n\mu}|}{|\sum a'_{n\mu}|} + |q_n| \right) : (1 + q_n)$$

ergibt, wie man leicht erkennt, schließlich

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) \geqq \frac{Z\,|z - a^{(p)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(p)}|} > K. \tag{VII a}$$

B. *Strebt aber* $\sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \to 0$, *also* $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(p)} \to 1$ *für* $n \to \infty$, so wird

$$\varrho_n = \sum_{\varkappa=1}^{p-2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} = -\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(p-1)} + \varepsilon_n$$

gesetzt. (21) ist dann identisch damit, daß

$$\sum_{\varkappa=1}^{p-1} a^{(\varkappa)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \to z - a^{(p)}$$

strebt. Wir nehmen nun an, daß ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so daß für unendlich viele n $\varrho_n \geqq \delta$ ist. Dann kann durch ϱ_n dividiert, also

$$\varrho_n \left\{ \frac{\sum_{\varkappa=1}^{p-2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \cdot a^{(\varkappa)}}{\sum_{\varkappa=1}^{p-2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}} - a^{(p-1)} \right\} = z - a^{(p)} + \varepsilon_n$$

gesetzt werden. Die Folge der Brüche dieser Klammer ist beschränkt, besitzt also einen Häufungspunkt $\zeta^{(p-1)}$.

Falls $\zeta^{(p-1)} \neq a^{(p-1)}$, hat ϱ_n den Häufungspunkt $\frac{z - a^{(p)}}{\zeta^{(p-1)} - a^{(p-1)}}$.

Unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(\varkappa)}| + \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(p)}| \geqq |\varrho_n| \, (Z^{(p-1)} + 1) + 1 + \varepsilon_n',$$

also nach (b)

$$\text{(VIIb)} \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) \geqq \lim_{\zeta \to \infty} \frac{Z \, |z - a^{(p)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(p)}|} \geqq N^{(p)}(z) > K.$$

Falls aber $\zeta^{(p-1)} = a^{(p-1)}$, ist $z = a^{(p)}$. Dem Punkte $a^{(p)}$ ist in Erweiterung von (IV) die Konstante $N^{(p)}(z) = 1$ zugewiesen. Jede reguläre Matrix (also speziell jede, die (s_n) zum Werte $a^{(p)}$ limitiert) hat eine Norm $\geqq 1$, so daß die Behauptung auch in diesem Fall gilt.

Strebt aber ϱ_n gegen 0, so kann angenommen werden, daß wenigstens eine der Reihen $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ $(1 \leqq \varkappa \leqq (p-2))$ für unendlich viele n ihrem absoluten Wert nach $\geqq \delta > 0$ ist. Denn sonst wäre $z = a^{(p)}$, und man könnte genau so schließen wie oben.

Wir setzen nun dasjenige $a^{(\varkappa)}$, für welches unendlich oft $\left| \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \right| \geqq \delta > 0$ ist, gleich $b^{(p-1)}$, die übrigen Werte $a^{(1)}, \ldots, a^{(p-1)}$ der Reihe nach gleich $b^{(1)}, \ldots, b^{(p-2)}$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$\mathfrak{M}^{(p-1)}(K; a^{(1)}, \ldots, a^{(p-1)}) = \mathfrak{M}^{(p-1)}(K; b^{(1)}, \ldots, b^{(p-1)})$$

die Gesamtheit der Punkte, zu denen eine Folge mit den Häufungspunkten $a^{(1)}, \ldots, a^{(p-1)}$ vermittels regulärer Matrizen der Norm K limitierbar ist. z als äußerer Punkt von $\mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ ist auch äußerer Punkt von $\mathfrak{M}^{(p)}(K; b^{(1)}, \ldots, b^{(p-1)}, a^{(p)})$. Somit gilt

$$\text{(VIIc)} \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) > K.$$

Durch die Formeln (VII) ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Satz. *Ist* (s_n) *eine Folge, deren Häufungspunkte die Ecken eines konvexen* p*-Ecks* $a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(p)}$ $(p \geqq 3)$ *sind, so ist sie zu einem beliebigen Wert* $z^{(p)}$ *durch reguläre Matrizen jeder Norm* $N \geqq N^{(p)}(z^{(p)})$ *limitierbar, wo* $N^{(p)}(z^{(p)})$ *aus* (IV) *zu entnehmen ist. Keine reguläre Matrix geringerer Norm leistet dasselbe.*

8. Genau wie in § 2, 8. weist man nach, daß $\mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, \dots, a^{(p)})$ *von der Reihenfolge der* $a^{(\varkappa)}$ *unabhängig* ist und *ein konvexes abgeschlossenes Gebiet* darstellt.

§ 4.

(s_n) besitze den polygonalen Kern $\mathfrak{K}^{(p)}$.

Die Aussage, (s_n) besitze den polygonalen Kern $\mathfrak{K}^{(p)}$, bedeutet: Der kleinste konvexe Bereich, der sämtliche Häufungspunkte von (s_n) enthält, ist das Polygon $a^{(1)}\dots a^{(p)}$. Man zeigt leicht:

Besitzt (s_n) *einen polygonalen Kern mit der Ecke* a*, so ist* a *notwendig Häufungsstelle von* (s_n).

Wir betrachten nun eine Folge (s_n), deren *Kern das konvexe* p*-Eck* $\mathfrak{K}^{(p)} = a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(p)}$ $(p \geqq 2)$ ist; (s_n) habe aber neben den Eckpunkten von $\mathfrak{K}^{(p)}$ weitere Häufungspunkte. Ist $K \geqq 1$ gegeben, so ist (s_n) zu jedem Punkte des nach § 3, **1.** gebildeten Bereichs $\mathfrak{M}^{(p)}(K; \mathfrak{K}^{(p)}) = \mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, \dots, a^{(p)})$ durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar.

(σ'_μ) sei eine Teilfolge von (s_n), die genau die Häufungspunkte $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p)}$ hat. Nach dem Satze des § 3 gibt es eine reguläre Matrix $(a'_{n\mu})$ der Norm K, so daß, falls z zu $\mathfrak{M}^{(p)}$ gehört, $\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} a'_{n\mu}\sigma'_\mu\right)$ gegen z strebt. Setzt man

$$a_{n\nu} = \begin{cases} a'_{n\mu}, & \text{falls } s_\nu \text{ das } \mu\text{-te Glied von } (\sigma'_\mu) \text{ ist,} \\ 0, & \text{falls } s_\nu \text{ nicht zu } (\sigma'_\mu) \text{ gehört,} \end{cases}$$

so ist $(a_{n\nu})$ regulär, hat die Norm K, und $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu\right)$ strebt gegen z.

Wir zeigen noch: Wenn $(t_n) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu\right)$ gegen z strebt, hat die reguläre Matrix $(a_{n\nu})$ mindestens die Norm $N^{(p)}(z)$.

Es sei eine reguläre Matrix $(a_{n\nu})$ und eine außerhalb $\mathfrak{M}^{(p)}$ liegende Stelle z_0 bekannt, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu$ gegen z_0 für $n \to \infty$ strebt.

z_0 habe von $\mathfrak{M}^{(p)}$ den Abstand d. Für alle $|z - z_0| \leqq \frac{d}{2}$ ist dann

$$N^{(p)}(z) = \operatorname*{fin}_{(\zeta)} \frac{\mathsf{Z}\,|z-a^{(p)}| + |z-\zeta|}{|\zeta - a^{(p)}|} \geqq K + \delta \qquad (\delta > 0). \tag{1}$$

M sei irgendeine für hinreichend großes n gültige Schranke von $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|\right)$. Der Kern von (s_n) wird in ein achsenparalleles Quadrat eingeschlossen, dessen Rand von $\mathfrak{K}^{(p)}$ einen Abstand $\geqq \frac{d}{4}$ hat, hierauf dieses Quadrat durch Parallelen gleichen Abstands in Quadrate $\mathfrak{q}$ geteilt, deren Seitenlänge kleiner als $\frac{d}{8M}$ ist. Weiter sollen keine zwei der Werte $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ im selben Quadrat liegen.

Je eines der Quadrate, die den Punkt $a^{(\varkappa)}$ enthalten, wird markiert und $\mathfrak{q}_\varkappa$ genannt $(1 \leqq \varkappa \leqq p)$. In jedem weiteren, Punkte von $\mathfrak{K}^{(p)}$ enthaltenden Quadrat wird ein Punkt $a^{(\varkappa)}$ von $\mathfrak{K}^{(p)}$ willkürlich festgelegt $(p+1 \leqq \varkappa \leqq v)$. So erhalten wir insgesamt v Punkte. Alle Punkte, deren Abstand von $\mathfrak{K}^{(p)}$ nicht größer als $\frac{d}{4M}$ ist, lassen sich mit Hilfe eines geeigneten $a^{(\varkappa)}$ in der Form darstellen:

$$z = a^{(\varkappa)} + d^{(\varkappa)}, \quad \text{wo} \quad |d^{(\varkappa)}| < \frac{d}{2M}.$$

Von einer Nummer ν_0 ab sind sämtliche s_ν solche Punkte, also gilt dafür

$$s_\nu = a^{(\varkappa)} + d_\nu^{(\varkappa)} \quad \text{mit} \quad |d_\nu^{(\varkappa)}| < \frac{d}{2M}. \tag{2}$$

Bezeichnet man wieder $a_{n\nu}$ mit $a_{n\mu}^{(\varkappa)}$, falls s_ν das μ-te Glied der Folge (s_n) ist, das in (2) mit Hilfe von $a^{(\varkappa)}$ dargestellt ist, so ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu_0} a_{n\nu} s_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{v} a^{(\varkappa)} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu}^{(\varkappa)} + \sum_{\varkappa=1}^{v} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu}^{(\varkappa)} d_\mu^{(\varkappa)}.$$

Die Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{v} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu}^{(\varkappa)} d_\mu^{(\varkappa)}$ konvergiert absolut für jedes n, ihr Wert sei ϑ_n $\left(|\vartheta_n| < \frac{d}{2}\right)$. ϑ sei ein Häufungspunkt der Folge (ϑ_n). Demnach besitzt $\sum_{\varkappa=1}^{v} a^{(\varkappa)} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu}^{(\varkappa)}$ den Häufungswert $z_0 - \vartheta$. Nach § 3, (17) werden jetzt die $a^{(\varkappa)}$ $(p+1 \leqq \varkappa \leqq v)$ durch

$$a^{(\varkappa)} = \frac{\lambda_1^{(\varkappa)} a^{(1)} + \ldots + \lambda_\mu^{(\varkappa)} a^{(p)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_\mu^{(\varkappa)}} \qquad (\lambda_\pi^{(\varkappa)} \geqq 0;\ \lambda_1^{(\varkappa)} + \lambda_2^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)} > 0) \tag{3}$$

dargestellt. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{\varkappa=1}^{v} a^{(\varkappa)} \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' a_{n\mu}^{(\varkappa)} &= \sum_{\varkappa=1}^{v} \sum_{\pi=1}^{p} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)} a^{(\pi)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_\mu^{(\varkappa)}} \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' a_{n\mu}^{(\varkappa)} \\ &= \sum_{\pi=1}^{p} a^{(\pi)} \sum_{\varkappa=1}^{v} \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)} a_{n\mu}^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_\mu^{(\varkappa)}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir bilden nun eine Matrix (b_{nm}), indem wir unter Verwendung von (3) jede Spalte von $(a_{n\nu})$ in die p Spalten

$$\frac{\lambda_1^{(\varkappa)} a_{n\mu}^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)}+\ldots+\lambda_p^{(\varkappa)}}, \ldots, \frac{\lambda_p^{(\varkappa)} a_{n\mu}^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)}+\ldots+\lambda_p^{(\varkappa)}}$$

zerlegen. Man bestimmt hierauf die beiden ganzen Zahlen ν und π aus

$$m = p\cdot\nu + \pi - 1 \qquad (0 < \pi \leqq p),$$

dann $\varkappa$, mit dessen Hilfe s_ν in (2) dargestellt ist, und setzt

$$b_{nm} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)}+\ldots+\lambda_p^{(\varkappa)}} a_{n\mu}^{(\varkappa)}, & \text{falls } \nu > \nu_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5}$$

Wegen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \geqq \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} |a_{n\nu}| = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\sum_{\pi=1}^{p} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)}+\ldots+\lambda_p^{(\varkappa)}} |a_{n\mu}^{(\varkappa)}| = \sum_{m=0}^{\infty} |b_{nm}|$$

darf umgeordnet und zusammengefaßt werden. Man erkennt dann leicht, daß (b_{nm}) regulär ist und daß die Norm von (b_{nm}) gleich der von $(a_{n\nu})$ ist.

Nun wird eine Folge (s_m^*) mittels des oben bestimmten π festgelegt durch

$$s_m^* = \begin{cases} a^{(\pi)}, & \text{falls } \nu > \nu_0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6}$$

Die Reihen $\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} s_m^*$ konvergieren absolut, also ist beliebige Umordnung möglich und nach Konstruktion von (b_{nm})

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} s_m^* = \sum_{\pi=1}^{p} a^{(\pi)} \sum_{\varkappa=1}^{\nu}\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu}^{(\varkappa)} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)}+\ldots+\lambda_p^{(\varkappa)}}.$$

Wegen (4) besitzt $\sum b_{nm} s_m^*$ den Häufungspunkt $z_0 - \vartheta$. Auf (s_m^*) können wir den Satz des § 4 anwenden; unter Beachtung von (1) ergibt sich dann $\left(|\vartheta| \leqq \frac{d}{2}\right)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_{nm}|\right) \geqq K + \delta.$$

Damit ist bewiesen:

Satz. *Eine Folge (s_n) mit dem Kerne $\mathfrak{K}^{(p)}$ ist genau zu den Punkten der Menge $\mathfrak{M}^{(p)}(K; \mathfrak{K}^{(p)})$ durch reguläre Matrizen der Norm K $(K \geqq 1)$ limitierbar.*

Wir beweisen noch den

Satz. *Wenn der Kern $\mathfrak{K}^{(q)}$ im Kern $\mathfrak{K}^{(p)}$ liegt, d. h. jeder Punkt von $\mathfrak{K}^{(q)}$ auch Punkt von $\mathfrak{K}^{(p)}$ ist (p und q beide $\geqq 2$ ganz), dann liegt $\mathfrak{M}^{(q)}(K; \mathfrak{K}^{(q)})$ in $\mathfrak{M}^{(p)}(K; \mathfrak{K}^{(p)})$ $(K \geqq 1)$.*

Beweis. Besitzt (s_n) den Kern $\mathfrak{K}^{(q)}$ und ist z ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{M}^{(q)}(K; \mathfrak{K}^{(q)})$, so existiert eine reguläre Matrix (b_{nm}) der Norm K und eine Folge (s_m^*), die als Häufungspunkte die Ecken von $\mathfrak{K}^{(q)}$ hat, und es strebt $\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} s_m^*$ gegen z. Die Punkte $b^{(\varkappa)}$, die Eckpunkte von $\mathfrak{K}^{(q)}$, stellen wir jetzt nach § 3, (17) unter den dort genannten Voraussetzungen über die λ mit Hilfe der Eckpunkte $a^{(1)}, \ldots, a^{(p)}$ von $\mathfrak{K}^{(p)}$ dar als

$$b^{(\varkappa)} = \frac{\lambda_1^{(\varkappa)} a^{(1)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)} a^{(p)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq q).$$

Dann ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{q} b^{(\varkappa)} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{n\mu}^{(\varkappa)} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} s_m^* = \sum_{\pi=1}^{p} a^{(\pi)} \sum_{\varkappa=1}^{q} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}} b_{n\mu}^{(\varkappa)}.$$

Man bestimmt nun $\mu, \pi, \varkappa$ als ganze Zahlen aus m durch

$$m = pq \cdot \mu + p(\varkappa - 1) + (\pi - 1) \quad (0 < \pi \leqq p;\ 0 < \varkappa \leqq q)$$

und setzt

$$S_m^* = a^{(\pi)}; \qquad B_{nm} = \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}} b_{n\mu}^{(\varkappa)};$$

(B_{nm}) ist regulär. Wegen der Voraussetzung über die λ ist Umordnung möglich und

$$\sum_{m=0}^{\infty} |B_{nm}| = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=1}^{q} \sum_{\pi=1}^{p} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}} |b_{n\mu}^{(\varkappa)}| = \sum_{m=0}^{\infty} |b_{nm}|.$$

Weiterhin gilt, daß

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} S_m^* = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=1}^{q} \sum_{\pi=1}^{p} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}} a^{(\pi)} b_{n\mu}^{(\varkappa)} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} s_m^*$$

mit wachsendem n gegen z strebt. Also ist *eine* Folge und damit *jede* Folge mit dem Kerne $\mathfrak{K}^{(p)}$ zum Werte z mittels regulärer Matrizen der Norm K limitierbar. Jeder Punkt von $\mathfrak{M}^{(q)}$ ist demnach Punkt von $\mathfrak{M}^{(p)}$

§ 5.

Beliebige Kerne.

Die beschränkte divergente Folge (s_n) besitze den beliebigen nicht polygonalen Kern $\mathfrak{K}$. Dieser ist Grenzbereich polygonaler Gebiete[6]), d. h. es läßt sich eine Folge von Polygonen $\mathfrak{P}_n$ angeben, so daß nach Wahl von $\varepsilon > 0$ für alle hinreichend großen Nummern n der Abstand jedes

[6]) L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie I, 2. Aufl. 1921, S. 89.

Punktes des einen der Bereiche $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}_n$ vom andern Bereich kleiner als ε ist. Wir schreiben dies abgekürzt:

$$|\mathfrak{P}_n \mathfrak{K}| < \varepsilon, \quad \text{falls} \quad n > n_0(\varepsilon).$$

Aus $|\mathfrak{P}_n \mathfrak{K}| < \varepsilon$ und $|\mathfrak{P}_m \mathfrak{K}| < \varepsilon$ folgt $|\mathfrak{P}_n \mathfrak{P}_m| < 2\varepsilon$ (m und n fest).

Aus $|\mathfrak{P}_n \mathfrak{K}| < \varepsilon$ für $n > n_0$ folgt $|\mathfrak{P}_n \mathfrak{P}_{n+k}| < 2\varepsilon$ für $n > n_0$, $k \geqq 1$ ganz.

Wir ziehen nur solche Polygone in Betracht, deren Eckpunkte zu $\mathfrak{K}$ gehören. Wegen der Konvexität von $\mathfrak{K}$ sind diese Polygone echte Teilmengen von $\mathfrak{K}$. Folgen solcher Polygone nennen wir *innere Polygonfolgen von* $\mathfrak{K}$.

Wir bilden eine innere, $\mathfrak{K}$ approximierende Polygonfolge wie folgt: $\mathfrak{K}$ wird mit einem Netz von Quadraten der Seitenlänge $\frac{1}{n}$ (n positiv ganz) überdeckt, in jedem Quadrate, das Punkte von $\mathfrak{K}$ enthält, wird ein zu $\mathfrak{K}$ gehöriger Punkt markiert und der kleinste, diese Punkte umschließende konvexe Bereich bestimmt. So erhält man ein ganz in $\mathfrak{K}$ liegendes Polygon $\mathfrak{P}_n$, und es ist

$$|\mathfrak{P}_n \mathfrak{K}| < \frac{2}{n}.$$

Zu einer gegebenen, $\mathfrak{K}$ approximierenden, inneren Polygonfolge $(\mathfrak{P}_n)$ wird eine weitere innere Polygonfolge $(\mathfrak{P}^{(n)})$ bestimmt: $\{\mathfrak{p}_n\}$ sei die Menge der Eckpunkte von $\mathfrak{P}_n$; wir bilden

$$\{\mathfrak{p}_1\} + \{\mathfrak{p}_2\} + \ldots + \{\mathfrak{p}_n\}$$

und dann den kleinsten konvexen Bereich, der diese endlich vielen Punkte umschließt, ein Polygon $\mathfrak{P}^{(n)}$. $(\mathfrak{P}^{(n)})$ ist eine innere, $\mathfrak{K}$ approximierende Polygonfolge. Jedes Glied $\mathfrak{P}^{(n)}$ enthält die durch die vorangehenden Glieder der Folge gegebenen Bereiche. $\mathfrak{P}^{(n)}$ enthält auch $\mathfrak{P}_n$, und nach Wahl von $\varepsilon > 0$ ist n_0 angebbar, so daß

$$|\mathfrak{P}^{(n)} \mathfrak{K}| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > n_0(\varepsilon).$$

1. *Definition einer Punktmenge* $\mathfrak{M}(K; (\mathfrak{P}^{(n)}))$.

$K \geqq 1$ sei gegeben. Wir bestimmen die dem Polygon $\mathfrak{P}^{(n)}$ in den vorangehenden Paragraphen zugeordnete Menge $\mathfrak{M}^{(n)}(K; \mathfrak{P}^{(n)})$ (n braucht hier nicht die Eckenzahl von $\mathfrak{P}^{(n)}$ zu sein). Nach dem zweiten Satz des § 4 ist damit eine „monoton wachsende" Folge von Bereichen $\mathfrak{M}^{(n)}(K; \mathfrak{P}^{(n)})$ definiert. Diese Mengenfolge ist beschränkt, weil $\mathfrak{M}^{(n)}(K; \mathfrak{P}^{(n)})$ die Gesamtheit der Punkte darstellt, zu denen eine Folge mit dem Kerne $\mathfrak{P}^{(n)}$ durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar ist, und weil, wenn die Norm von $(a_{n\nu})$ nicht größer als K und wenn $|s_n| < M$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \right| \right) \leqq M \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) \leqq M \cdot K.$$

Also gibt es zu der Mengenfolge $(\mathfrak{M}^{(n)}(K; \mathfrak{P}^{(n)}))$ einen nach Hinzunahme der Randpunkte abgeschlossenen, konvexen beschränkten *Grenzbereich*[7]) $\mathfrak{M}(K; (\mathfrak{P}^{(n)}))$.

2. *Die Folge* (s_n) *mit dem Kerne* $\mathfrak{K}$ *ist zu jedem Werte* z *von* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(K; (\mathfrak{P}^{(n)}))$ *durch reguläre Matrizen der Norm* K *limitierbar.*

Jeder innere Punkt z von $\mathfrak{M}$ gehört ja samt einer δ-Umgebung $(\delta > 0)$ zu $\mathfrak{M}$, also enthalten die Gebiete $\mathfrak{M}^{(n)}$ hinreichend hoher Nummer den Punkt z mit einer vollen $\frac{\delta}{2}$-Umgebung im Innern. Der Folge (s_n) wird jetzt $(s_n^{(\varkappa)})$ zugeordnet: $\varepsilon_\varkappa > 0$ sei zunächst fest. Fast alle Glieder von (s_n) haben von $\mathfrak{K}$ einen Abstand kleiner als $\frac{\varepsilon_\varkappa}{4K}$. Also gilt für $\nu \geqq \nu_\varkappa$

(1) $s_\nu = a_m + \varepsilon_\nu^{(\varkappa)}$, wo $|\varepsilon_\nu^{(\varkappa)}| < \frac{\varepsilon_\varkappa}{2K}$ und a_m Punkt, möglichst Ecke von $\mathfrak{P}^{(n_k)}$.

Mit Hilfe dieses $\varepsilon_\nu^{(\varkappa)}$ definiert man $s_\nu^{(\varkappa)}$ durch

$$(2) \qquad s_\nu^{(\varkappa)} = \begin{cases} s_\nu - \varepsilon_\nu^{(\varkappa)}, & \text{falls } \nu \geqq \nu_\varkappa, \\ 0 \quad , & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Folge ist zu jedem Werte von $\mathfrak{M}^{(n_\varkappa)}$ durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar, also gibt es eine reguläre Matrix $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ der Norm K, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu^{(\varkappa)}$ gegen z strebt. Weiter gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu_\varkappa - 1} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu + \sum_{\nu=\nu_k}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu^{(\varkappa)} + \sum_{\nu=\nu_\varkappa}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} \varepsilon_\nu^{(\varkappa)}$$

besitzt den Häufungspunkt $z + \varepsilon^{(\varkappa)} \left(|\varepsilon^{(\varkappa)}| < \frac{\varepsilon_\varkappa}{2} \right)$. Mit $\varepsilon_\varkappa \to 0$ strebt aber auch $\varepsilon^{(\varkappa)}$ gegen Null. Ähnlich wie in § 2, 6. zeigt man nun, daß es eine reguläre Matrix $(a_{n\nu})$ der Norm K gibt, für die

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \right) = z$$

ist, w. z. b. w.

Ist jedoch z Randpunkt von $\mathfrak{M}$, so bestimmen wir eine gegen z strebende Folge innerer Punkte $z_\varkappa$ von $\mathfrak{M}$. Zu jedem $z_\varkappa$ gibt es eine reguläre Matrix $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ der Norm K, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu$ gegen $z_\varkappa$ strebt; genau wie oben folgt dann, daß es auch eine reguläre Matrix $(a_{n\nu})$ derselben Norm gibt, mit deren Hilfe (s_n) zum Werte z limitierbar ist.

3. *Ist* $(a_{n\nu})$ *eine reguläre Matrix,* $\mathfrak{K}$ *der Kern von* (s_n), z *äußerer Punkt von* $\mathfrak{M}(K; \mathfrak{K})$ *und strebt* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ *gegen* z, *so ist die Norm von* $(a_{n\nu})$ *größer als* K.

[7]) L. Bieberbach, a. a. O.

Denn hat z den Abstand d von $\mathfrak{M}(K;(\mathfrak{P}^{(n)}))$, so enthält die $\frac{d}{2}$-Umgebung von z nur äußere Punkte von $\mathfrak{M}(K;(\mathfrak{P}^{(n)}))$. $(s_\nu^{(\varkappa)})$ sei wie oben für ein festes $\varepsilon_\varkappa$ in $0<\varepsilon_\varkappa<\frac{d}{2M}$ gebildet. Dann strebt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu=\sum_{\nu=0}^{\nu_\varkappa-1} a_{n\nu}s_\nu+\sum_{\nu=\nu_\varkappa}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu^{(\varkappa)}+\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\varepsilon_\nu^{(\varkappa)}$$

gegen z. Für eine Teilfolge der n ist somit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu^{(\varkappa)}\right)=z-\varepsilon^{(\varkappa)};\qquad |\varepsilon^{(\varkappa)}|<\frac{d}{2}.$$

$z-\varepsilon^{(\varkappa)}$ liegt samt einer $\frac{d}{2}$-Umgebung im Äußern von $\mathfrak{M}(K;(\mathfrak{P}^{(n)}))$ und von jedem $\mathfrak{M}^{(n)}(K;\mathfrak{P}^{(n)})$. Auf $(a_{n\nu})$ und $(s_\nu^{(\varkappa)})$ kann der erste Satz des § 4 angewandt werden, also ist die Norm dieser Matrix größer als K, da $(s_\nu^{(\varkappa)})$ den polygonalen Kern $\mathfrak{P}^{(n_\varkappa)}$ besitzt.

$\mathfrak{M}(K;(\mathfrak{P}^{(n)}))$ stellt somit genau die Werte dar, zu denen (s_n) durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar ist, ist demnach unabhängig von der speziellen Wahl der Polygonfolge $(\mathfrak{P}^{(n)})$.

Für $K=1$ ist $\mathfrak{M}$ identisch mit dem Kerne $\mathfrak{K}$, d. h. die Punkte von $\mathfrak{K}$ machen genau die Werte aus, zu denen eine Folge (s_n) mit dem Kern $\mathfrak{K}$ durch reguläre Matrizen der Norm 1 limitierbar ist.

4. $\mathfrak{M}(K;\mathfrak{K})$ *liegt total in* $\mathfrak{M}'(K';\mathfrak{K})$, *falls* $1\leqq K<K'$.

z_0 sei irgendein Punkt von $\mathfrak{M}(K)$, dann gibt es eine reguläre Matrix $(a_{n\nu})$ der Norm K, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu$ gegen z_0 strebt. $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ seien zwei verschiedene Häufungspunkte von (s_n). Durch Wahl von r und φ ist dann jedes z in der Form

$$z=z_0+r\cdot e^{i\varphi}\cdot\frac{1}{a^{(1)}-a^{(2)}}$$

darstellbar. Nun bestimmt man in der n-ten Zeile von $(a_{n\nu})$ zwei Glieder $a_{n\nu_{1n}}$ und $a_{n\nu_{2n}}$, deren Absolutbetrag kleiner als $\frac{1}{n}$, deren zweite Indizes größer als n und so beschaffen sind, daß

$$|s_{\nu_{1n}}-a^{(1)}|<\frac{1}{n}\quad\text{und}\quad|s_{\nu_{2n}}-a^{(2)}|<\frac{1}{n}$$

ist. Diese beiden Glieder werden ersetzt durch

$$a^*_{n\nu_{1n}}=r\cdot e^{i\varphi}\frac{1}{a^{(1)}-a^{(2)}}\quad\text{und}\quad a^*_{n\nu_{2n}}=-r\cdot e^{i\varphi}\frac{1}{a^{(1)}-a^{(2)}},$$

wo r und φ noch zu bestimmende Werte sind. Die umgeformte Matrix ist regulär, und ihre Norm ist $K+\frac{2r}{|a^{(1)}-a^{(2)}|}$. Da nach den Voraus-

setzungen über $(a_{n\nu})$, ν_{1n} und ν_{2n} die Folge $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{*} s_\nu$ gegen $z_0 + re^{i\varphi}$ strebt, ist (s_n) zu jedem Punkte von

$$|z - z_0| \leqq (K' - K) \frac{|a^{(1)} - a^{(2)}|}{2}$$

durch reguläre Matrizen der Norm K' limitierbar. Nach Definition von $\mathfrak{M}'(K'; \mathfrak{K})$ ist also z innerer Punkt dieser Menge $\mathfrak{M}'$; das war aber die Behauptung.

5. *Jedem Punkte z ist nach Angabe eines Kerns $\mathfrak{K}$ eine Konstante $N(z) \geqq 1$ zugeordnet, so daß jede Folge (s_n) mit dem Kerne $\mathfrak{K}$ durch reguläre Matrizen der Norm $N(z)$ zu diesem Werte limitierbar ist und keine reguläre Matrix geringerer Norm dasselbe leistet. Für Punkte von $\mathfrak{K}$ ist $N(z) = 1$.*

$N(z)$ wird gefunden, indem man zu den Gliedern $\mathfrak{P}^{(n)}$ einer wie oben konstruierten inneren, $\mathfrak{K}$ approximierenden Polygonfolge die durch die Sätze der vorangehenden Paragraphen eindeutig bestimmten Konstanten $N^{(n)}(z)$ festlegt. Der Polygonfolge $(\mathfrak{P}^{(n)})$ entspricht eine monoton fallende Zahlenfolge $(N^{(n)}(z))$ mit der unteren Schranke 1. Und zwar ist $N^{(n+1)}(z) \leqq N^{(n)}(z)$ weil $\mathfrak{P}^{(n)}$ in $\mathfrak{P}^{(n+1)}$, also $\mathfrak{M}^{(n)}(N^{(n)}(z); \mathfrak{P}^{(n)})$ in $\mathfrak{M}^{(n+1)}(N^{(n)}(z); \mathfrak{P}^{(n+1)})$ liegt. Somit existiert

$$\lim_{n \to \infty} N^{(n)}(z) = N(z).$$

Daß dieser Limes von der Wahl der inneren Polygonfolge nicht abhängt, werden wir später zeigen. Zunächst beweisen wir:

a) *Es gibt eine reguläre Matrix der Norm $N(z)$, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ gegen z strebt.*

Für $n \geqq n_\varkappa$ ist

$$|\mathfrak{P}^{(n)} \mathfrak{K}| < \frac{1}{2 \cdot \varkappa \cdot N(z)}.$$

Man bestimmt wie früher zu (s_n) eine Folge $(s_\nu^{(\varkappa)})$ mit dem Kerne $\mathfrak{P}^{(n_\varkappa)}$, weiterhin die Konstante $N^{(\varkappa)}(z)$, die dem Punkte z und dem Polygon $\mathfrak{P}^{(n_\varkappa)}$ in § 3, (IV) zugewiesen ist, und setzt unter Benutzung eines $\delta_\varkappa \geqq 0$

$$N^{(\varkappa)}(z) = N(z) + \delta_\varkappa \qquad (\delta_\varkappa \to 0 \text{ für } \varkappa \to \infty).$$

Nach dem ersten Satze des § 4 gibt es eine reguläre Matrix $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ der Norm $N^{(\varkappa)}(z)$, für die $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu^{(\varkappa)}$ gegen z strebt, also hat

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu_\varkappa - 1} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu + \sum_{\nu=\nu_\varkappa}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu^{(\varkappa)} + \sum_{\nu=\nu_\varkappa}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} \varepsilon_\nu^{(\varkappa)}$$

den Häufungspunkt $z + \varepsilon^{(\varkappa)} \left(\varepsilon^{(\varkappa)} < \frac{1}{2\varkappa}\right)$. In der genannten Matrix $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$

denken wir uns durch eventuelles Streichen von Zeilen erreicht, daß für die $\varkappa$-te Zeile folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

1. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\varkappa\nu}^{(\varkappa)} - 1\right| < \frac{1}{\varkappa}$; 2. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\varkappa\nu}^{(\varkappa)}| - N^{(\varkappa)}(z)\right| < \frac{1}{\varkappa} + \delta_{\varkappa}$;

3. $|a_{\varkappa\nu}^{(\varkappa)}| < \frac{1}{\varkappa}$, falls $\nu \leqq \varkappa$; 4. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\varkappa\nu}^{(\varkappa)} s_\nu - (z + \varepsilon^{(\varkappa)})\right| < \frac{1}{\varkappa}$.

Schließlich bildet man die Matrix $(a_{\varkappa\nu})$, deren $\varkappa$-te Zeile die eben genannte $\varkappa$-te Zeile von $(a_{\varkappa\nu}^{(\varkappa)})$ ist; diese leistet das Verlangte.

b) *Ist $(a_{n\nu})$ regulär, (s_n) eine Folge mit dem Kerne $\mathfrak{K}$ und strebt $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ gegen z, so ist die Norm von $(a_{n\nu})$ nicht kleiner als $N(z)$.*

Ist $N(z) = 1$, so ist nichts zu zeigen. $N(z)$ wird also größer als 1 gedacht.

ζ sei ein fester Punkt, $(b_{n\nu})$ sei regulär und habe eine Norm kleiner als $N(z)$. $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu} s_\nu\right)$ strebe gegen ζ. ζ ist dann innerer Punkt von $\mathfrak{M}(N(z))$, somit auch innerer Punkt aller $\mathfrak{M}^{(n)}(N(z); \mathfrak{P}^{(n)})$ hinreichend hoher Nummer n, wenn $\mathfrak{P}^{(n)}$ dieselbe Bedeutung wie früher hat.

Da $N^{(n)}(z) \geqq N(z)$, kann z als Randpunkt von jedem $\mathfrak{M}^{(n)}(N^{(n)}(z); \mathfrak{P}^{(n)})$ nicht innerer Punkt des für $N(z)$ bestimmten Bereichs $\mathfrak{M}^{(n)}(N(z); \mathfrak{P}^{(n)})$ also auch nicht innerer Punkt des Grenzbereichs $\mathfrak{M}(N(z))$ sein. z ist demnach von jedem ζ der genannten Art verschieden; die Norm regulärer Matrizen, mit deren Hilfe (s_u) zum Werte z limitierbar ist, ist somit mindestens $N(z)$.

Nach a) und b) ist die Konstante $N(z)$ auch dadurch eindeutig bestimmt, daß sie die untere Grenze der Normen aller regulärer Matrizen $(a_{n\nu})$ angibt, für die $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ gegen z strebt. $N(z)$ hängt deshalb von der Polygonfolge $(\mathfrak{P}^{(n)})$ nicht ab.

Da demnach $\mathfrak{M}(1) \equiv \mathfrak{K}$, kommt jedem äußeren Punkte von $\mathfrak{K}$ ein $N(z) > 1$ zu.

Insgesamt ist damit bewiesen:

Hauptsatz I. *Ist (s_n) eine beschränkte divergente Folge mit dem Kerne $\mathfrak{K}$, so ist sie zu einem beliebig vorgegebenen Werte z durch reguläre Matrizen jeder Norm $N \geqq N(z)$ limitierbar, wenn $N(z)$ definiert ist als*

$$\frac{|z - a^{(1)}| + |z - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|},$$ *falls $\mathfrak{K}$ die Strecke $a^{(1)} \ldots a^{(2)}$,*

$$\inf_{(\zeta)} \frac{Z\,|z - a^{(p)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(p)}|},$$ *falls $\mathfrak{K}$ das konvexe Polygon $a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(p)}$,*

und, wenn $\mathfrak{K}$ eine andere Gestalt hat, unter Zuhilfenahme einer inneren, $\mathfrak{K}$ approximierenden Polygonfolge, als

$$\lim_{n\to\infty} N^{(n)}(z) = N(z).$$

Keine reguläre Matrix geringerer Norm leistet dasselbe. Für Punkte von $\mathfrak{K}$ ist $N(z) = 1$, für äußere Punkte von $\mathfrak{K}$ ist $N(z) > 1$.

Daraus ziehen wir sofort als Folgerung:

Hauptsatz II. *(s_n) sei eine beschränkte divergente Folge mit dem Kerne $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{A}$ eine beschränkte, abgeschlossene, nicht leere Menge. Die obere Grenze der für die Elemente z von $\mathfrak{A}$ bestimmten $N(z)$ sei N^* genannt. Dann lassen sich reguläre Matrizen $(a_{n\nu})$ jeder Norm $N \geqq N^*$ so angeben, daß die Transformationen von (s_n) genau die Punkte von $\mathfrak{A}$ zu Häufungspunkten haben. Keine reguläre Matrix geringerer Norm leistet dasselbe.*

Beweis. Jede Menge $\mathfrak{A}$ ist Summe einer höchstens abzählbaren Menge $\mathfrak{Z}$ und deren Ableitung. Nach dem Hauptsatze I gibt es zu jedem Element $z^{(\varkappa)}$ von $\mathfrak{Z}$ eine reguläre Matrix $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ der Norm N^*, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu$ gegen $z^{(\varkappa)}$ strebt. Durch Streichen von Zeilen sei erreicht, daß für die n-te Zeile von $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ gilt

1. $|a_{n\nu}^{(\varkappa)}| < \frac{1}{n}$ für $\nu \leqq n$;
2. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}^{(\varkappa)}| - N^*\right| < \frac{1}{n}$;
3. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} - 1\right| < \frac{1}{n}$;
4. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu - z^{(\varkappa)}\right| < \frac{1}{n}$.

Als n-te Zeile von $(a_{n\nu})$ wird die n-te Zeile von $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ genommen, wo $\varkappa$ noch zu bestimmen ist. Zu diesem Zweck wird erst die natürliche Zahl m festgelegt, für die

$$m(m-1) \leqq 2n < m(m+1)$$

und dann, je nachdem $\mathfrak{Z}$ eine endliche Menge von k Elementen oder eine unendliche Menge ist,

$$\varkappa \equiv n - \frac{m(m-1)}{2} \pmod{k} \quad \text{bzw.} \quad \varkappa = n - \frac{m(m-1)}{2}$$

gesetzt. Die so konstruierte Matrix $(a_{n\nu})$ ist regulär, hat die Norm N^*, und die Folge mit den Gliedern $t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ hat sämtliche Punkte von $\mathfrak{A}$ zu Häufungspunkten.

Denn in $(a_{n\nu})$ kommen aus jeder Matrix $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ unendlich viele Zeilen zur Verwendung, nämlich alle, deren Nummer von der Form $n = \varkappa + \frac{m(m-1)}{2}$ ist, wo m eine natürliche Zahl größer als $\varkappa$ ist. Also ist jeder Punkt von $\mathfrak{Z}$ und damit auch jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ Häufungspunkt von (t_n). — Weiter gilt:

Kein äußerer Punkt ζ von $\mathfrak{A}$ ist Häufungspunkt von (t_n), da ζ von jedem $z^{(\varkappa)}$ einen Abstand $\geqq \delta > 0$ hat.

Noch ist zu zeigen, daß jede reguläre Matrix $(a_{n\nu})$, die das Verlangte leistet, mindestens die Norm N^* hat. Weil $\mathfrak{A}$ abgeschlossen, gibt es einen Punkt z^* von $\mathfrak{A}$, für den $N(z^*) = N^*$ ist. Hat nun $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ den Häufungspunkt z^*, so gibt es eine Teilfolge $(t_n^*) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^* s_\nu\right)$, die gegen z^* strebt. Da $(a_{n\nu}^*)$ mit $(a_{n\nu})$ regulär ist, so kann Hauptsatz I angewandt werden, die Norm von $(a_{n\nu}^*)$ ist also nicht kleiner als $N(z)$, somit

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|\right) \geqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}^*|\right) \geqq N^*,$$

w. z. b. w.

In dem Hauptsatze II ist enthalten:

Ist (s_n) eine beschränkte divergente Folge mit dem Kerne $\mathfrak{K}$, $(a_{n\nu})$ eine reguläre Matrix der Norm $K \geqq 1$, so liegt der Kern von $(t_n) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ stets in $\mathfrak{M}(K; \mathfrak{K})$.

Für $K = 1$ erhält man den auf Matrizen spezialisierten *Kernsatz von Knopp*[8]) mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

Ist $(a_{n\nu})$ eine reguläre Matrix, (s_n) eine beschränkte divergente Folge mit dem Kerne $\mathfrak{K}$, so ist notwendig und hinreichend dafür, daß der Kern $\mathfrak{K}$ den Kern der Folge $(t_n) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ enthält,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = 1.$$

Teilbereiche der in Frage stehenden Mengen $\mathfrak{M}(K; \mathfrak{K})$ können gefunden werden, indem man Punktepaare $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ auswählt, die zu $\mathfrak{K}$ gehören, und die Ellipsen

$$\frac{|z - a^{(1)}| + |z - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|} \leqq K; \quad a^{(1)} + a^{(2)}$$

bestimmt. Der kleinste, diese Ellipsen umschließende konvexe Bereich besteht dann nur aus Werten, zu denen (s_n) durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar ist.

Leider ergab sich in den vorliegenden Untersuchungen für den Fall, daß $K > 1$ und $\mathfrak{K}$ nicht eine Strecke $a^{(1)} \ldots a^{(2)}$ ist, keine parameterfreie Darstellung der Bereiche $\mathfrak{M}$. Voll befriedigend ist nur noch der Fall, daß $\mathfrak{K}$ ein Kreis ist.

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{k} : |z - z_0| \leqq r; \; r > 0.$$

[8]) K. Knopp, a. a. O.

Besitzt (s_n) den Kern $\mathfrak{k}$, ist also $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|s_\nu - z_0| = r$, ist weiter $(a_{n\nu})$ regulär und von der Norm $K \geqq 1$ und hat $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ den Häufungspunkt z, so hat $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(s_\nu - z_0)$ den Häufungswert $z - z_0$; dann ist

$$|z - z_0| \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(s_\nu - z_0) \right| \leqq r K,$$

z somit im Kreise

$$\mathfrak{k}' : |z - z_0| \leqq r K$$

gelegen. (s_n) ist aber zu jedem Randpunkte z' dieses Kreises durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar, denn z' ist Randpunkt der Ellipse

$$\frac{\left|z - z_0 - \frac{1}{K}(z_0 - z')\right| + \left|z - z_0 + \frac{1}{K}(z_0 - z')\right|}{2\,|z_0 - z'|} \leqq 1,$$

wie man durch Einsetzen erkennt, also schon jede Teilfolge von (s_n) mit den Häufungspunkten $z_0 + \frac{z_0 - z'}{K}$ und $z_0 - \frac{z_0 - z'}{K}$ zum Werte z' limitierbar.

(s_n) mit dem Kerne $\mathfrak{k}$ ist demnach genau zu den Punkten von $\mathfrak{k}'$ durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar, d. h.

$$\mathfrak{k}' \equiv \mathfrak{M}(K; \mathfrak{k}).$$

(Eingegangen am 22. Juni 1931.)

Die Metrik im polaren F^2-Gebüsche einer linearen Strahlenkongruenz.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

In der in dieser Zeitschrift, Bd. 33 veröffentlichten Arbeit „Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz“ wurde die projektive Theorie der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 aus der projektiven Theorie ihres polaren F^2-Gebüsches und ihres polaren Γ-Gebüsches entwickelt. Mit der vorliegenden Arbeit dagegen beginnt die Entwicklung der metrischen Theorie der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 aus der metrischen Theorie des polaren F^2-Gebüsches dieser Kongruenz.

Das Gebüsch der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung enthält bekanntlich einen Büschel gleichseitiger Paraboloide. Diesem „Durchmesser-F^2-Büschel“ der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ordnet die Korrelation des polaren F^2-Gebüsches von C_1^1 den „Antidurchmesser-F^2-Büschel“ der Kongruenz als Polare zu. Daraus ergibt sich eine Fülle neuer Eigenschaften der linearen Kongruenz. Insbesondere erhalten die Antidurchmesser-F^2-Büschel der hyperbolischen und elliptischen wie auch der bzw. von ihnen umfaßten orthogonalen und rotatorischen Kongruenzen so charakteristische Merkmale, daß sich hiernach die linearen Kongruenzen übersichtlich unterscheiden lassen.

Wie schon Reye in seinem Berichte über die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 bemerkt hat (Die Geometrie der Lage, zweite Abteilg., vierte Aufl., 1907, S. 287—293), sind die Symmetrieebenen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung Tangentenebenen des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1. Umgekehrt ist aber, wie sich nunmehr zeigt, jede Tangentenebene der Fläche C^2 eine gemeinsame Symmetrieebene eines Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung. Die Theorie dieser F^2-Büschel gestattet einen tiefen Einblick in das Bildungsgesetz der linearen Strahlenkongruenz. Sie führt unmittelbar zu der neuen anschaulichen Konstruktion des Hauptachsenkomplexes Γ^2 eines Gebüsches

linearer Strahlenkomplexe als Ort der Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung. Für diese Konstruktion erweist sich auch hier das Zylindroid C^3 als Träger der Hauptachsen eines Büschels linearer Komplexe von besonderer Bedeutung. Letztere Grundeigenschaft von C^3 wird jedoch, um die Einheitlichkeit in der Beweisführung zu wahren, aus der Theorie der linearen Strahlenkongruenz hergeleitet und nicht wie üblich aus der Theorie der linearen Komplexe. Ein Weg, der außerdem geeignet erscheint, die Theorie des Γ-Büschels anschaulicher zu gestalten. Jeder der Abschnitte A bis D ist der hyperbolischen und elliptischen, der Abschnitt E der parabolischen linearen Strahlenkongruenz gewidmet.

Behandelt werden nicht ausgeartete lineare Kongruenzen mit je einem Paare getrennter oder vereinigter (reellen oder konjugiert imaginären) eigentlichen Leitgeraden. Die in den Beweisen verwandten imaginären Flächen zweiter Ordnung haben reelle polare Räume. Das gleiche gilt für die Trägerflächen der in den Beweisen auftretenden imaginären Regelscharen zweiter Ordnung.

A. Die Durchmesserparaboloide und die Antidurchmesserflächen einer linearen Strahlenkongruenz.

1. Durch den unendlich fernen Strahl c_∞ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 und den ihn rechtwinklig kreuzenden Kongruenzstrahl c_d gehen bekanntlich die einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide. Sie bilden einen F^2-Büschel, dessen Basiskurve aus den Kongruenzstrahlen c_d, c_∞ und aus den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 besteht.

Auf jedem einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide $\mathfrak{X}^2$ liegt außer dem Kongruenzstrahle c_∞ noch je ein zweiter mit dem unendlich fernen Punkte C'_∞ von c_d inzidenter unendlich ferner Strahl $\mathfrak{x}'_\infty$. Die Strahlen $\mathfrak{x}'_\infty$ bilden einen zum Büschel der einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide perspektiven Strahlenbüschel erster Ordnung $C'_\infty(\mathfrak{x}'_\infty)$. Diesem Strahlenbüschel ist in dem geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 der mit dessen Fluchtebene γ und dessen Mittelpunkte C inzidente zum Büschel gleichseitiger Paraboloide perspektive Strahlenbüschel erster Ordnung $C(\mathfrak{x}) \equiv (C\gamma)$ zugeordnet. Durch je zwei in Σ_{ig} einander zugeordnete Strahlen der beiden Strahlenbüschel $C(\mathfrak{x})$, $C'_\infty(\mathfrak{x}'_\infty)$ geht ein einscharig in C_1^1 enthaltenes gleichseitiges Paraboloid. Greifen wir das durch ein gegebenes Strahlenpaar $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}'_{\infty 1}$ gehende einscharig in C_1^1 enthaltene gleichseitige Paraboloid ${}^1\mathfrak{X}^2$ heraus, so sind die Strahlen von C_1^1 paarweise für ${}^1\mathfrak{X}^2$ reziprok polar[1]), und jedes dieser Paare trennt die auf ${}^1\mathfrak{X}^2$ gelegenen Paare in Σ_{ig} einander zugeordneter Strahlen und somit auch das Strahlenpaar $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}'_{\infty 1}$ harmonisch. Jedes Paar für das gleichseitige Paraboloid ${}^1\mathfrak{X}^2$ reziprok polarer

[1]) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1856, Nr. 105.

Strahlen von C_1^1 ist hiernach ein Paar einander zugeordneter Strahlen in dem geschart involutorischen Raume der axial translatorischen Strahlenkongruenz[2]) mit den beiden Leitgeraden $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}'_{\infty 1}$. Durch die Korrelation des polaren Raumes von ${}^1\mathfrak{X}^2$ werden in anderen Worten die Strahlen der linearen Kongruenz C_1^1 analog gepaart wie die Punkte eines Kegelschnittes durch die einem seiner Durchmesser konjugierten Strahlen. Mit Rücksicht hierauf bezeichne ich die ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide als die „Durchmesserparaboloide" oder die „Durchmesserflächen" und den von ihnen gebildeten F^2-Büschel als den „Durchmesser-F^2-Büschel" der linearen Strahlenkongruenz.

Sind die zwei Strahlen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ unseres in der Fluchtebene γ von Σ_{ig} gelegenen zum Durchmesser-F^2-Büschel perspektiven Strahlenbüschels erster Ordnung $C(\mathfrak{x})$ bzw. mit den in Σ_{ig} einander zugeordneten Punkten $\mathfrak{X}_{\infty 1}$, $\mathfrak{X}_{\infty 2}$ des unendlich fernen Strahles c_∞ von C_1^1 inzident, und sind ${}^1\mathfrak{X}^2$, ${}^2\mathfrak{X}^2$ die bzw. durch $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ gehenden Durchmesserparaboloide, so ist der Strahl $\mathfrak{x}_2$ und der unendlich ferne ihm in Σ_{ig} zugeordnete Strahl $\mathfrak{x}'_{\infty 2}$ inzident mit den beiden in Σ_{ig} einander zugeordneten auf dem gleichseitigen Paraboloide ${}^1\mathfrak{X}^2$ gelegenen Strahlen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}'_{\infty 1}$. Die Strahlen $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}'_{\infty 2}$ sind demnach für diese Fläche reziprok polar, somit auch paarweise die mit diesem Strahlenpaare inzidenten Strahlen von C_1^1. Alle mit $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}'_{\infty 2}$ inzidenten Kongruenzstrahlen bilden aber eine Regelschar von ${}^2\mathfrak{X}^2$. Folglich ist das Durchmesserparaboloid ${}^2\mathfrak{X}^2$ autopolar für das Durchmesserparaboloid ${}^1\mathfrak{X}^2$. Werden je zwei Strahlen des Strahlenbüschels $C(\mathfrak{x})$ einander zugeordnet, die bzw. auf füreinander autopolaren Durchmesserparaboloiden von C_1^1 liegen, so sind die Strahlen von $C(\mathfrak{x})$ involutorisch gepaart. Der erhaltene involutorische Strahlenbüschel ist perspektiv zu der vom unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ in Σ_{ig} getragenen Punktinvolution. Jede der beiden Achsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ dieser Strahleninvolution bildet mit dem c_∞ rechtwinklig kreuzenden Kongruenzstrahle c_d bzw. die Scheitelstrahlen eines Durchmesserparaboloides ${}^1F^2$, ${}^2F^2$. Oder:

Der von den einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloiden gebildete Durchmesser-F^2-Büschel der Kongruenz wird von der Fluchtebene des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 außer in dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ noch in einem zum F^2-Büschel perspektiven vom Kongruenzmittelpunkte C ausstrahlenden Strahlenbüschel erster Ordnung $C(\mathfrak{x})$ geschnitten. Je zwei Strahlen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ des Strahlenbüschels $C(\mathfrak{x})$, die in Σ_{ig} einander zugeordnete Punkte von c_∞ enthalten, sind bzw. mit zwei füreinander autopolaren Durchmesserpara-

[2]) Jolles, Die Involutionen auf einer linearen Strahlenkongruenz, Math. Zeitschr. 27 (1927), Nr. 22.

boloiden ${}^1\mathfrak{X}^2$, ${}^2\mathfrak{X}^2$ *von* C_1^1 *inzident. Zwei füreinander autopolare Durchmesserparaboloide sind insbesondere die beiden einscharig in* C_1^1 *gelegenen gleichseitigen Paraboloide* ${}^1F^2$, ${}^2F^2$, *deren in* C_1^1 *gelegene Regelstrahlen bzw. die Achsen* $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ *der von den Strahlenpaaren* $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ *gebildeten Strahleninvolution senkrecht schneiden. Das Paraboloid* ${}^1F^2$ *hat* $\mathfrak{c}_2$, *das Paraboloid* ${}^2F^2$ *hingegen* $\mathfrak{c}_1$ *zur Hauptachse.*

Wie oben nachgewiesen wurde, sind je zwei für ein Durchmesserparaboloid ${}^1\mathfrak{X}^2$ reziprok polare Strahlen von C_1^1 in dem geschart involutorischen Raume einer axial translatorischen linearen Strahlenkongruenz einander zugeordnet. Sie hat zu Leitgeraden den auf ${}^1\mathfrak{X}^2$ gelegenen Strahl $\mathfrak{x}_1$ des Strahlenbüschels erster Ordnung $(C\gamma)$ und den ihm in Σ_{ig} zugeordneten unendlich fernen Strahl $\mathfrak{x}'_{\infty 1}$. Diese axial translatorische lineare Kongruenz geht bei den beiden gleichseitigen Durchmesserparaboloiden ${}^1F^2$, ${}^2F^2$ in eine solche mit bzw. einander rechtwinklig kreuzenden Leitgeraden $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_{\infty 1}$ und $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_{\infty 2}$ über. Mit Rücksicht hierauf bezeichnen wir die beiden Durchmesserparaboloide ${}^1F^2$, ${}^2F^2$ als die „Achsenparaboloide" der linearen Kongruenz C_1^1.

Zur Basiskurve hat der Durchmesser-F^2-Büschel ein aus den einander rechtwinklig kreuzenden Kongruenzstrahlen c_∞, c_d und den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 gebildetes einfaches Raumvierseit. Er enthält zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) zerfallene gleichseitige Paraboloide. Ihre Doppelpunktgeraden sind bzw. die zu u, v parallelen (reellen oder konjugiert imaginären) für alle gleichseitigen Durchmesserparaboloide reziprok polaren Kongruenzstrahlen u', v'.

Die in C_1^1 enthaltene Regelschar des einen der beiden zerfallenen gleichseitigen Durchmesserparaboloide bildet der Kongruenzstrahlenbüschel mit dem Mittelpunkte $c_d u$ und jeder zur Leitgerade v parallele Kongruenzstrahl, ebenso die in C_1^1 enthaltene Regelschar des andern der Kongruenzstrahlenbüschel mit dem Mittelpunkte $c_d v$ und jeder zur Leitgerade u parallele Kongruenzstrahl.

2. Der unendlich ferne Strahl $\dot{c}_\infty$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 und der ihn rechtwinklig kreuzende Kongruenzstrahl c_d sind gemeinsame reziproke Polaren für einen Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung[3]). Im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 besteht der zu diesem F^2-Büschel polare, aus allen durch c_d und c_∞ gehenden einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung[4]), d. h. aus den (gleichseitigen)

[3]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **134** (1908), Nr. 7.

[4]) Jolles, Die Polarität als Grundlage in der Geometrie der linearen Strahlenkongruenz, Math. Zeitschr. **33** (1931), Nr. 7.

Durchmesserparaboloiden von C_1^1. Somit bilden alle einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit den gemeinsamen reziproken Polaren c_d, c_∞ einen für $H(F^2)$ bemerkenswerten F^2-Büschel. Er heiße der „Antidurchmesser-F^2-Büschel" und jede seiner Flächen eine „Antidurchmesserfläche" der linearen Strahlenkongruenz C_1^1.

Die polaren Räume der Antidurchmesserflächen enthalten die von den Kongruenzstrahlen c_d und c_∞ im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 getragenen Punkt- und Ebeneninvolutionen. Hiernach erweist sich der Kongruenzstrahl c_d als eine gemeinsame Hauptachse, jede der beiden mit ihm inzidenten in Σ_{ig} einander zugeordneten und zueinander senkrechten Ebenen sowie die Fluchtebene γ von Σ_{ig} als eine gemeinsame Symmetrieebene und der Mittelpunkt $\gamma\, c_d = C$ von C_1^1 als der gemeinsame Mittelpunkt aller Antidurchmesserflächen. Die beiden mit dem Kongruenzstrahle c_d inzidenten gemeinsamen Symmetrieebenen der Antidurchmesserflächen schneiden die Fluchtebene γ von Σ_{ig} in zwei weiteren gemeinsamen Hauptachsen aller Flächen des Antidurchmesser-F^2-Büschels. Diese beiden Hauptachsen fallen bzw. mit den Achsen c_1, c_2 der Strahleninvolution zusammen, die aus dem Mittelpunkte C von C_1^1 die vom Kongruenzstrahle c_∞ in Σ_{ig} getragene Punktinvolution projiziert (**1.**) und kreuzen die bzw. ihnen in Σ_{ig} zugeordneten unendlich fernen Geraden rechtwinklig. Jede der drei gemeinsamen Hauptachsen c_d, c_1, c_2 der Antidurchmesserflächen ist somit zugleich Symmetrieachse von C_1^1. Die Hauptachse c_d ist die Hauptsymmetrieachse, jede der beiden Hauptachsen c_1, c_2 eine Nebensymmetrieachse der linearen Strahlenkongruenz [5]).

Alle Antidurchmesserflächen schneiden die Hauptsymmetrieachse c_d sowie den unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞ je in demselben (reellen oder konjugiert imaginären) Punktepaare. Da die Fluchtebene γ von Σ_{ig} und jede zu ihr parallele Ebene einen zu dem Antidurchmesser-F^2-Büschel von C_1^1 perspektiven Büschel von Kegelschnitten mit gemeinsamer Durchmesserinvolution enthält, so bestehen alle diese Kegelschnittbüschel aus homothetischen Kegelschnitten

Zusammengefaßt gilt folglich:

Der Antidurchmesser-F^2-Büschel einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 besteht aus den einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit drei gemeinsamen bzw. mit der Hauptsymmetrieachse c_d und den beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C_1^1 identischen Hauptachsen. Je zwei auf einer Antidurchmesserfläche von C_1^1 gelegene im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 einander zugeordnete Strahlen spiegeln sich ineinander

[5]) Jolles, Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen, Math. Annalen 63 (1907), Nr. 6.

an der Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz. Zwei Antidurchmesserflächen sind zerfallen. Ihre Doppelpunktgeraden sind bzw. die Hauptsymmetrieachse c_d und der sie rechtwinklig kreuzende unendlich ferne Kongruenzstrahl c_∞. Die gemeinsame Hauptachse c_d aller Antidurchmesserflächen trifft diese in zwei (reellen oder konjugiert imaginären) auf den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 gelegenen Punkten. Die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} und jede zu ihr parallele Ebene schneiden den Antidurchmesser-F^2-Büschel von C_1^1 in zu ihm perspektiven Büscheln homothetischer Kegelschnitte. Die Büschel homothetischer Kegelschnitte bestehen bei der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 aus reellen Hyperbeln, bei der elliptischen aus reellen und aus imaginären Ellipsen. Die den homothetischen Kegelschnitten gemeinsamen Asymptoten sind bei den homothetischen Hyperbeln zwei mit der Hauptsymmetrieachse c_d inzidente reelle, bei den homothetischen Ellipsen zwei mit ihr inzidente konjugiert imaginäre bzw. zu den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 parallele Geraden $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}'$. Zur Basiskurve hat der Antidurchmesser-F^2-Büschel von C_1^1 ein einfaches Raumvierseit. Seine zwei Paar Gegenseiten sind (1.) *die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 und*[6]) *die mit c_d inzidenten zu u, v parallelen (reellen oder konjugiert imaginären) Kongruenzstrahlen u', v'.*

Nach dem soeben Bewiesenen werden die Strahlen von C_1^1 in den geschart involutorischen Räumen dreier helikoidischen[7]) linearen Strahlenkongruenzen paarweise einander zugeordnet. Dabei gehen jedesmal die auf den Antidurchmesserflächen von C_1^1 gelegenen und in C_1^1 enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung in sich selbst und die übrigen ∞^3 in C_1^1 enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung paarweise ineinander über. Die im endlichen gelegene Leitgerade jeder der drei helikoidischen linearen Kongruenzen ist bzw. eine der drei Symmetrieachsen c_d, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1. In anderen Worten:

Jede der drei Symmetrieachsen c_d, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist zugleich eine Symmetrieachse des Gebüsches einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung. An jeder von ihnen spiegeln sich alle Antidurchmesserflächen von C_1^1 in sich selbst und alle übrigen Flächen dieses F^2-Gebüsches paarweise ineinander.

---

[6]) Die Kongruenzstrahlen u', v' sind bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 reell, bei einer elliptischen E_1^1 konjugiert imaginär. Ihre reale Darstellung ist bei der elliptischen Kongruenz E_1^1 die lineare Kongruenz der nicht in E_1^1 gelegenen Strahlen auf allen Antidurchmesserflächen.

[7]) Die unter [2]) angeführte Abhandlung, Nr. 23.

3. Der Antidurchmesser-F^2-Büschel einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 besteht aus paarweise füreinander autopolaren Flächen zweiter Ordnung und liegt zu einem Büschel homothetischer Kegelschnitte in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{i_g} von C_1^1 perspektiv (2.). Ferner sind je zwei konjugierte Elemente eines Büschels homothetischer Kegelschnitte autopolar füreinander. Folglich gehen immer je zwei füreinander autopolare Antidurchmesserflächen von C_1^1 durch zwei konjugierte Kurven des in γ gelegenen Büschels homothetischer Kegelschnitte. Im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 bilden aber die füreinander autopolaren Flächen des Antidurchmesser-F^2-Büschels die Elementenpaare der von diesem F^2-Büschel getragenen Involution[8]). Somit ist gezeigt:

Die füreinander autopolaren Flächen im Antidurchmesser-F^2-Büschel einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 werden von der Fluchtebene des geschart involutorischen Raumes Σ_{i_g} von C_1^1 in den konjugierten Kurven eines Büschels homothetischer Kegelschnitte geschnitten.

Zwei konjugierte Hyperbeln mit reellen polaren Feldern sind reell. Von zwei solchen konjugierten Ellipsen ist die eine reell, die andere imaginär. Also ergibt sich weiter:

Bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 sind je zwei füreinander autopolare Antidurchmesserflächen reell, bei einer elliptischen E_1 ist die eine reell, die andere imaginär.

Bei zwei konjugierten Hyperbeln sind die Polaren eines gegebenen Punktes auf einer der beiden gemeinsamen Asymptoten durch diese symmetrisch getrennt. Ebenso trennt bei zwei konjugierten Ellipsen jeder Potenzstrahl ihrer gemeinsamen Durchmesserinvolution die Polaren eines mit dem andern inzidenten gegebenen Punktes symmetrisch. Kennt man demnach in der Fluchtebene γ von Σ_{i_g} den zum Antidurchmesser-F^2-Büschel von C_1^1 perspektiven Büschel homothetischer Kegelschnitte, so ist in dem Antidurchmesser-F^2-Büschel zu jeder Fläche die für sie autopolare Fläche leicht zu bestimmen.

Der Antidurchmesser-F^2-Büschel ist im polaren F^2-Gebüsche einer hyperbolischen wie auch in dem einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz hyperbolisch involutorisch gepaart. Seine Doppelflächen sind in beiden Fällen die zerfallenen Antidurchmesserflächen mit bzw. den Doppelpunktsgeraden c_d, c_∞.

4. Im Antidurchmesser-F^2-Büschel einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 liegen zwei Rotationshyperboloide[9]). Das eine ${}_1R^2$ hat die Nebensymmetrie-

[8]) Die unter [4]) angeführte Abhandlung, Nr. 3.
[9]) Die unter [5]) angeführte Abhandlung, Nr. 7.

achse $\mathfrak{c}_1$, das andere ${}_2R^2$ die Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_2$ der Kongruenz zur Rotationsachse. Die zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechte Symmetrieebene von ${}_1R^2$ verbindet die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 mit $\mathfrak{c}_2$, die zu $\mathfrak{c}_2$ senkrechte Symmetrieebene von ${}_2R^2$ die Hauptsymmetrieachse c_d mit $\mathfrak{c}_1$. Hat die von c_d im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 getragene Punktinvolution, je nachdem C_1^1 hyperbolisch oder elliptisch ist, die Potenz $+d^2$ oder $-d^2$, so hat bei der hyperbolischen linearen Kongruenz H_1^1 der in der Ebene $\mathfrak{c}_2 c_d$ enthaltene Hauptparallelkreis von ${}_1R^2$ und der in der Ebene $\mathfrak{c}_1 c_d$ enthaltene Hauptparallelkreis von ${}_2R^2$ den Halbmesser d. Dagegen haben bei der elliptischen linearen Kongruenz E_1^1 beide Rotationshyperboloide Hauptparallelkreise vom Halbmesser $\sqrt{-d^2}$. Die zwei im Antidurchmesser-F^2-Büschel der linearen Kongruenz C_1^1 enthaltenen Rotationshyperboloide ${}_1R^2$, ${}_2R^2$ sind also bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz reell, bei einer elliptischen konjugiert imaginär.

Laufen die durch den Mittelpunkt C einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 gehenden Geraden $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$ zu den Leitgeraden u, v von H_1^1 bzw. parallel, so besteht der in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^H von H_1^1 enthaltene zum Antidurchmesser-F^2-Büschel von H_1^1 perspektive Büschel homothetischer Kegelschnitte (2.) aus den Hyperbeln mit den gemeinsamen Asymptoten $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$. Unter diesen Hyperbeln hat die auf dem Rotationshyperboloide ${}_1R^2$ gelegene (Fig. 1) auf ihrer Hauptachse $\mathfrak{c}_2$ eine Involution für sie konjugierter Punkte mit der Potenz $+d^2$, auf ihrer Nebenachse $\mathfrak{c}_1$ eine solche mit der Potenz $-d^2 \tan^2 \frac{(uv)}{2}$. Durch die ihr konjugierte Hyperbel geht (3.) das für ${}_1R^2$ autopolare Antidurchmesserhyperboloid ${}_1S^2$ von H_1^1. Seine drei Hauptachsen c_d, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ tragen somit bzw. die Involutionen für ${}_1S^2$ konjugierter Punkte mit bzw. den Potenzen $+d^2$, $+d^2 \tan^2 \frac{(uv)}{2}$, $-d^2$. Das Hyperboloid ${}_1S^2$ ist folglich scheitelrecht[10]).

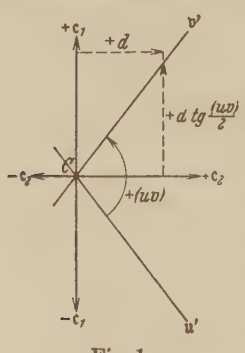


Fig. 1.

[10]) Ich verstehe also unter einem scheitelrechten Hyperboloide ein solches, dessen eine Hauptachse einen symmetrischen Büschel von Durchmesserebenen trägt. Das scheitelrechte Hyperboloid wird somit von den zu dieser Hauptachse senkrechten Ebenen in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten. Die Hauptachse selbst ist mit zwei Paaren einander rechtwinklig kreuzender Scheitelstrahlen inzident. Diese beiden Strahlenpaare bestehen aus reellen oder imaginären Elementen, je nachdem ein Strahlenhyperboloid oder ein strahlenloses Hyperboloid vorliegt. Den scheitelrechten Hyperboloiden stehen die scheitelrechten Kegel zweiten Grades zur Seite. Sie sind später von meinem Freunde Richard Müller in den Monatsheften f. Math. u. Phys. 37 (1930) eingehend untersucht worden.

Ebenso trägt in H_1^1 die in γ gelegene Hyperbel des andern in dem Antidurchmesser-F^2-Büschel gelegenen Rotationshyperboloides ${}_2R^2$ auf ihrer Hauptachse c_1 eine Involution für sie konjugierter Punkte mit der Potenz $+d^2$, auf ihrer Nebenachse c_2 eine solche mit der Potenz $-d^2 \cot^2 \frac{(u\,v)}{2}$. Für ${}_1R^2$ ist demnach in dem Antidurchmesser-F^2-Büschel das scheitelrechte Hyperboloid ${}_2S^2$ autopolar. Die Potenzen der von seinen drei Hauptachsen c_d, c_1, c_2 bzw. getragenen Involutionen der für ${}_2S^2$ konjugierten Punkte sind bzw. $+d^2$, $-d^2$, $+d^2 \cot^2 \frac{(u\,v)}{2}$.

Bei einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 besteht der zu ihrem Antidurchmesser-F^2-Büschel perspektive in der Fluchtebene γ ihres geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^E enthaltene Büschel homothetischer Kegelschnitte aus reellen und imaginären Ellipsen mit derselben elliptischen Durchmesserinvolution. Jeder reellen Ellipse ist dabei eine imaginäre mit reellem polaren Felde konjugiert. Sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ die beiden Potenzstrahlen dieser elliptischen Durchmesserinvolution, so hat die auf dem imaginären Rotationshyperboloide ${}_1R^2$ des Antidurchmesser-F^2-Büschels von E_1^1 gelegene imaginäre Ellipse (Fig. 2) von γ auf ihren beiden Achsen c_2, c_1 bzw. die Involutionen konjugierter Punkte mit bzw. den Potenzen $-d^2$, $-d^2 \tan^2 \frac{(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2)}{2}$. Durch die ihr konjugierte (reelle) Ellipse geht das für das Rotationshyperboloid ${}_1R^2$ autopolare (reelle) scheitelrechte Hyperboloid ${}_1S^2$ des Antidurchmesser-F^2-Büschels von E_1^1. Während die Hauptachsen c_d, c_1, c_2 von ${}_1R^2$ bzw. die Involutionen für ${}_1R^2$ konjugierter Punkte mit bzw. den Potenzen $-d^2$, $-d^2 \tan^2 \frac{(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2)}{2}$, $-d^2$ tragen, tragen diese Geraden als Hauptachsen von ${}_1S^2$ bzw. die Involutionen konjugierter Punkte mit bzw. den Potenzen $-d^2$, $+d^2 \tan^2 \frac{(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2)}{2}$, $+d^2$.

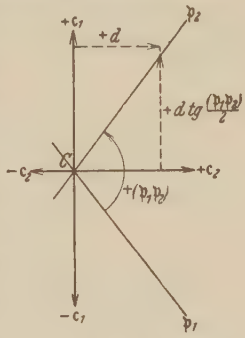


Fig. 2.

In gleicher Weise finden wir im Antidurchmesser-F^2-Büschel von E_1^1 das für das imaginäre Rotationshyperboloid ${}_2R^2$ autopolare scheitelrechte Hyperboloid ${}_2S^2$. Ersteres hat auf den Hauptachsen c_d, c_1, c_2 je die Involutionen konjugierter Punkte mit bzw. den Potenzen $-d^2$, $-d^2$, $-d^2 \cot^2 \frac{(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2)}{2}$, letzteres mit bzw. den Potenzen $-d^2$, $+d^2$, $+d^2 \cot^2 \frac{(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2)}{2}$. Demnach folgt:

Im Antidurchmesser-F^2-Büschel einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sind zu den beiden in ihm gelegenen Rotationshyperboloiden ${}_1R^2$, ${}_2R^2$ bzw. die scheitelrechten Hyperboloide ${}_1S^2$, ${}_2S^2$ autopolar. Die beiden Rotationshyperboloide sind bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkon-

gruenz H_1^1 reell, bei einer elliptischen E_1^1 konjugiert imaginär. Dagegen sind die beiden scheitelrechten Hyperboloide in beiden Fällen reell.

5. Der Antidurchmesser-F^2-Büschel einer linearen Strahlenkongruenz C_1 ist perspektiv (2.) zu einem Büschel homothetischer Kegelschnitte in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Die gemeinsamen Achsen dieser homothetischen Kegelschnitte sind die Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ der Kongruenz. Bezeichnen $c_1, c_1'; c_2, c_2'$ bzw. auf den Achsen $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ gelegene homologe halbe Sehnen zweier aus dem Büschel homothetischer Kegelschnitte herausgegriffenen Kurven, so gilt die Beziehung

$$(\alpha) \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1'}{c_2'}.$$

Bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 ist nach den in Nummer 4, Fig. 1 getroffenen Festsetzungen

$$(\beta) \qquad c_1 = c_2 \operatorname{tang} \frac{(u\,v)}{2},$$

bei einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 nach den in Nummer 4 Fig. 2 getroffenen

$$(\gamma) \qquad c_1 = c_2 \operatorname{tang} \frac{(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2)}{2}.$$

Sind die Leitgeraden u, v einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 die Achsen zweier projektiven Ebenenbüschel erster Ordnung, deren homologe Ebenen aufeinander senkrecht stehen, so erzeugen sie eine orthogonale Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{D}^2$ von H_1^1. Die Strahlen von $\mathfrak{D}^2$ sind die Träger der im geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^H von H_1^1 gelegenen symmetrischen Ebeneninvolutionen. Aus diesem Grunde bezeichne ich die Regelschar $\mathfrak{D}^2$ als die „orthogonale Direktrixregelschar“ oder kurz als die „Direktrixregelschar“ und ihre Fläche, das einscharig in der Kongruenz H_1^1 enthaltene orthogonale Hyperboloid D^2 als das „orthogonale Direktorhyperboloid“ oder kurz als „Direktorhyperboloid“ der[11]) hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1.

Auf dem Direktorhyperboloide D^2 liegen außer den Leitgeraden u, v von H_1^1 die bzw. zu u, v parallelen mit der Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz inzidenten Kongruenzstrahlen u', v'. Das Direktorhyperboloid D^2 ist somit (2.) eine Antidurchmesserfläche von H_1^1. Durch seine Hauptachse c_d gehen zwei seiner bzw. auf u, v senkrechten zyklischen Ebenen. Die

[11]) Eine orthogonale lineare Strahlenkongruenz — d. h. eine hyperbolische lineare Strahlenkongruenz miteinander rechtwinklig kreuzender Leitgeraden u, v — hat ein zerfallenes orthogonales Direktorhyperboloid. Seine Doppelpunktsgerade ist die Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz.

auf c_d gelegene Sehne $2d$ von D^2 ist hiernach die Hauptsehne der in einer Symmetrieebene von D^2 enthaltenen auf dieser Fläche gelegenen Ellipse. Ich bezeichne von nun an die mit der Nebenachse dieser Ellipse des Direktorhyperboloides D^2 zusammengefallene Nebensymmetrieachse der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 als Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ von H_1^1. Eine Bezeichnungsweise, die sich auch bei der elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 durchführen läßt.

Sind d, c_{01}, c_{02} die absoluten Längen der von den Hauptachsen c_d, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ des Direktorhyperboloides D^2 von H_1^1 bzw. getragenen halben Sehnen d, c_{01}, $\sqrt{-c_0^2}$ der Fläche, so gilt, da nach obiger Auseinandersetzung

$$(\delta) \qquad c_{01} < d$$

ist, für das orthogonale Hyperboloid D^2 bekanntlich die Identität

$$(\varepsilon) \qquad \frac{1}{c_{02}^2} - \frac{1}{c_{01}^2} + \frac{1}{d^2} = 0.$$

Nach (β) besteht aber die Beziehung

$$c_{01} = c_{02} \operatorname{tang} \frac{(u\,v)}{2},$$

folglich ergibt sich hieraus und aus (ε)

$$(\zeta) \qquad c_{01}^2 = \frac{d^2 \cos(u\,v)}{\cos^2 \frac{(u\,v)}{2}} \quad \text{und} \quad c_{02}^2 = \frac{d^2 \cos(u\,v)}{\sin^2 \frac{(u\,v)}{2}}.$$

Das Direktorhyperboloid D^2 von H_1^1 hat also auf den drei Hauptachsen c_d, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ bzw. die halben Sehnen

$$d, \quad \frac{d\sqrt{\cos(u\,v)}}{\cos \frac{(u\,v)}{2}}, \quad \frac{d\sqrt{-\cos(u\,v)}}{\sin \frac{(u\,v)}{2}}$$

und sonach (3.) das für D^2 autopolare Antidurchmesserhyperboloid G^2 bzw. die halben Sehnen

$$d, \quad \frac{d\sqrt{-\cos(u\,v)}}{\cos \frac{(u\,v)}{2}}, \quad \frac{d\sqrt{\cos(u\,v)}}{\sin \frac{(u\,v)}{2}}.$$

In der zwischen den absoluten Längen dieser drei halben Sehnen von G^2 bestehenden Identität (ε) ist jedoch nunmehr d die halbe Hauptsehne, c_{02} die halbe Nebensehne der in einer Symmetrieebene dieses Hyperboloides enthaltenen Ellipse und c_{01} die absolute Länge der gemeinsamen halben Nebenachse der in seinen beiden übrigen Symmetrieebenen enthaltenen Hyperbeln. Nach einem bekannten Satze über das gleichseitige Hyperboloid erweist somit die Identität (ε) das in H_1^1 für das orthogonale Direktorhyperboloid D^2 autopolare Antidurchmesserhyperboloid G^2 als gleichseitig. Die Hauptachse $\mathfrak{c}_1$ von G^2 trägt eine imaginäre Sehne dieser Fläche, jede der

beiden anderen Hauptachsen c_d, c_2 eine reelle. Nach (δ) ist dabei die Sehne auf c_d größer als die absolute Länge der Sehne auf c_1 und diese wieder nach (ε) kleiner als die Sehne auf c_2.

Die hyperbolische lineare Strahlenkongruenz H_1^1 hat außer dem orthogonalen Direktorhyperboloide D^2, wie wir nunmehr zeigen, noch zwei, und zwar füreinander autopolare orthogonale Antidurchmesserhyperboloide ${}_1O^2$, ${}_2O^2$. Bei ${}_1O^2$ gehen zwei zyklische Ebenen durch die Nebensymmetrieachse c_1, dagegen bei ${}_2O^2$ zwei durch die Nebensymmetrieachse c_2 der Kongruenz H_1^1.

Seien nämlich d, ${}_1c_1$, ${}_1c_2$ die absoluten Längen der auf den Hauptachsen c_d, c_1, c_2 bzw. liegenden halben Sehnen des gesuchten orthogonalen Antidurchmesserhyperboloides ${}_1O^2$, so gelten nach (ε) und (β) die Gleichungen

$$(\varepsilon') \qquad \frac{1}{{}_1c_2^2} - \frac{1}{d^2} + \frac{1}{{}_1c_1^2} = 0$$

und

$$(\beta') \qquad {}_1c_1 = {}_1c_2 \operatorname{tang} \frac{(uv)}{2}.$$

Aus ihnen folgt

$${}_1c_2^2 = \frac{d^2}{\sin^2 \frac{(uv)}{2}}, \qquad {}_1c_1^2 = \frac{d^2}{\cos^2 \frac{(uv)}{2}}.$$

Die hyperbolische lineare Strahlenkongruenz H_1^1 hat demnach wirklich das gesuchte orthogonale Antidurchmesserhyperboloid ${}_1O^2$. Seine auf den Hauptachsen c_d, c_1, c_2 bzw. liegenden halben Sehnen sind

$$d, \quad \frac{d}{\cos \frac{(uv)}{2}}, \quad \frac{\sqrt{-d^2}}{\sin \frac{(uv)}{2}}$$

und die des für ${}_1O^2$ autopolaren Antidurchmesserhyperboloides ${}_2O^2$ nach Nummer **3** bzw.

$$d, \quad \frac{\sqrt{-d^2}}{\cos \frac{(uv)}{2}}, \quad \frac{d}{\sin \frac{(uv)}{2}}.$$

In der zwischen den absoluten Längen dieser drei halben Sehnen von ${}_2O^2$ geltenden Identität (ε') aber ist ${}_1c_2$ die halbe Hauptsehne und d die halbe Nebensehne der in der Symmetrieebene $c_1 c_2$ enthaltenen Ellipse. Die in den beiden übrigen Symmetrieebenen bzw. enthaltenen Hyperbeln haben eine gemeinsame halbe imaginäre Nebensehne von der absoluten Länge ${}_1c_1$. Somit ist bei der hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1, wie oben behauptet wurde, das für das orthogonale Antidurchmesserhyperboloid ${}_1O^2$ autopolare Antidurchmesserhyperboloid ${}_2O^2$ gleichfalls orthogonal. Weitere orthogonale Antidurchmesserhyperboloide sind nicht vorhanden.

Im geschart involutorischen Raume Σ_{ij}^E einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 liegen nur imaginäre symmetrische Ebenenbüschel

erster Ordnung. Die Direktrixregelschar $\mathfrak{D}^2$ von E_1^1 als Ort ihrer Achsen und das durch $\mathfrak{D}^2$ gehende Direktorhyperboloid D^2 ist also in Σ_{ig}^E imaginär, sonach (3.) das für das D^2 autopolare gleichseitige Antidurchmesserhyperboloid G^2 reell. Zwischen den absoluten Längen d, c_{g1}, c_{g2} der bzw. auf den Hauptachsen c_d, c_1, c_2 von G^2 gelegenen halben Sehnen dieser Fläche besteht die bekannte Bedingungsgleichung

$$(\eta) \qquad \frac{1}{c_{g1}^2} + \frac{1}{c_{g2}^2} - \frac{1}{d^2} = 0$$

und nach (γ) die Gleichung

$$c_{g1} = c_{g2} \operatorname{tang} \frac{(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}{2}.$$

Aus beiden Beziehungen folgt

$$c_{g1}^2 = \frac{d^2}{\cos^2 \frac{(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}{2}}, \qquad c_{g2}^2 = \frac{d^2}{\sin^2 \frac{(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}{2}}.$$

Das gleichseitige Antidurchmesserhyperboloid G^2 von E_1^1 hat demnach auf den Hauptachsen c_d, c_1, c_2 bzw. die halben Sehnen

$$\sqrt{-d^2}, \quad \frac{d}{\cos \frac{(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}{2}}, \quad \frac{d}{\sin \frac{(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}{2}},$$

und demnach (3.) das für G^2 autopolare imaginäre orthogonale Direktorhyperboloid bzw. die halben Sehnen

$$\sqrt{-d^2}, \quad \frac{\sqrt{-d^2}}{\cos \frac{(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}{2}}, \quad \frac{d}{\sin \frac{(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}{2}}.$$ [12])

Die elliptische lineare Strahlenkongruenz E_1^1 bestimmt außer ihrem imaginären orthogonalen Direktorhyperboloide D^2 ebenfalls noch zwei füreinander autopolare orthogonale Antidurchmesserhyperboloide ${}_1O^2$, ${}_2O^2$. Für das orthogonale Antidurchmesserhyperboloid ${}_2O^2$ von E_1^1 mit zwei mit der Hauptachse c_2 inzidenten zyklischen Ebenen gelten nämlich nach (ε) und (γ) die Beziehungen

$$\frac{1}{d^2} - \frac{1}{{}_2c_1^2} + \frac{1}{{}_2c_2^2} = 0 \quad \text{und} \quad {}_2c_1 = {}_2c_2 \operatorname{tang} \frac{(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}{2}.$$

Sie liefern

$${}_2c_1^2 = d^2 \frac{\cos(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}{\cos^2 \frac{(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}{2}}, \qquad {}_2c_2^2 = d^2 \frac{\cos(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}{\sin^2 \frac{(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)}{2}}.$$

---

[12]) Bei einer rotatorischen linearen Strahlenkongruenz R_1^1 ist das imaginäre orthogonale Direktorhyperboloid D^2 zerfallen. Seine Doppelpunktsgerade ist die Hauptsymmetrieachse c_d von R_1^1.

Das orthogonale Antidurchmesserhyperboloid ${}_2O^2$ hat hiernach auf den Hauptachsen c_d, c_1, c_2 bzw.

$$\sqrt{-d^2},\quad \frac{d\sqrt{\cos(p_1 p_2)}}{\cos\frac{(p_1 p_2)}{2}},\quad \frac{d\sqrt{\cos(p_1 p_2)}}{\sin\frac{(p_1 p_2)}{2}}$$

und das für ${}_2O^2$ autopolare und sonach (3.) imaginäre ${}_1O^2$ bzw.

$$\sqrt{-d^2},\quad \frac{\sqrt{-d^2\cos(p_1 p_2)}}{\cos\frac{(p_1 p_2)}{2}},\quad \frac{\sqrt{-d^2\cos(p_1 p_2)}}{\sin\frac{(p_1 p_2)}{2}}$$

zu halben Sehnen. Zwei zyklische Ebenen von ${}_1O^2$ sind mit der Hauptachse c_1 inzident.

In der vorigen und dieser Nummer ist hiernach dargetan:

Der Antidurchmesser-F^2-Büschel einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthält zwei rotatorische Hyperboloide ${}_1R^2$, ${}_2R^2$, zwei scheitelrechte ${}_1S^2$, ${}_2S^2$, drei orthogonale D^2, ${}_1O^2$, ${}_2O^2$ und ein gleichseitiges Hyperboloid G^2. Die beiden rotatorischen Antidurchmesserhyperboloide ${}_1R^2$, ${}_2R^2$ sind bzw. für die beiden scheitelrechten ${}_1S^2$, ${}_2S^2$, das orthogonale Direktorhyperboloid D^2 für das gleichseitige Antidurchmesserhyperboloid G^2 und die beiden orthogonalen Antidurchmesserhyperboloide ${}_1O^2$, ${}_2O^2$ füreinander autopolar[13]*). Diese vier Paare füreinander autopolarer Antidurchmesserflächen bestehen nur bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 aus reellen Elementen. Bei einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 sind die zwei rotatorischen Antidurchmesserhyperboloide ${}_1R^2$, ${}_2R^2$ konjugiert imaginär und das orthogonale Direktorhyperboloid D^2 sowie das orthogonale Antidurchmesserhyperboloid ${}_1O^2$ imaginär.*

Im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 bestimmen der Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener gleichseitigen Paraboloide und der zu ihm polare Antidurchmesser-F^2-Büschel ∞^2 Polar-F^2-Tetraeder [8]), deren vier Eckflächen aus je zwei konjugierten Flächen des einen und des andern dieser beiden reziprok polaren F^2-Büschel bestehen. Unter ihnen hat, wie sich nunmehr ergibt, ein bemerkenswertes Polar-F^2-Tetraeder einerseits zu Eckflächen die beiden in **1.** erwähnten einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide ${}^1F^2$, ${}^2F^2$ und andererseits die beiden füreinander autopolaren orthogonalen Antidurchmesserhyperboloide ${}_1O^2$, ${}_2O^2$, ein anderes die nämlichen beiden gleichseitigen Paraboloide ${}^1F^2$, ${}^2F^2$, das orthogonale Direktorhyperboloid D^2 von C_1^1 und das gleichseitige Antidurchmesserhyperboloid G^2 und endlich ein drittes und viertes wiederum die beiden

[13]) Bei einer orthogonalen wie bei einer rotatorischen linearen Strahlenkongruenz ist das gleichseitige Antidurchmesserhyperboloid G^2 mit dem zerfallenen orthogonalen Direktorhyperboloide D^2 identisch.

gleichseitigen Paraboloide ${}^1F^2$, ${}^2F^2$ und je eins der beiden rotatorischen und das für ihn autopolare scheitelrechte Antidurchmesserhyperboloid.

6. Die einen gegebenen Strahl s einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 rechtwinklig kreuzenden Kongruenzstrahlen bilden eine durch den unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞ gehende paraboloidische Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{S}^2$. Die Strahlen der Regelschar $\mathfrak{S}^2$ sind elliptisch involutorisch gepaart, wenn in $\mathfrak{S}^2$ jedem Strahle x der ihn rechtwinklig kreuzende y zugeordnet wird. Durch jedes Tripel einander rechtwinklig kreuzender Strahlen s, x, y geht ein einscharig in C_1^1 enthaltenes gleichseitiges Hyperboloid. Es wird zu einem gleichseitigen Paraboloide, wenn x oder y mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ zusammenfällt. Hiernach gibt es also ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltene durch einen gegebenen Kongruenzstrahl s gehende gleichseitige Hyperboloide und ein einscharig in C_1^1 enthaltenes durch s gehendes gleichseitiges Paraboloid.

Wir greifen aus diesen ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung zwei — etwa A^2, B^2 — heraus. Der sie verbindende F^2-Büschel besteht aus lauter einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung[14]). Seine Flächen schneiden jede Regelschar zweiter Ordnung von C_1^1, insbesondere die eben konstruierte paraboloidische Regelschar $\mathfrak{S}^2$, in den Strahlenpaaren einer Involution [14]). Die Strahleninvolution enthält die bzw. auf den Flächen A^2, B^2 gelegenen Paare einander rechtwinklig kreuzender Strahlen der Regelschar $\mathfrak{S}^2$ und folglich alle Paare der von den einander rechtwinklig kreuzenden Strahlen von $\mathfrak{S}^2$ gebildeten elliptisch involutorischen paraboloidischen Regelschar. Sonach ist jede Fläche des die Flächen A^2, B^2 verbindenden F^2-Büschels ein gleichseitiges Hyperboloid und nur die den Kongruenzstrahl c_∞ enthaltende ein, als ein gleichseitiges Hyperboloid geltendes gleichseitiges Paraboloid. Die ∞^1 durch einen gegebenen Kongruenzstrahl s gehenden einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Hyperboloide und das einscharig in C_1^1 enthaltene durch s gehende gleichseitige Paraboloid bilden also einen Büschel gleichseitiger Regelflächen zweiter Ordnung. Seine Basiskurve besteht aus den beiden (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 und außer s noch aus einem zweiten Kongruenzstrahle t.

Ebenso liegt ein zweiter Kongruenzstrahl t' in den durch einen weiteren Kongruenzstrahl s' gehenden ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Hyperboloiden und dem durch s' gehenden gleichseitigen Paraboloide. Und diese Flächen bilden zusammen wiederum einen Büschel gleichseitiger Regelflächen zweiter Ordnung. Beide F^2-Büschel haben die das Strahlenquadrupel s, t, s', t' verbindende gleichseitige Regelfläche zweiter

[14]) Die unter [3]) angeführte Abhandlung, Nr. 1.

Ordnung gemein. Sie liegen demnach in einem F^2-Bündel des Gebüsches einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung. Der von dem F^2-Bündel durch einen gegebenen Kongruenzstrahl x gesandte F^2-Büschel enthält eine gleichseitige Regelfläche zweiter Ordnung aus jedem unserer beiden Büschel gleichseitiger Regelflächen zweiter Ordnung. Es besteht somit nach dem am Anfange bewiesenen aus lauter gleichseitigen Regelflächen zweiter Ordnung. Und wir schließen daraus:

Im Gebüsche einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung bilden alle gleichseitigen Hyperboloide zusammen mit seinem Büschel gleichseitiger Paraboloide einen Bündel $\delta(F^2)$ gleichseitiger Regelflächen zweiter Ordnung.

Der F^2-Bündel $\delta(F^2)$ besteht hiernach aus den Flächen derjenigen F^2-Büschel, die ein einscharig in C_1^1 enthaltendes gleichseitiges Hyperboloid – wir wählen (5.) das gleichseitige Antidurchmesserhyperboloid G^2 von C_1^1 — bzw. mit den Flächen des Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener gleichseitigen Paraboloide verbinden. In dem polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 ist aber das gleichseitige Antidurchmesserhyperboloid G^2 für das orthogonale Direktorhyperboloid D^2 autopolar (5.). Ferner ist in $\Pi(F^2)$ der durch die Flächen G^2 und D^2 gehende Antidurchmesser-F^2-Büschel und der Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener gleichseitigen Paraboloide reziprok polar (2.), d. h. auch jedes gleichseitige Paraboloid autopolar für D^2. Somit folgt:

Das orthogonale Direktorhyperboloid D^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 die Polfläche des Bündels[15]*) aller einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Regelflächen zweiter Ordnung.*

Bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz bestehen alle Bündel einscharig in ihr enthaltener Flächen zweiter Ordnung aus reellen Flächen, bei einer elliptischen nur diejenigen F^2-Bündel, die im polaren F^2-Gebüsche der elliptischen linearen Strahlenkongruenz imaginäre Polflächen haben[16]). Nun ist das orthogonale Direktorhyperboloid einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz imaginär (5.). Somit folgt weiter:

---

[15]) Die orthogonale wie die rotatorische lineare Strahlenkongruenz hat (5.) ein zerfallenes orthogonales Direktorhyperboloid D^2. Beidemal ist die Doppelpunktsgerade der zerfallenen Fläche D^2 die Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz. Bei beiden Kongruenzen liegt demnach das zerfallene orthogonale Direktorhyperboloid D^2 in seinem Polar-F^2-Bündel $\delta(P^2)$, und jede Fläche dieses F^2-Bündels enthält c_d (die unter [4]) angeführte Abhandlung, Nr. 1). Alle durch die Hauptsymmetrieachse c_d einer orthogonalen oder rotatorischen linearen Kongruenz gehenden einscharig in der Kongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung sind also gleichseitige Regelflächen.

[16]) Die unter [4]) angeführte Abhandlung, Nr. 4.

Der Bündel einscharig in einer hyperbolischen oder elliptischen linearen Strahlenkongruenz enthaltener gleichseitigen Regelflächen zweiter Ordnung setzt sich nur aus reellen Flächen zusammen.

Ein F^2-Büschel und ein nicht durch ihn gehender F^2-Bündel eines F^2-Gebüsches haben aber eine Fläche gemein. Also ergibt sich nunmehr:

Alle F^2-Büschel des Gebüsches einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung, die nicht in dem im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 dem orthogonalen Direktorhyperboloide D^2 zugeordneten Polar-F^2-Bündel $\delta(F^2)$ liegen, gehen je durch eine reelle gleichseitige Regelfläche zweiter Ordnung.

Die Doppelpunktsgeraden der zerfallenen Flächen des F^2-Bündels $\delta(F^2)$ sind[17]) die Strahlen der in C_1^1 enthaltenen Regelschar der Polfläche von $\delta(F^2)$, d. h. die Strahlen der in C_1^1 enthaltenen Regelschar $\mathfrak{D}^2$ des (reellen oder imaginären) orthogonalen Direktorhyperboloides D^2 von C_1^1. Jeder Strahl von $\mathfrak{D}^2$ ist aber der Träger eines symmetrischen Ebenenbüschels erster Ordnung (5.) des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Demnach besteht jeder Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung, dessen zerfallene Flächen bzw. die Achsen zweier (reellen getrennten oder vereinigten oder zweier konjugiert imaginären) symmetrischen Ebenenbüschel erster Ordnung von Σ_{ig} zu Doppelpunktsgeraden haben, aus ∞^1 gleichseitigen Hyperboloiden und einem gleichseitigen Paraboloide. Nur wenn diese Doppelpunktsgeraden bzw. mit den zu den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v parallelen mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 inzidenten Kongruenzstrahlen u', v' zusammenfallen, sind alle Flächen dieses F^2-Büschels gleichseitige Paraboloide (1.).

Die durch das (reelle oder imaginäre) orthogonale Direktorhyperboloid D^2 der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 unter deren Strahlen bedingte primäre Involution[18]) heiße, weil sie einen Bündel zweiter Art von involutorischen gleichseitigen Regelscharen zweiter Ordnung enthält, „gleichseitig". Eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 trägt nur eine einzige gleichseitige primäre Strahleninvolution.

7. Mit dem Durchmesser-F^2-Büschel einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 und dem im polaren F^2-Gebüsche von C_1^1 zu ihm polaren Antidurchmesser-F^2-Büschel (2.) ist ein Büschel beidscharig involutorischer Flächen zweiter Ordnung aus dem geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 verknüpft[19]). Ein Paar Gegenseiten seines Basisvierseits bilden die Haupt-

[17]) Jolles, Die durch eine polare Korrelation in sich selbst überführbaren Regelflächen zweiter Ordnung, Math. Zeitschr. 26 (1927), Nr. 2.

[18]) Die unter [2]) angeführte Abhandlung, Nr. 1.

[19]) Die unter [4]) angeführte Abhandlung, Nr. 9.

symmetrieachse c_d von C_1^1 und der unendlich ferne sie rechtwinklig kreuzende Kongruenzstrahl c_∞. Alle Elemente dieses Büschels beidscharig involutorischer Flächen zweiter Ordnung sind folglich beidscharig involutorische gleichseitige Paraboloide. Sie gehen außer durch c_d und c_∞ noch durch die (reellen oder konjugiert imaginären) zu den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 parallelen Kongruenzstrahlen u', v'.

Die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 ist als ein gemeinsamer Scheitelstrahl auch eine gemeinsame Symmetrieachse der durch sie gehenden beidscharig involutorischen gleichseitigen Paraboloide von Σ_{ig}. Je zwei einander zugeordnete Strahlen der c_d, c_∞ enthaltenden Regelschar jedes dieser Paraboloide sind die Achsen zweier in Σ_{ig} einander zugeordneten die Regelschar einer Antidurchmesserfläche von C_1^1 erzeugenden Ebenenbüschel erster Ordnung. Dagegen sind je zwei einander zugeordnete Strahlen seiner nicht durch c_d, c_∞ gehenden Regelschar die Achsen zweier in Σ_{ig} einander zugeordneten eine gleichseitig paraboloidische Regelschar von C_1^1 erzeugenden Ebenenbüschel erster Ordnung. Die Paare in Σ_{ig} einander zugeordneter Strahlen auf den Antidurchmesserflächen von C_1^1 bilden aber [20]) die dem Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener gleichseitigen Paraboloide adjungierte sekundäre Involution, und die Elemente jedes dieser Strahlenpaare werden an der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 ineinander gespiegelt (**2.**). Demnach ist erwiesen:

Die dem Büschel gleichseitiger Durchmesserparaboloide einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 adjungierte sekundäre Involution enthält außer dem zum Antidurchmesser-F^2-Büschel perspektiven Büschel involutorischer Regelscharen zweiter Ordnung des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 noch einen in Σ_{ig} enthaltenen Büschel involutorischer gleichseitig parabolischen Regelscharen. Jedes Strahlenpaar der dem Durchmesser-F^2-Büschel adjungierten sekundären Involution ist durch die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 symmetrisch getrennt.

Für jedes einscharig in C_1^1 enthaltene gleichseitige Durchmesserparaboloid sind die (reellen oder konjugiert imaginären) zu den (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v der Kongruenz bzw. parallelen Kongruenzstrahlen u', v' reziprok polar (**1.**). Zugleich sind diese Kongruenzstrahlen sowohl die Träger symmetrischer Ebeneninvolutionen (**5.**) wie auch die Leitgeraden der dem Büschel der gleichseitigen Durchmesserparaboloide von C_1^1 adjungierten linearen Strahlenkongruenz.

Die beiden symmetrischen Ebeneninvolutionen u', v' sind bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 reell. Bei ihr wird jedes reelle Strahlenpaar der dem Büschel gleichseitiger Durchmesserparaboloide

[20]) Die unter [4]) angeführte Abhandlung, Nr. 5.

adjungierten sekundären Involution durch ein reelles Ebenenpaar aus jeder der beiden symmetrischen Ebeneninvolutionen u', v' projiziert. Die Strahlenpaare der dem Durchmesser-F^2-Büschel von H_1^1 adjungierten sekundären Involution sind hiernach leicht zu konstruieren.

8. Der Antidurchmesser-F^2-Büschel einer nicht zerfallenen hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 mit zwei im endlichen gelegenen Leitgeraden u, v hat zur Basiskurve ein reelles einfaches Raumvierseit. Das eine Paar Gegenseiten (2.) des Vierseits sind die Leitgeraden u, v, das andere Paar die zu u, v parallelen Kongruenzstrahlen u', v'. Von der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^H der hyperbolischen Kongruenz H_1^1 wird deren Antidurchmesser-F^2-Büschel in einem Büschel homothetischer Hyperbeln geschnitten.

Ist die hyperbolische lineare Kongruenz H_1^1 insbesondere orthogonal[11]), so besteht ihr Antidurchmesser-F^2-Büschel aus scheitelrechten Regelflächen zweiter Ordnung[10]) und der zu ihm perspektive in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^H gelegene Büschel homothetischer Hyperbeln aus gleichseitigen Hyperbeln.

Der Antidurchmesser-F^2-Büschel einer nicht zerfallenen elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 hat zur Basiskurve ein imaginäres einfaches Raumvierseit. Das eine Paar Gegenseiten (2.) dieses Vierseits sind die konjugiert imaginären Leitgeraden u, v von E_1^1, das andere Paar die zu u, v parallelen konjugiert imaginären Kongruenzstrahlen u', v'. Von der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^E der elliptischen Kongruenz E_1^1 wird deren Antidurchmesser-F^2-Büschel in einem Büschel (reeller und imaginärer) homothetischer Ellipsen geschnitten.

Ist die elliptische lineare Kongruenz E_1^1 insbesondere rotatorisch, so besteht ihr Antidurchmesser-F^2-Büschel aus Rotationshyperboloiden und der zu ihm perspektive in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^E gelegene Büschel homothetischer Ellipsen aus (reellen und imaginären) Kreisen.

Zusammengefaßt ergeben sich in 1. die folgenden charakteristischen Eigenschaften der nicht zerfallenen hyperbolischen linearen Strahlenkongruenzen mit einem im endlichen gelegenen Leitgeradenpaare und in 2. die der nicht zerfallenen elliptischen linearen Kongruenzen:

1. *Der Antidurchmesser-F^2-Büschel einer nicht zerfallenen hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 mit einem im endlichen gelegenen Leitgeradenpaare wird von der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^H von H_1^1 in einem Büschel homothetischer Hyperbeln geschnitten. Die homothetischen Hyperbeln sind gleichseitig, wenn die hyperbolische lineare Kongruenz H_1^1 insbesondere orthogonal ist.*

2. *Der Antidurchmesser-F^2-Büschel einer nicht zerfallenen elliptischen linearen Strahlenkongruenz E_1^1 wird von der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^E von E_1^1 in einem Büschel homothetischer (reellen oder imaginären) Ellipsen geschnitten. Die homothetischen Ellipsen sind Kreise, wenn die elliptische lineare Kongruenz E_1^1 insbesondere rotatorisch ist.*

B. Die Achsenebenen und das gleichseitige Fokalparaboloid einer linearen Strahlenkongruenz.

9. Je zwei im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 einander zugeordnete und zueinander senkrechte Ebenen sind stets die Achsenebenen eines in Σ_{ig} enthaltenen involutorischen Ebenenbüschels erster Ordnung. Die Gesamtheit der Achsenebenen aller ∞^2 in Σ_{ig} enthaltenen involutorischen Ebenenbüschel erster Ordnung bilden die Mittelebenen[21]) oder, wie wir sie nunmehr bezeichnen, die „Achsenebenen" der linearen Kongruenz C_1^1. Jeder Kongruenzstrahl ist als Träger einer in Σ_{ig} enthaltenen Ebeneninvolution mit zwei Achsenebenen von C_1^1 inzident, wenn nicht alle seine Ebenen Achsenebenen von C_1^1 sind (**10.**). Jede solche Ebeneninvolution stellt aber eine einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung dar. Folglich hat jede einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung mit einem Kongruenzstrahle e als Doppelpunktsgerade die mit e inzidenten Achsenebenen von C_1^1 zu Symmetrieebenen. Die Fluchtebene γ von Σ_{ig} und die unendlich ferne Ebene γ'_∞ sind die mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ von Σ_{ig} inzidenten Achsenebenen von C_1^1. Die Ebene γ ist eine eigentliche, die unendlich ferne Ebene γ'_∞ eine uneigentliche Symmetrieebene der einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Fläche zweiter Ordnung mit der Doppelpunktsgerade c_∞.

Die Achsenebenen der von der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 getragenen Ebeneninvolution stehen bzw. auf den Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 senkrecht. Ferner projizieren aus jedem andern mit einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 inzidenten, also zu ihr senkrechten eigentlichen Kongruenzstrahle zwei in Σ_{ig} einander zugeordnete aufeinander senkrechte Ebenen den Mittelpunkt C von C_1^1 und den C in Σ_{ig} auf c_d zugeordneten Punkt C'_∞. Eine dieser beiden projizierenden Ebenen schneidet die Nebensymmetrieachse rechtwinklig. Somit ist jede zu einer der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 senkrechte Ebene eine Achsenebene der Kongruenz.

Alle zu einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrechten Achsenebenen dieser Kongruenz sind senkrecht zu den Strahlen des durch die Neben-

---

[21]) Die unter [5]) angeführte Abhandlung, Nr. 13.

symmetrieachse gehenden Parallelstrahlenbündels. Jeder der beiden bzw. durch die Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ gehenden Parallelstrahlenbündel enthält aber den unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞. Folglich schneidet dieser Strahl die bzw. zu den beiden Nebensymmetrieachsen senkrechten Achsenebenen von C_1^1 unter einem rechten Winkel.

Auch jede mit einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 inzidente Ebene ist eine Achsenebene dieser Kongruenz. Denn die auf der Hauptsymmetrieachse c_d in ihrem Schnittpunkte C mit der Fluchtebene γ senkrechte Achsenebene ist γ selbst. Dann wird c_d mit jeder der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ durch eine Achsenebene von C_1^1 verbunden. Und endlich stehen alle übrigen mit einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 inzidenten Ebenen je auf einem mit ihr inzidenten eigentlichen Kongruenzstrahle senkrecht.

Eine Achsenebene von C_1^1, die nunmehr weder eine Nebensymmetrieachse der Kongruenz enthält noch rechtwinklig schneidet, ist die eine Achsenebene eines involutorischen Ebenenbüschels von Σ_{ig} mit einem zu den beiden Nebensymmetrieachsen von C_1^1 windschiefen Träger. Eine solche Achsenebene trifft den zu ihr senkrechten, und demnach zu den Nebensymmetrieachsen windschiefen Kongruenzstrahl e im Mittelpunkte der von e in Σ_{ig} getragenen Punktinvolution, und dieser Mittelpunkt ist der Schnittpunkt von e mit der Fluchtebene γ von Σ_{ig}. Der Kongruenzstrahl e kann jeder zu den beiden Nebensymmetrieachsen windschiefe Strahl von C_1^1 sein. Folglich erweist sich jede weder eine Nebensymmetrieachse von C_1^1 rechtwinklig schneidende noch mit ihr inzidente Ebene, sobald sie auf einem eigentlichen Kongruenzstrahle in seinem Schnittpunkte mit der Fluchtebene γ von Σ_{ig} senkrecht steht, als eine Achsenebene dieser Kongruenz.

Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Strahlen von C_1^1 mit den bzw. zu den Strahlen senkrechten Achsenebenen der Kongruenz als die „Fluchtpunkte“ der Kongruenzstrahlen, so ist in vorstehenden Überlegungen auch gezeigt:

Jeder eigentliche Strahl einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 hat einen, ihr unendlich ferner Strahl c_∞ zwei Fluchtpunkte. Der Fluchtpunkt jedes eigentlichen Kongruenzstrahles ist dessen Schnittpunkt mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Die beiden Fluchtpunkte des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ sind die unendlich fernen Punkte der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ der Kongruenz.

10. Die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 und die unendlich ferne Ebene γ'_∞ sind korrelativ aufeinander bezogen, sobald dem Schnittpunkte jedes Kongruenzstrahles mit γ die unendlich ferne Gerade der zum Kongruenzstrahle senk-

rechten Achsenebene von C_1^1 zugeordnet wird. Jede Ebene einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 verbindet homologe Elemente beider korrelativen ebenen Felder, dagegen verbindet nur eine Ebene jeder andern Gerade von γ homologe Elemente von γ und γ'_∞. Das Erzeugnis beider korrelativen ebenen Felder ist somit ein paraboloidischer Ebenenbündel zweiter Ordnung und die von ihm eingehüllte Fläche ein die beiden Nebensymmetrieachsen von C_1^1 enthaltendes Strahlenparaboloid C^2.

Das Strahlenparaboloid C^2 ist eine beidscharig involutorische Fläche des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1, und je zwei auf C^2 gelegene in Σ_{ig} einander zugeordnete Strahlen tragen Ebenenbüschel erster Ordnung, deren einander zugeordnete Ebenen einander rechtwinklig schneiden. Je zwei auf C^2 gelegene in Σ_{ig} einander zugeordnete Strahlen sind aber mit derselben Nebensymmetrieachse von C_1^1 inzident. Und da außerdem jeder Ebene einer Nebensymmetrieachse eine zu dieser Achse senkrechte Ebene in Σ_{ig} zugeordnet ist (9.), so stehen beide Nebensymmetrieachsen von C_1^1 auf den bzw. mit ihnen inzidenten Regelstrahlen von C^2 senkrecht. Das Paraboloid C^2 erweist sich hiernach als gleichseitig. Seine Asymptotenebenen schneiden bzw. die beiden Nebensymmetrieachsen von C_1^1 rechtwinklig, und fallen sonach auf die zur Fluchtebene γ von C_1^1 senkrechten Achsenebenen von C_1^1. In anderen Worten:

Die Achsenebenen einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 umhüllen ein gleichseitiges Strahlenparaboloid C^2, dessen zwei Büschel von Asymptotenebenen bzw. von den zu den Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C_1^1 senkrechten Ebenen gebildet werden[22]).

Das gleichseitige Strahlenparaboloid C^2 heißt das gleichseitige Fokalparaboloid[23]), jede seiner Regelscharen eine Fokalregelschar und die von jeder Fokalregelschar im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 getragene Strahleninvolution eine Fokalinvolution der linearen Strahlenkongruenz. Je zwei in Σ_{ig} einander zugeordnete zueinander senkrechte Ebenen projizieren zwei einander zugeordnete Strahlen aus jeder der beiden Fokalinvolutionen. Jede der beiden Fokalinvolutionen hat zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Kongruenzstrahlen zu Doppelstrahlen. Sie sind die Fokalachsen der linearen Kongruenz C_1^1 und tragen die orthogonalen Ebeneninvolutionen des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Die hyperbolische lineare Strahlenkongruenz hat zwei elliptische Fokalinvolutionen, also zwei Paare konjugiert imaginärer Fokalachsen, die elliptische eine hyperbolische und eine elliptische Fokalinvolution und demnach ein Paar reeller und ein Paar konjugiert imaginärer Fokalachsen. Jede der

[22]) A. a. O., Nr. 14.
[23]) A. a. O., Nr. 15.

beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 ist eine Symmetrieachse, die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 die Hauptachse des gleichseitigen Fokalparaboloids. Sie trennt jedes der beiden Paare von Fokalachsen der linearen Strahlenkongruenz symmetrisch.

C. Die Achsenebenen einer linearen Strahlenkongruenz als Symmetrieebenen von Büscheln einscharig in ihr enthaltener Flächen zweiter Ordnung.

11. Jeder eigentliche Strahl einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist die Doppelpunktsgerade einer einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Fläche zweiter Ordnung. Als Punktfläche hat diese jede mit ihrer Doppelpunktsgerade inzidente Achsenebene von C_1^1 zur Symmetrieebene, als Ebenenfläche die in dem Fluchtpunkte (**9.**) der Doppelpunktsgerade auf dieser Gerade senkrechte Achsenebene von C_1^1. Sonach hat — als Fläche zweiten Grades aufgefaßt — jede einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung mit einem eigentlichen Kongruenzstrahle als Doppelpunktsgerade sowohl jede mit dem Kongruenzstrahle inzidente Achsenebene von C_1^1 wie auch die zu diesem Strahle senkrechte Achsenebene der Kongruenz zur Symmetrieebene. Dagegen hat die einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ als Doppelpunktsgerade — vorausgesetzt, daß die unendlich ferne Ebene als uneigentliche Symmetrieebene aufgefaßt wird — außer den beiden mit c_∞ inzidenten Achsenebenen noch zwei Büschel zu c_∞ senkrechter Achsenebenen von C_1^1 zu Symmetrieebenen (**9.**). Die einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ als Doppelpunktsgerade, oder kurz das einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Antidurchmesserparaboloid, ist demnach ein zerfallenes Rotationsparaboloid mit zwei unendlich fernen Rotationsachsen.

In den unendlich fernen Punkten der Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 stehen die zwei Rotationsachsen dieses einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloides auf der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 senkrecht. Sie fallen (**10.**) mit den beiden unendlich fernen Strahlen des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 der Kongruenz zusammen. Jeder eigentliche Punkt E von γ strahlt ein durch diese Ebene gehendes Hauptachsendreikant des einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloides mit der Doppelpunktsgerade c_∞ aus. Die eine Kante des Dreikants ist die Normale zu γ im Punkte E, die beiden übrigen Kanten sind die mit E und γ inzidenten Parallelen zu den beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1. Alle zur Fluchtebene γ senkrechten

Hauptachsen unseres einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloides bilden in ihrer Gesamtheit den durch die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 gehenden Bündel paralleler Strahlen. In jeder zu c_d parallelen bzw. mit c_d inzidenten Ebene liegt ein Büschel paralleler zur Fluchtebene γ senkrechten Hauptachsen dieses zerfallenen Rotationsparaboloides.

Bei einer nicht zerfallenen Fläche zweiter Ordnung fallen die Pole ihrer eigentlichen Symmetrieebenen bzw. mit den unendlich fernen Punkten der je zu den Symmetrieebenen senkrechten Strahlen zusammen. Die Pole einer Ebene für alle einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung bilden aber das Punktfeld derjenigen Ebene, die der gegebenen Ebene im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 zugeordnet ist. Somit ordnet die Kollineation von Σ_{ig} jeder eigentlichen Symmetrieebene einer einscharig in C_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen Fläche zweiter Ordnung eine zur Symmetrieebene senkrechte Ebene zu. Jede eigentliche Symmetrieebene ist folglich eine Achsenebene [24]) einer einscharig in C_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen Fläche zweiter Ordnung.

Endlich ist die unendlich ferne Ebene sowohl eine Achsenebene von C_1^1 wie auch die (uneigentliche) Symmetrieebene aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide, gleichgültig ob sie zerfallen sind oder nicht.

Zusammengefaßt ist hiernach dargetan:

Jede Symmetrieebene einer einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen zerfallenen wie nicht zerfallenen Flächen zweiter Ordnung ist eine Achsenebene der Kongruenz.

Aus der Darlegung am Anfange dieser Nummer ergibt sich jede Achsenebene einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 umgekehrt auch als eine Symmetrieebene einer einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Fläche zweiter Ordnung.

Kann aber auch jede solche Achsenebene eine Symmetrieebene einer einscharig in C_1^1 enthaltenen nicht zerfallenen Fläche zweiter Ordnung sein?

Der eingehenden Beantwortung dieser Frage sind die Untersuchungen der Nummern **12** bis **14** und **17** und **18** gewidmet.

12. Es sei e ein zu den Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 windschiefer Kongruenzstrahl und μ die zu diesem Kongruenzstrahle senkrechte Achsenebene von C_1^1. Dann kreuzt der Kongruenzstrahl e den mit der Ebene μ inzidenten Kongruenzstral m recht-

[24]) Reye, Die Geometrie der Lage, zweite Abteilg., vierte Aufl., Stuttgart 1907, S. 289, Nr. 120.

winklig. Die windschiefen Kongruenzstrahlen e, m sind die gemeinsamen reziproken Polaren für einen Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung[3]), in deren polaren Räumen die von e und m im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 getragenen Punkt- und Ebeneninvolutionen ebenfalls liegen. Da aber die mit m inzidente Ebene μ den zu ihr senkrechten Kongruenzstrahl e in einem Punkte der Fluchtebene γ von Σ_{ig} schneidet, und also der unendlich ferne Punkt von e der gemeinsame Pol von μ für alle Flächen des F^2-Büschels ist, so haben diese Flächen die gemeinsame Symmetrieebene μ.

Unser F^2-Büschel ist zugleich eine F^2-Schar und ferner ist die unendlich ferne Ebene γ'_∞ mit keinem der beiden Kongruenzstrahlen e, m inzident. Somit bilden die Mittelpunkte des F^2-Büschels eine zu ihm projektive Punktreihe. Der Ort der Mittelpunkte aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung ist nun die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}. Außerdem liegen die Mittelpunkte der Flächen des F^2-Büschels in der allen diesen Flächen gemeinsamen Symmetrieebene μ. Folglich fällt der Träger der von den Mittelpunkten der Flächen des F^2-Büschels beschriebenen Punktreihe erster Ordnung, d. h. die „Zentragerade“ des F^2-Büschels, mit der Schnittgerade $\mathfrak{m}$ von μ und γ zusammen. Jeder Punkt der zum F^2-Büschel projektiven Punktreihe auf der Zentragerade $\mathfrak{m}$ ist dabei inzident mit der zur gemeinsamen Symmetrieebene μ senkrechten Hauptachse der ihm im F^2-Büschel entsprechenden Fläche. Alle zu μ senkrechten Hauptachsen des Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit der gemeinsamen Symmetrieebene μ bilden hiernach einen zum F^2-Büschel projektiven Büschel paralleler Strahlen, dessen Ebene ε die Ebene μ in ihrer Schnittgerade $\mathfrak{m}$ mit der Fluchtebene γ von Σ_{ig} senkrecht schneidet.

Die zu μ senkrechte Hauptachse einer jeden Fläche des F^2-Büschels ist mit zwei zueinander senkrechten Achsenebenen (**11.**) von C_1^1 inzident. Außerdem liegt in dem von den Hauptachsen des F^2-Büschels gebildeten Parallelstrahlenbüschel der Kongruenzstrahl e als Hauptachse der einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Fläche zweiter Ordnung mit der Doppelpunktsgerade e, und dann umhüllen (**10.**) die Achsenenebenen von C_1^1 das gleichseitige Fokalparaboloid C^2. Somit sind jene beiden je mit den Strahlen des Parallelstrahlenbüschels inzidenten Symmetrieebenen sowohl parallel zum Kongruenzstrahle e wie auch die Elementenpaare eines involutorischen parabolischen Ebenenzylinders mit der Involutionsebene ε. Und da diese Ebene mit der Direktrixebene des parabolischen Ebenenzylinders zusammenfällt, so schneidet die zur Ebene ε senkrechte Ebene μ den parabolischen Ebenenzylinder in einer zu ihm perspektiven Strahlenparabel mit der Direktrixgerade $\mu\varepsilon = \mathfrak{m}$. Hiermit ist gezeigt:

Jede mit keiner der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ *einer linearen Strahlenkongruenz* C_1^1 *inzidente oder zu ihr senkrechte eigentliche Achsenebene* μ *der Kongruenz ist die gemeinsame Symmetrieebene eines Büschels einscharig in* C_1^1 *enthaltener Flächen zweiter Ordnung. Die zu* μ *senkrechten Hauptachsen des* F^2*-Büschels bilden einen zu ihm perspektiven Büschel paralleler Strahlen, und die Ebene* ε *dieses Parallelstrahlenbüschels steht auf der gemeinsamen Symmetrieebene* μ *in deren Schnittgerade* $\mathfrak{m}$ *mit der Fluchtebene* γ *des geschart involutorischen Raumes* Σ_{ig} *von* C_1^1 *senkrecht. Von den in* μ *gelegenen Hauptachsenpaaren der Flächen des* F^2*-Büschels wird eine zu ihm projektive involutorische Strahlenparabel mit der Direktrixgerade* $\mathfrak{m}$ *gebildet. Die Strahlen dieser Strahlenparabel sind mit den zu* μ *senkrechten Tangentenebenen des gleichseitigen Fokalparaboloides* C^2 *der Kongruenz bzw. inzident.*

Das im F^2*-Büschel enthaltene Paraboloid hat zur eigentlichen Hauptachse den Scheitelstrahl der in* μ *von den Hauptachsen der Flächen des* F^2*-Büschels umhüllten Strahlenparabel.*

13. Nunmehr sei e ein mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 — etwa mit $\mathfrak{c}_1$ — inzidenter, aber zunächst von der Hauptsymmetrieachse c_d verschiedener eigentlicher Kongruenzstrahl. Also die zu e senkrechte Achsenebene μ von C_1^1 eine eigentliche von der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} dieser Kongruenz verschiedene mit $\mathfrak{c}_1$ inzidente Ebene.

Die Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ schneidet als Scheitelstrahl (**1.**) des einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloides ${}^1F^2$ alle mit ihr inzidenten Strahlen von C_1^1 rechtwinklig, und die einander rechtwinklig kreuzenden Strahlen einer paraboloidischen Regelschar bilden die Strahlenpaare einer elliptischen Involution. Somit ist bei einer mit der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ inzidenten Achsenebene μ nicht nur der mit μ inzidente Kongruenzstrahl m, sondern auch der zu μ senkrechte e mit $\mathfrak{c}_1$ inzident. Bei unserer Annahme sind die Kongruenzstrahlen e, m eigentliche Strahlen. Sie sind wie in Nummer **12** reziprok polar für einen Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit der gemeinsamen Symmetrieebene μ.

Alle zur Achsenebene μ senkrechten Hauptachsen des Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit der gemeinsamen Achsenebene μ bilden (**12.**), da μ durch die Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ von C_1^1 geht und $\mathfrak{c}_1$ in γ liegt, einen zu dem F^2-Büschel projektiven Parallelstrahlenbüschel in der zu μ senkrechten mit $\mathfrak{c}_1$ inzidenten Achsenebene ε von C_1^1. In diesem Parallelstrahlenbüschel liegt auch (**10.**) der zu μ senkrechte Strahl $\mathfrak{r}_e$ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1. Alle Ebenen von $\mathfrak{r}_e$ sind Achsenebenen von C_1^1. Folglich liegen ihre Pole für die dem

Strahle $\mathfrak{r}_\varepsilon$ in dem F^2-Büschel entsprechende Fläche R_ε^2, d. h. für die Fläche des F^2-Büschels mit der Hauptachse $\mathfrak{r}_\varepsilon$, sowohl in den diesen Achsenebenen im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} zugeordneten Achsenebenen von C_1^1 wie auch in der unendlich fernen Gerade von μ. Jede Ebene von $\mathfrak{r}_\varepsilon$ hat also für die Fläche R_ε^2 den unendlich fernen gemeinsamen Punkt ihrer Normalen zum Pole. Sie ist somit eine Symmetrieebene von R_ε^2 und R_ε^2 selbst ein einscharig in C_1^1 enthaltenes (reelles oder imaginäres) Rotationshyperboloid mit der Rotationsachse $\mathfrak{r}_\varepsilon$.

Die mit μ inzidenten Hauptachsen der Flächen unseres F^2-Büschels bilden hiernach eine in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Strahlenparabel (**12.**). Der eine Strahlenbüschel hat den Mittelpunkt $\mathfrak{r}_\varepsilon \mu$, der andere besteht (**11.**) aus den Schnittgeraden von μ mit den zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechten Achsenebenen von C_1^1, also aus den mit μ inzidenten zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechten Geraden. Alle Flächen des F^2-Büschels haben folglich zwei je mit ihren Mittelpunkten auf $\mathfrak{c}_1$ inzidente zueinander senkrechte bzw. in μ, ε gelegene Hauptachsen. Außer μ ist also auch die in $\mathfrak{c}_1$ auf μ senkrechte Achsenebene ε von C_1^1 eine gemeinsame Symmetrieebene aller dieser Flächen. Kurz, je zwei mit einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 inzidente zueinander senkrechte eigentliche Achsenebenen μ, ε der Kongruenz bestimmen je denselben Büschel einscharig in ihr enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit den gemeinsamen Symmetrieebenen μ, ε. In ihm liegen zwei (reelle oder imaginäre) Rotationshyperboloide R_ε^2, R_μ^2. Ihre Rotationsachsen sind die mit der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ und bzw. mit μ, ε inzidenten Strahlen $\mathfrak{r}_\varepsilon, \mathfrak{r}_\mu$ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1.

Jetzt falle unser Kongruenzstrahl e auch mit der am Anfange dieser Untersuchung ausgeschlossenen Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 zusammen, also die zu e senkrechte Achsenebene μ von C_1^1 mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1, und der e rechtwinklig kreuzende Kongruenzstrahl m mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞. Dann bilden die einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit den gemeinsamen einander rechtwinklig kreuzenden reziproken Polaren c_d, c_∞ den Antidurchmesser-F^2-Büschel (**2.**) von C_1^1, und seine Flächen haben außer der gemeinsamen Symmetrieebene γ noch die c_d mit den Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ von C_1^1 verbindenden gemeinsamen Symmetrieebenen $c_d\,\mathfrak{c}_1, c_d\,\mathfrak{c}_2$. Das einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Antidurchmesserparaboloid ist (**11.**) eine Rotationsfläche mit zwei mit den beiden unendlich fernen zueinander rechtwinkligen Strahlen des Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 zusammengefallenen Rotationsachsen. Es hat außer den beiden mit diesen Rotationsachsen identischen Hauptachsen zu Hauptachsen den unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞, jeden Strahl der beiden bzw. durch die Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ von C_1^1 gehenden Parallelstrahlenbüschel der

Fluchtebene γ von Σ_{ig} und endlich alle ∞^2 zu γ normalen Strahlen. Zu letzteren zählen die mit dem unendlich fernen Punkte C'_∞ der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 inzidenten unendlich fernen Geraden. Jede zur Fluchtebene γ senkrechte Ebene enthält einen Büschel zu γ senkrechter Hauptachsen des zerfallenen Antidurchmesserparaboloides. Außer dieser zerfallenen rotatorischen Antidurchmesserfläche gibt es (4.) noch zwei rotatorische nicht zerfallene Antidurchmesserflächen, nämlich die rotatorischen Antidurchmesserhyperboloide ${}_1R^2$, ${}_2R^2$. Das Hyperboloid ${}_1R^2$ hat zur Rotationsachse die Nebensymmetrieachse c_1, das Hyperboloid ${}_2R^2$ die Nebensymmetrieachse c_2 von C_1^1.

In jeder der beiden mit der Hauptsymmetrieachse c_d inzidenten gemeinsamen Symmetrieebenen $c_d c_1$, $c_d c_2$ der Antidurchmesserflächen liegt ein Büschel der zur Fluchtebene γ senkrechten Hauptachsen des zerfallenen Antidurchmesserparaboloides und ein Büschel vom Mittelpunkte C von C_1^1 ausstrahlender Hauptachsen bzw. der Rotationshyperboloide ${}_2R^2$, ${}_1R^2$. Die Strahlen dieser beiden Büschel erster Ordnung und alle Hauptachsen des zerfallenen Antidurchmesserparaboloides, d. h. zusammengefaßt alle Hauptachsen der Antidurchmesserflächen von C_1^1, sind je Schnitte zweier zueinander senkrechten Tangentenebenen des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 der Kongruenz.

Für jede einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung sind die Strahlen von C_1^1 paarweise reziprok polar[1]). Ist diese Fläche insbesondere eins der beiden Rotationshyperboloide ${}_1R^2$, ${}_2R^2$ mit bzw. den Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 der Kongruenz als Rotationsachsen, so liegen unter den ∞^2 paarweise für die Fläche reziprok polaren Kongruenzstrahlen die ∞^1 paarweise einander rechtwinklig kreuzenden bzw. mit c_1, c_2 inzidenten Strahlen von C_1^1. Jedes der beiden einscharig in der Kongruenz enthaltenen Rotationshyperboloide ${}_1R^2$, ${}_2R^2$ mit bzw. einer der beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C_1^1 als Rotationsachse ist somit in ∞^1 Büscheln einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung gelegen. Für alle Flächen jedes solchen F^2-Büschels ist ein Paar bzw. mit c_1, c_2 inzidenter einander rechtwinklig kreuzenden Kongruenzstrahlen reziprok polar. Sie werden aus der mit ihnen inzidenten Nebensymmetrieachse durch ein Paar zueinander senkrechter gemeinsamen Symmetrieebenen der Flächen des F^2-Büschels projiziert. Das Gesamtergebnis dieser Nummer lautet also:

Je zwei zueinander senkrechte Ebenen μ, ε jeder der beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sind zwei gemeinsame Symmetrieebenen je eines Büschels einscharig in ihr enthaltener Flächen zweiter Ordnung. Für alle Flächen eines solchen F^2-Büschels sind die mit seinen beiden gemeinsamen Symmetrieebenen μ, ε bzw. inzidenten Kongruenzstrahlen m, e reziprok polar. Der F^2-Büschel enthält drei

Rotationsflächen. Von der einen Rotationsfläche fällt die Rotationsachse auf die Nebensymmetrieachse $\mu\varepsilon$, von den beiden anderen Rotationsflächen R_ε^2, R_μ^2 hat R_ε^2 den zu μ senkrechten Strahl $\mathfrak{r}_\varepsilon$ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 zur Rotationsachse und R_μ^2 den zu ε senkrechten Strahl $\mathfrak{r}_\mu$ von C^2. Beim Antidurchmesser-F^2-Büschel sind die drei in ihm enthaltenen Rotationsflächen die rotatorischen Antidurchmesserhyperboloide ${}_1R^2$, ${}_2R^2$ mit bzw. den beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 als Rotationsachsen und das zerfallene rotatorische Antidurchmesserparaboloid. — Jede in μ oder ε liegende Hauptachse einer Fläche aus einem Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit zwei in einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 aufeinander senkrechten gemeinsamen Symmetrieebenen μ, ε ist die Schnittgerade der mit ihr inzidenten Symmetrieebene und einer zu dieser senkrechten Tangentenebene von C^2. Die Hauptachsen bilden in jeder der beiden Symmetrieebenen μ, ε einen Büschel paralleler zur Schnittgerade $\mu\varepsilon$ senkrechten Strahlen und einen Strahlenbüschel erster Ordnung. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Symmetrieebene mit dem zu ihr senkrechten Strahle des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2. Das Paraboloid des F^2-Büschels hat außer der allen Flächen des Büschels gemeinsamen eigentlichen Hauptachse $\mu\varepsilon$ noch die unendlich fernen Geraden von μ, ε zu uneigentlichen Hauptachsen.

14. Je zwei einander rechtwinklig kreuzende mit einer Nebensymmetrieachse einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 inzidente Kongruenzstrahlen sind nach Nummer **13** ein Paar gemeinsamer reziproken Polaren für je einen Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit der Nebensymmetrieachse als einer gemeinsamen Hauptachse und mit zwei in ihr zueinander senkrechten gemeinsamen Symmetrieebenen. Alle diese Strahlenpaare bilden eine elliptische Involution auf der in C_1^1 enthaltenen Regelschar des gleichseitigen Paraboloides ${}^1F^2$ mit der Nebensymmetrieachse als Scheitelstrahl (**1.**). Zu jedem eigentlichen Strahle e dieser Regelschar gehören in ihr zwei den Strahl e von dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ harmonisch trennende einander rechtwinklig kreuzende und einander zugeordnete Strahlen der Involution. Diese einander zugeordneten Strahlen sind reziprok polar für einen Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit der Nebensymmetrieachse von C_1^1 als gemeinsamer Hauptachse (**13.**). Das Paraboloid dieses F^2-Büschels hat den Kongruenzstrahl e zum Scheitelstrahle. — Durch jeden mit der Nebensymmetrieachse inzidenten eigentlichen Kongruenzstrahl, also durch jeden Punkt der Nebensymmetrieachse, geht somit je ein einscharig in C_1^1 enthaltenes Paraboloid mit der Nebensymmetrieachse als Hauptachse. Je zwei solcher Paraboloide haben den Kongruenzstrahl c_∞ und sonst keinen weiteren Kon-

gruenzstrahl gemein. Denn schnitten sie einander außer in c_∞ noch in einem weiteren Kongruenzstrahle s, so müßte auf ihnen auch das Spiegelbild s' von s für die mit ihren eigentlichen Hauptachsen zusammengefallene Nebensymmetrieachse liegen. Beide Paraboloide hätten unter dieser Annahme drei windschiefe Strahlen gemein und wären demnach identisch. Die ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide mit einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 als gemeinsamer Hauptachse berühren folglich einander längs des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ oder:

In einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 bilden die einscharig in ihr enthaltenen Paraboloide mit je einer der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 als gemeinsamer Hauptachse einen Büschel. Die Paraboloide jedes dieser beiden Büschel berühren einander längs des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞.

Alle Ebenen jeder der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 schneiden das gleichseitige Fokalparaboloid C^2 der Kongruenz außer in der Nebensymmetrieachse noch in einem zweiten Strahle. Nach dem Hauptsatze von Nummer **13** ist dieser Strahl, falls er im endlichen liegt, die Rotationsachse eines einscharig in der Kongruenz enthaltenen rotatorischen Hyperboloides, und falls er in der unendlich fernen Ebene liegt, eine der beiden Rotationsachsen des einscharig in der Kongruenz enthaltenen rotatorischen zerfallenen Paraboloides. Somit ist ohne weiteres ersichtlich:

Die Strahlen des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sind die Rotationsachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Rotationsflächen zweiter Ordnung[25]). *Und zwar sind die eigentlichen Strahlen von C^2 die Rotationsachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Rotationshyperboloide, die beiden uneigentlichen zusammen die Rotationsachsen des einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloides.*

15. In den Nummern **12** und **13** haben sich alle zu keiner der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 senkrechten eigentlichen Achsenebenen der Kongruenz als Symmetrieebenen je eines Büschels einscharig in ihr enthaltenen Flächen zweiter Ordnung ergeben. Ferner sind die in jeder dieser Symmetrieebenen gelegenen Hauptachsen der Flächen eines solchen F^2-Büschels die Schnittgeraden dieser Ebenen mit den zu ihnen bzw. senkrechten Tangentenebenen des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1. Es bleibt uns noch übrig, die zu der einen oder der andern Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrechten eigentlichen Achsenebenen der Kongruenz daraufhin zu prüfen und dann auf die Sonderstellung der unendlich fernen Ebene einzugehen.

---

[25]) Die unter [5]) angeführte Abhandlung, Nr. 33.

Von zwei bzw. zu den beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 senkrechten Achsenebenen der Kongruenz — nämlich für die beiden mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 inzidenten Achsenebenen $c_d\,\mathfrak{c}_1$, $c_d\,\mathfrak{c}_2$ — ist schon nachgewiesen, daß sie zusammen mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} der Kongruenz gemeinsame Symmetrieebenen der Flächen des Antidurchmesser-F^2-Büschels von C_1^1 sind. Zugleich ist gezeigt, daß die in diesen zwei Symmetrieebenen gelegenen Hauptachsen der Antidurchmesserflächen bzw. von den zu jeder dieser Symmetrieebene senkrechten Tangentenebenen von C^2 ausgeschnitten werden (**13.**). Wie aber steht es mit den übrigen zu jeder der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ senkrechten Achsenebenen der Kongruenz?

In jeder solchen Achsenebene μ von C_1^1 — etwa in einer zur Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ von C_1^1 senkrechten — liegt, da $\mathfrak{c}_1$ zugleich ein Scheitelstrahl des in C_1^1 einscharig enthaltenen gleichseitigen Paraboloides ${}^1F^2$ ist (**1.**), ein $\mathfrak{c}_1$ senkrecht schneidender Kongruenzstrahl m. Dieser Kongruenzstrahl und der unendlich ferne (**9.**) ihn rechtwinklig kreuzende Kongruenzstrahl c_∞ werden ebenso wie in den beiden vorhergehenden Nummern zu reziproken Polaren[3]) für einen Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung gewählt. Die Flächen dieses F^2-Büschels haben die gemeinsame Symmetrieebene μ und den gemeinsamen Durchmesser m. Der Schnittpunkt M von m mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 — d. h. mit dem Orte der Mittelpunkte aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung — ist der gemeinsame Mittelpunkt der Flächen des F^2-Büschels und die mit M inzidente zur Ebene μ senkrechte Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ von C_1^1 eine den Flächen des F^2-Büschels gemeinsame Hauptachse.

Die von der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ ausstrahlenden Paare zu μ senkrechter Symmetrieebenen aller Flächen unseres F^2-Büschels bilden eine orthogonale Ebeneninvolution. Dann hat das in dem F^2-Büschel gelegene zerfallene Rotationsparaboloid mit der Doppelpunktsgerade c_∞ die zur Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 senkrechten Achsenebenen der Kongruenz zu Symmetrieebenen (**13.**). Alle mit μ inzidenten Hauptachsen der Flächen des F^2-Büschels bilden somit einen Strahlenbüschel erster Ordnung mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{c}_1\,\mu = M$ und einen Büschel paralleler zur Fluchtebene γ von Σ_{ig} senkrechten Strahlen. Da $\mathfrak{c}_1$ als eine Nebensymmetrieachse von C_1^1 zugleich eine Symmetrieachse des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 der Kongruenz ist, so enthält die zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechte Achsenebene μ von C_1^1 außer einem unendlich fernen auch einen zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechten Strahl von C^2, und dieser ist die Rotationsachse eines einscharig in C_1^1 enthaltenen Rotationshyperboloides (**13.**). In dem F^2-Büschel mit der seinen Flächen gemeinsamen zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechten Symmetrieebene μ liegt sonach ein Rotationshyper-

boloid. Dieses Rotationshyperboloid und das einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ als Doppelpunktsgerade sind die einzigen im F^2-Büschel gelegenen Rotationsflächen.

Als Ebene senkrecht zur Symmetrieachse c_1 des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 bildet die Achsenebene μ von C_1^1 eine Asymptotenebene von C^2. Zugleich bilden die mit c_1 inzidenten Ebenen einen Büschel zu μ senkrechter Tangentenebenen und die zur Symmetrieachse c_2 von C^2 senkrechten Ebenen die zu μ senkrechten Asymptotenebenen dieser Fläche. Also sind wie in den Nummern **12** und **13** die in μ gelegenen Hauptachsen aller Elemente des Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit der gemeinsamen Symmetrieebene μ die Schnittgeraden einer Tangentenebene μ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 mit den zu ihr senkrechten Tangentenebenen von C^2. D. h.:

Auch jede zu einer der beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 senkrechte eigentliche Achsenebene μ der Kongruenz ist die gemeinsame Symmetrieebene eines Büschels einscharig in C_1^1 gelegener Flächen zweiter Ordnung. Der F^2-Büschel enthält ein Rotationshyperboloid und das einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞ als Doppelpunktsgerade. Alle Flächen des F^2-Büschels sind konzentrisch und haben die zur Achsenebene μ senkrechte Nebensymmetrieachse zur gemeinsamen Hauptachse. Sie schneidet die gemeinsame Symmetrieebene μ in dem Mittelpunkte eines in ihr gelegenen orthogonalen Strahlenbüschels erster Ordnung, dessen Strahlenpaare bzw. Hauptachsenpaare der Flächen des F^2-Büschels sind. Die orthogonale Strahleninvolution und der Büschel in μ gelegener parallelen zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 senkrechten Strahlen umfaßt die von den Flächen des F^2-Büschels in die Ebene μ gesandten Hauptachsen. Jede dieser Hauptachsen ist der Schnitt der mit einer Asmyptotenebene des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 zusammengefallenen Achsenebene μ von C_1^1 und einer zu μ senkrechten Tangentenebene von C^2. Jede zu μ senkrechte Tangentenebene von C^2 geht durch eine der Hauptachsen.

Die ∞^1 Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit je einer zu derselben Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrechten gemeinsamen Symmetrieebene μ senden nach obigem in die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} die ihren Flächen gemeinsame mit der Nebensymmetrieachse zusammengefallene Hauptachse. Außerdem sendet das ihnen allen gemeinsame einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid mit der Doppelpunktsgerade c_∞ einen Büschel paralleler durch die Nebensymmetrieachse gehenden Hauptachsen in die Ebene γ. Die Flä-

chen jedes Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit je einer zu derselben Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrechten Symmetrieebene μ bestimmen also denselben Büschel paralleler zu μ senkrechten Hauptachsen. Dieser Parallelstrahlenbüschel geht durch die Nebensymmetrieachse und liegt in der Fluchtebene γ von Σ_{ig}.

16. Jeder der ∞^1 Büschel (**15.**) einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen von C_1^1 — etwa $\mathfrak{c}_1$ — als gemeinsamer Hauptachse und einer zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechten gemeinsamen Symmetrieebene μ sendet durch einen $\mathfrak{c}_1$ schneidenden Kongruenzstrahl e eine Fläche. e steht aber auf $\mathfrak{c}_1$ senkrecht, somit gibt es ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit der Hauptachse $\mathfrak{c}_1$ und dem Scheitelstrahle e. Durch zwei herausgegriffene geht ein Büschel[14]) solcher Flächen zweiter Ordnung. Dieser F^2-Büschel hat mit jedem Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit einer zu $\mathfrak{c}_1$ senkrechten gemeinsamen Symmetrieebene μ eine Fläche gemein. Folglich besteht er aus allen einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit der Hauptachse $\mathfrak{c}_1$ und dem Scheitelstrahle e. Schnitten seine Flächen einander außer im Scheitelstrahle e noch in einem zweiten zu e windschiefen Strahle x von C_1^1, so müßten sie auch durch das Spiegelbild x' von x für $\mathfrak{c}_1$ gehen. Das ist aber ausgeschlossen, da alle durch die drei windschiefen Strahlen e, x, x' gehenden Flächen zweiter Ordnung identisch sind. Unser F^2-Büschel umfaßt hiernach alle einscharig in C_1^1 enthaltenen längs e einander berührenden Flächen zweiter Ordnung. Kurz:

Alle einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 als gemeinsamer Hauptachse und einem mit ihr inzidenten eigentlichen Kongruenzstrahle e als gemeinsamem Scheitelstrahle berühren einander längs e und bilden einen F^2-Büschel.

Wie in Nummer **14** bewiesen, gilt das auch, wenn an Stelle des eigentlichen Kongruenzstrahles e der unendlich ferne Kongruenzstrahl c_∞ tritt, und der F^2-Büschel dann aus allen einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloiden mit derselben Nebensymmetrieachse von C_1^1 als gemeinsamer Hauptachse besteht.

Haben zwei Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung dieselbe Nebensymmetrieachse der Kongruenz zur gemeinsamen Hauptachse und die Flächen jedes der beiden F^2-Büschel einen andern mit dieser Nebensymmetrieachse inzidenten Kongruenzstrahl zum gemeinsamen Scheitelstrahle, so haben beide F^2-Büschel eine Fläche gemein. Sie liegen somit in einem Bündel[26]) einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen

[26]) Die unter [3]) angeführte Abhandlung, Nr. 4.

zweiter Ordnung. Alle Flächen des F^2-Bündels haben dieselbe Nebensymmetrieachse von C_1^1 zur Hauptachse, und er selbst sendet durch jeden mit der Nebensymmetrieachse inzidenten Strahl von C_1^1 einen F^2-Büschel. Längs dieses Strahles berühren die Flächen des F^2-Büschels einander. Der Strahl selbst ist der gemeinsame Scheitelstrahl der im F^2-Büschel enthaltenen Flächen. Also gilt:

Alle einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit derselben Nebensymmetrieachse von C_1^1 als Hauptachse bilden einen Bündel. Seine Flächen lassen sich sowohl zu ∞^1 Büscheln je mit zwei in der Nebensymmetrieachse aufeinander senkrechten gemeinsamen Symmetrieebenen zusammenfassen (15.), *wie auch zu ∞^1 Büscheln mit je einer zu der Nebensymmetrieachse senkrechten gemeinsamen Symmetrieebene. Durch jeden mit der Nebensymmetrieachse inzidenten Kongruenzstrahl sendet der F^2-Bündel einen Büschel längs dieses Strahles einander berührender Flächen. Sie haben den Kongruenzstrahl zum gemeinsamen Scheitelstrahle.*

In jedem Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener, längs eines Kongruenzstrahles einander berührenden Flächen zweiter Ordnung liegt die in C_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung mit dem Kongruenzstrahle als Doppelpunktsgerade[27]). Ferner besteht im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 die in C_1^1 enthaltene Regelschar der Polfläche eines F^2-Bündels aus den Doppelpunktsgeraden der zerfallenen Flächen des Bündels [16]). Demnach schließen wir weiter:

Der Polar-F^2-Bündel eines jeden der beiden einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide ${}^1F^2$, ${}^2F^2$ mit je einer der beiden Nebensymmetrieachsen von C_1^1 als Hauptachse besteht im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 aus allen einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit der andern Nebensymmetrieachse von C_1^1 als Hauptachse. Die Polar-F^2-Bündel der gleichseitigen Paraboloide ${}^1F^2$, ${}^2F^2$ im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ schneiden einander im Antidurchmesser-F^2-Büschel von C_1^1.

Nach Nummer 14 bilden die Rotationsachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Rotationsflächen zweiter Ordnung die beiden Regelscharen des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1. Somit gehen die Polar-F^2-Bündel der gleichseitigen Paraboloide ${}^1F^2$, ${}^2F^2$ im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 durch alle einscharig in C_1^1 enthaltenen Rotationsflächen zweiter Ordnung, deren Rotationsachsen bzw. mit den Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 der Kongruenz inzident sind (1.).

---

[27]) Die unter [4]) angeführte Abhandlung, Nr. 16.

17. Die mit einer der beiden Nebensymmetrieachsen einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 — etwa mit $\mathfrak{c}_1$ — inzidenten Kongruenzstrahlen bilden die in C_1^1 enthaltene Regelschar eines gleichseitigen Paraboloides. Jeder Strahl dieser Regelschar ist der gemeinsame Scheitelstrahl (**16.**) eines Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit der gemeinsamen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$. Und der den gemeinsamen Scheitelstrahl rechtwinklig kreuzende Regelstrahl wird mit jenem durch ein scheitelrechtes Hyperboloid [10]) verbunden. — Die ∞^1 einander rechtwinklig kreuzenden Strahlen der gleichseitig paraboloidischen Regelschar bilden auf ihr die Strahlenpaare einer elliptischen Involution. Folglich gibt es ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltene scheitelrechte Hyperboloide mit der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ als gemeinsamer Hauptachse. Unter ihnen liegt als Grenzfall (**1.**) das einscharig in C_1^1 enthaltene gleichseitige Paraboloid ${}^2F^2$, dessen eigentliche Hauptachse mit $\mathfrak{c}_1$ zusammenfällt. Durch irgend zwei dieser scheitelrechten Hyperboloide geht ein Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung [14]). Er liegt im Bündel (**16.**) der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit der gemeinsamen Hauptachse $\mathfrak{c}_1$, und seine Flächen schneiden $\mathfrak{c}_1$ in den Elementenpaaren derselben Punktinvolution wie die einander rechtwinklig kreuzenden Strahlen unserer gleichseitig paraboloidischen Regelschar. Alle Flächen des F^2-Büschels sind somit einscharig in C_1^1 enthaltene scheitelrechte Hyperboloide. Die einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ der Kongruenz als Hauptachse bilden aber (**16.**) im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 den Polar-F^2-Bündel des einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloides ${}^1F^2$ mit der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_2$ als eigentlicher Hauptachse. Folglich ist dargetan:

Im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 liegt in dem Polarbündel jedes der beiden einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide mit bzw. einer der beiden Nebensymmetrieachsen von C_1^1 als Hauptachse ein Büschel scheitelrechter Hyperboloide.

Da je zwei F^2-Büschel eines F^3-Bündels einander in einer Fläche zweiter Ordnung schneiden, so ist im vorstehenden zugleich gezeigt:

Alle Büschel einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit einer Nebensymmetrieachse von C_1 als gemeinsamer Hauptachse gehen, wofern in ihnen nicht das einscharig in C_1^1 enthaltene gleichseitige Paraboloid mit dieser Nebensymmetrieachse als eigentlicher Hauptachse liegt, durch je ein scheitelrechtes Hyperboloid.

Nur der Antidurchmesser-F^2-Büschel als Schnitt (**16.**) der beiden Bündel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit je einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 als gemeinsamer Hauptachse geht durch zwei scheitelrechte Hyperboloide (**4.**).

Jedes der beiden einscharig in C_1^1 enthaltenen Rotationshyperboloide mit bzw. einer Nebensymmetrieachse von C_1^1 als Rotationsachse liegt in den ∞^1 Büscheln einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit der Nebensymmetrieachse als gemeinsamer Hauptachse und mit zwei in ihr aufeinander senkrecht stehenden gemeinsamen Symmetrieebenen (**13.**). Je zwei mit der Nebensymmetrieachse inzidente einander rechtwinklig kreuzende Kongruenzstrahlen sind nun für das einscharig in C_1^1 enthaltene Rotationshyperboloid mit der Nebensymmetrieachse als Hauptachse reziprok polar. Ferner geht, wie wir gesehen haben, durch je zwei einander rechtwinklig kreuzende mit einer Nebensymmetrieachse inzidente Kongruenzstrahlen, ein einscharig in C_1^1 enthaltenes scheitelrechtes Hyperboloid. Folglich ist jedes einscharig in C_1^1 enthaltene scheitelrechte Hyperboloid, das durch zwei einander rechtwinklig kreuzende mit derselben Nebensymmetrieachse von C_1^1 inzidente Kongruenzstrahlen geht, für das einscharig in C_1^1 enthaltene Rotationshyperboloid mit dieser Nebensymmetrieachse als Rotationsachse autopolar. Alle einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide mit derselben Nebensymmetrieachse von C_1^1 als gemeinsamer Hauptachse bilden aber nach dem ersten Hauptsatze dieser Nummer einen Büschel. Somit ergibt sich:

Jeder der beiden Bündel einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit bzw. einer der beiden Nebensymmetrieachsen von C_1^1 als gemeinsamer Hauptachse wird durch die Korrelation des polaren F^2-Gebüsches $\Pi(F^2)$ von C_1^1 in einen polaren F^2-Bündel verwandelt, in dem der Büschel scheitelrechter Hyperboloide zur Polfläche das Rotationshyperboloid mit der Nebensymmetrieachse als Rotationsachse hat.

Die beiden einscharig in C_1^1 enthaltenen Rotationshyperboloide ${}_1R^2$, ${}_2R^2$ mit bzw. den Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 als Rotationsachsen sind (**4.**) Antidurchmesserflächen der Kongruenz. Für beide ist jede Durchmesserfläche von C_1^1, d. h. jedes einscharig in C_1^1 enthaltene gleichseitige Paraboloid, autopolar (**2.**). Da nun die beiden Rotationshyperboloide ${}_1R^2$, ${}_2R^2$ auch für alle einscharig in C_1^1 enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide autopolar sind, die bzw. mit ihnen zusammen dieselbe Nebensymmetrieachse von C_1^1 zur Hauptachse haben, so verbindet im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 der Polarbündel von ${}_1R^2$ den Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener scheitelrechten Hyperboloide mit der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_1$ als gemeinsamer Hauptachse mit dem Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener gleichseitigen Paraboloide. Und dieser Büschel gleichseitiger Paraboloide liegt zugleich zusammen mit dem Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener scheitelrechten Hyperboloide mit der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}_2$ als gemeinsamer Hauptachse im Polarbündel von ${}_2R^2$ in $\Pi(F^2)$. Beide Polar-F^2-Bündel sind

bestimmt durch den ihnen gemeinsamen Durchmesser-F^2-Büschel von C_1^1 und eines der ∞^1 bzw. in ihnen gelegenen scheitelrechten Hyperboloide.

18. Jede eigentliche Achsenebene einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist nach den Ergebnissen der Nummern **12**, **13** und **15** die gemeinsame Symmetrieebene eines Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung. Im Gegensatze dazu ist die unendlich ferne Ebene (**9.**) als Achsenebene von C_1^1 eine gemeinsame Symmetrieebene eines Bündels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung, nämlich die gemeinsame uneigentliche Symmetrieebene der ∞^2 einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide.

In der unendlich fernen Ebene ist der unendlich ferne Kongruenzstrahl c_∞ sowie jeder, mit dem unendlich fernen Punkte C'_∞ der Hauptsymmetrieachse c_d inzidente unendlich ferne Strahl eine uneigentliche Hauptachse des einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloides mit c_∞ als Doppelpunktsgerade (**13.**), jeder der beiden unendlich fernen Strahlen des gleichseitigen Fokalparaboloids C^2 von C_1^1 eine seiner beiden uneigentlichen Rotationsachsen. Alle anderen unendlich fernen Strahlen sind die Schnittgeraden der unendlich fernen Ebene mit je einer auf keiner Nebensymmetrieachse von C_1^1 senkrechten eigentlichen Achsenebene der Kongruenz. Eine solche Achsenebene ist nun eine gemeinsame Symmetrieebene eines Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung, dessen Paraboloid nach den Nummern **12** und **13** die unendlich ferne Gerade der Achsenebene zu einer uneigentlichen Hauptachse hat. Unter Berücksichtigung dieser Paraboloide, sowie des einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloides mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ als Doppelpunktsgerade, erweist sich also jeder Strahl der unendlich fernen Ebene als eine Hauptachse je eines der ∞^2 einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide. In einer eigentlichen Achsenebene von C_1^1 als gemeinsamer Symmetrieebene eines Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung bilden aber die mit ihr inzidenten Hauptachsen der Flächen des Büschels eine unter Umständen in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallene Strahlenparabel. Demnach nimmt die unendlich ferne Ebene, da jeder ihrer Strahlen eine Hauptachse je eines einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloides ist, eine Sonderstellung unter den ∞^2 Achsenebenen von C_1^1 ein.

D. Der quadratische Komplex der Hauptachsen aller einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung.

19. Nach den Darlegungen der Nummern **11** bis **13** und **18** sind die Symmetrieebenen der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung und die Achsenebenen von C_1^1 identisch. Umgekehrt fällt jedoch jede eigentliche Achsenebene der Kongruenz mit

der gemeinsamen Symmetrieebene eines Büschels, die unendlich ferne Ebene als Achsenebene mit der uneigentlichen Symmetrieebene eines Bündels solcher Flächen zusammen, nämlich mit der uneigentlichen Symmetrieebene des Bündels einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide. Der Schnittstrahl je zweier zueinander senkrechten Achsenebenen ist dabei stets eine Hauptachse einer einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung. Von den Achsenebenen der Kongruenz wird aber das von ihr bestimmte gleichseitige Fokalparaboloid C^2 umhüllt (**10.**). D. h.:

Die Schnittgeraden der zueinander rechtwinkligen Tangentenebenen des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sind mit den Hauptachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung identisch.

Durch den dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 aus einem gegebenen Punkte $\mathfrak{X}$ umbeschriebenen Ebenenkegel zweiter Ordnung ist bekanntlich ein mit ihm konzentrischer Strahlenkegel zweiter Ordnung bestimmt, dessen Strahlen die Schnittgeraden der zueinander senkrechten Ebenen des Ebenenkegels sind. Auf dem Strahlenkegel liegt der mit dem Punkte $\mathfrak{X}$ inzidente Strahl x von C_1^1. Das Paraboloid C^2 ist aber das gemeinsame gleichseitige Fokalparaboloid von C_1^1 und ∞^1 anderen linearen Strahlenkongruenzen[28]). Fällt C_1^1 nacheinander auf jede von ihnen, so fällt dabei der Strahl x von C_1^1 auf jeden Strahl des Strahlenkegels.

Das gleichseitige Paraboloid C^2 trägt außer den beiden Fokalinvolutionen von C_1^1 auch die jeder andern linearen Kongruenz mit dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2. Alle diese Kongruenzen werden durch die Korrelation des polaren Raumes von C^2 in sich übergeführt[29]). Die in einer gegebenen Ebene gelegenen Schnittstrahlen je zweier zueinander senkrechten Tangentenebenen von C^2 bilden somit eine Strahlenkurve zweiter Ordnung. Da die unendlich ferne Ebene das gleichseitige Fokalparaboloid C^2 berührt, und jede unendlich ferne Gerade als Schnitt der unendlich fernen Ebene mit einer zu ihr senkrechten Tangentenebene von C^2 angesehen werden kann, so ist diese Strahlenkurve eine Strahlenparabel. In anderen Worten:

Von den Schnittstrahlen der zueinander senkrechten Tangentenebenen des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 wird ein durch C_1^1 gehender quadratischer Strahlenkomplex Γ^2 gebildet. Er sendet in jede Ebene eine Strahlenparabel. Der quadratische Komplex Γ^2 ist singulär. In ihm liegt das unendlich ferne Strahlenfeld (**18.**),

[28]) Die unter [5]) angeführte Abhandlung, Nr. 36.

[29]) Das unter [1]) angeführte Werk, Nr. 103 und die unter [3]) angeführte Abhandlung, Nr. 39.

der die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 enthaltende Parallelstrahlenbündel und beidscharig das gleichseitige Fokalparaboloid C^2.

Die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 ist der Ort der Mittelpunkte aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung. Folglich sind die von ihren Punkten ausstrahlenden Kegel von Γ^2 gleichseitig, und daraus ergibt sich ohne weiteres:

Jede in einer Tangentenebene des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 gelegene Strahlenparabel des quadratischen Komplexes Γ^2 hat die Schnittgerade dieser Ebene mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 zur Direktrix.

20. In einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sind ein gegebener eigentlicher Strahl e und der unendlich ferne Strahl c_∞ die gemeinsamen reziproken Polaren für einen Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung [3]). Sein Basisvierseit hat die (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1 und zwei bzw. zu u, v parallele (reelle oder konjugiert imaginäre) Kongruenzstrahlen zu Gegenseiten. Die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 ist eine gemeinsame Durchmesserebene, der Schnittpunkt $e\gamma$ des Kongruenzstrahles e mit der Fluchtebene γ der gemeinsame Mittelpunkt aller Flächen des F^2-Büschels. Von dem Punkte $e\gamma$ strahlt folglich ein Hauptachsentripel jeder Fläche des F^2-Büschels aus. Die Strahlen dieser Tripel liegen als Elemente des quadratischen Komplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung (**19.**) auf dem vom gemeinsamen Mittelpunkte $e\gamma$ ausstrahlenden Komplexkegel. Für jede einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte $e\gamma$ sind die Kongruenzstrahlen e, c_∞ reziprok polar. Sonach umfaßt unser Büschel konzentrischer Flächen alle einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit dem gemeinsamen Mittelpunkte $e\gamma$. Jeder Strahl des vom Punkte $e\gamma$ ausstrahlenden gleichseitigen Komplexkegels von Γ^2 ist eine Hauptachse einer solchen Fläche. Kurz:

Der unendlich ferne Strahl c_∞ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 bildet mit jedem andern Kongruenzstrahle e ein Paar gemeinsamer reziproken Polaren je eines Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener konzentrischen Flächen zweiter Ordnung. Ihr gemeinsamer Mittelpunkt ist mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} inzident. Auf dem von diesem Mittelpunkte $e\gamma$ ausstrahlenden gleichseitigen Kegel des Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung liegt ein Hauptachsendreikant jeder Fläche des F^2-Büschels.

Dem von einem gegebenen eigentlichen Punkte E der Fluchtebene γ ausstrahlenden gleichseitigen Kegel des Hauptachsenkomplexes Γ^2 ist ein Hauptachsendreikant des einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotations-

paraboloides mit der Doppelpunktsgerade c_∞ einbeschrieben (**11.**), ferner auch das Hauptachsendreikant des einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Hyperboloides mit dem durch den Punkt E gehenden Kongruenzstrahle e als Doppelpunktsgerade. Jenes Hauptachsendreikant hat zu Kanten die Normale zur Fluchtebene γ im Punkte E und die beiden mit diesem Punkte E inzidenten Parallelen zu den Nebensymmetrieachsen c_1, c_3 von C_1^1, dieses Hauptachsendreikant den Kongruenzstrahl e und die mit dem Punkte E inzidenten Normalen zu diesem Kongruenzstrahle in den mit ihm inzidenten Achsenebenen von C_1^1. Hiernach ist der vom Punkte E von γ ausstrahlende gleichseitige Kegel des quadratischen Komplexes Γ^2 unschwer zu konstruieren.

21. Der in Nr. **20** ausgesprochene Lehrsatz für die von den eigentlichen Punkten der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ausgehenden Strahlen des quadratischen Hauptachsenkomplexes Γ^2 bedarf einer Ergänzung für die von den unendlich fernen Punkten von γ ausgehenden, also mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ inzidenten Strahlen von Γ^2 als Hauptachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide.

Bei einem Punkte $\mathfrak{X}_\infty$ des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ umhüllen die mit ihm inzidenten Achsenebenen von C_1^1 einen dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2 von C_1^1 umbeschriebenen und dabei durch die Fluchtebene γ von Σ_{ig} und durch die unendlich ferne Ebene gehenden parabolischen Ebenenzylinder (**10.**) Seine Direktrixebene $\varepsilon_{\mathfrak{X}_\infty}$ ist eine Ebene von c_∞. In ihr bilden die Schnittgeraden seiner zueinander senkrechten Ebenen einen Büschel paralleler mit dem Punkte $\mathfrak{X}_\infty$ inzidenten Strahlen. Jeder Strahl dieses Parallelstrahlenbüschels ist zusammen mit einem durch ihn bestimmten Paare zueinander senkrechter Strahlen aus dem zum parabolischen Ebenenzylinder perspektiven unendlich fernen Strahlenbüschel erster Ordnung ein Hauptachsentripel je eines einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloides. Alle diese Paraboloide berühren die unendlich ferne Ebene im Punkte $\mathfrak{X}_\infty$, und ihre von ihm ausgehenden Hauptachsentripel sind dem vom Punkte $\mathfrak{X}_\infty$ ausgehenden Kegel des quadratischen Komplexes Γ^2 einbeschrieben. Also schließen wir:

Der von jedem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{X}_\infty$ der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongzuenz C_1^1 ausstrahlende Kegel des quadratischen Komplexes Γ^2 der Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung zerfällt in einen in einer Ebene $\varepsilon_{\mathfrak{X}_\infty}$ des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ gelegenen Parallelstrahlenbüschel mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{X}_\infty$ und in den von $\mathfrak{X}_\infty$ ausstrahlenden unendlich fernen Strahlenbüschel erster Ordnung.

Die Ebene $\varepsilon_{\mathfrak{X}_\infty}$ des durch den unendlich fernen Punkt $\mathfrak{X}_\infty$ der Fluchtebene γ von Σ_{ig} gehenden Büschels paralleler Strahlen des Komplexes Γ^2 heiße dem Punkte $\mathfrak{X}_\infty$ durch „den quadratischen Komplex Γ^2 zugeordnet".

Unser Beweis des soeben ausgesprochenen Lehrsatzes versagt für die beiden Schnittpunkte des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ mit dem gleichseitigen Fokalparaboloide C^2, d. h. für die unendlich fernen Punkte der Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1. Jede von ihnen ist die gemeinsame Hauptachse eines Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener längs c_∞ einander berührenden Paraboloide (**14.**) und liegt in einem Büschel paralleler Hauptachsen des in diesem F^2-Büschel enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloides (**11.**). Die den unendlich fernen Punkten jeder der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ von C_1^1 durch den quadratischen Komplex Γ^2 zugeordneten Ebenen fallen somit beide mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 zusammen.

22. Es sei $\mathfrak{X}_\infty$ ein unendlich ferner Punkt der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 und $\varepsilon_{\mathfrak{X}_\infty}$ die ihm durch den quadratischen Komplex Γ^2 zugeordnete Ebene (**21.**). Sind dann zwei Paraboloide mit je einer mit $\mathfrak{X}_\infty$ und $\varepsilon_{\mathfrak{X}_\infty}$ inzidenten Hauptachse aus dem Bündel einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide gegeben, so besteht der sie verbindende F^2-Büschel aus lauter einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloiden, und jedes hat eine mit dem Punkte $\mathfrak{X}_\infty$ und der Ebene $\varepsilon_{\mathfrak{X}_\infty}$ inzidente Hauptachse. Der in der Ebene $\varepsilon_{\mathfrak{X}_\infty}$ enthaltene Büschel paralleler Hauptachsen des Paraboloidenbüschels enthält außer dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ keinen weiteren Strahl von C_1^1. Seine Flächen sind im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)^2$ von C_1^1 parabolisch involutorisch gepaart und seine beiden zerfallenen Flächen demnach mit dem einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloide mit der unendlich fernen Doppelpunktsgerade c_∞ vereint.

Alle Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide gehen außer durch den unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞ noch durch einen weiteren Kongruenzstrahl. Bei unserm Paraboloidenbüschel insbesondere sind beide Kongruenzstrahlen in c_∞ vereint. Seine Paraboloide berühren einander somit längs c_∞. Da ferner jedes seiner Paraboloide eine Hauptachse in den Parallelstrahlenbüschel der Ebene $\varepsilon_{\mathfrak{X}_\infty}$ mit dem unendlich fernen Punkt $\mathfrak{X}_\infty$ sendet, so berührt die unendlich ferne Ebene im Punkte $\mathfrak{X}_\infty$ alle Paraboloide des Büschels. Diese Paraboloide haben mit der Ebene $\varepsilon_{\mathfrak{X}_\infty}$ außer c_∞ einen Scheitelstrahl gemein, und die Gesamtheit der Scheitelstrahlen bildet einen Parallelstrahlenbüschel. Der unendlich ferne Mittelpunkt des Parallelstrahlenbüschels ist folglich der gemeinsame Berührungspunkt aller den Büschel bildenden Paraboloide mit der Ebene $\varepsilon_{\mathfrak{X}_\infty}$. Hiernach gilt:

Jeder unendlich ferne Punkt $\mathfrak{X}_\infty$ der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist der gemeinsame Mittelpunkt der Hauptachsentripel von ∞^1 einscharig in C_1^1 enthaltenen einen Büschel bildenden Paraboloiden. Diese Paraboloide berühren einander längs des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞. Sie berühren außerdem die unendlich ferne Ebene im Punkte $\mathfrak{X}_\infty$ und die dem Punkte $\mathfrak{X}_\infty$ durch den quadratischen Hauptachsenkomplex Γ^2 zugeordnete Ebene $\varepsilon_{\mathfrak{X}_\infty}$ in demjenigen Punkte von c_∞, der $\mathfrak{X}_\infty$ für den unendlich fernen imaginären Kugelkreis zugeordnet ist. Die von den Paraboloiden in die Ebene $\varepsilon_{\mathfrak{X}_\infty}$ gesandten Hauptachsen bilden einen Parallelstrahlenbüschel mit dem Mittelpunkte $\mathfrak{X}_\infty$.

Bei dem Büschel längs c_∞ einander berührender einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide können der unendlich ferne Kongruenzstrahl c_∞ und der mit ihm vereinte Strahl von C_1^1 als reziproke Polaren für alle Paraboloide des Büschels angesehen werden. Unter diesem Gesichtspunkte folgt aus den Untersuchungen der Nummern **20** und **21** der umfassende Satz:

Jeder Punkt $\mathfrak{X}$ der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist der gemeinsame Mittelpunkt eines Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener konzentrischen Flächen zweiter Ordnung. In den von dem Punkte $\mathfrak{X}$ ausstrahlenden gleichseitigen Kegel des quadratischen Komplexes Γ^2 der Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung sendet jede Fläche des Büschels ein Hauptachsentripel. Für alle Flächen des F^2-Büschels sind der mit dem Punkte $\mathfrak{X}$ inzidente und der unendlich ferne Kongruenzstrahl c_∞ reziprok polar. Das Gebüsch einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung läßt sich durch ∞^2 Büschel konzentrischer Flächen zweiter Ordnung erschöpfen. Jeder von ihnen geht durch das zerfallene einscharig in C_1^1 enthaltene Rotationsparaboloid mit der Doppelpunktsgerade c_∞.

23. Eine Ebene ε heiße mit einer Achsenebene μ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 „orthogonal verknüpft", sobald sie auf μ in der Schnittgerade $\mathfrak{m}$ von μ mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 senkrecht steht. Jede Achsenebene μ von C_1^1 bestimmt eine mit ihr orthogonal verknüpfte Ebene ε. Eine Ausnahme bilden erstens die Asymptotenebenen des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1. Sie sind alle mit der Fluchtebene γ von Σ_{ig} orthogonal verknüpft. Eine zweite Ausnahme bilden die Ebenen des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞. Sie sind, da die unendlich ferne Ebene und γ einander rechtwinklig schneiden, alle mit der unendlich fernen Ebene orthogonal verknüpft. Eine letzte Ausnahme bildet die Fluchtebene γ. Als Scheitelebene von C^2 berührt sie diese Fläche im Mittelpunkte C von C_1^1

Sonach ist jede mit einer Scheiteltangente oder einem Scheitelstrahle von C^2 inzidente zu γ senkrechte Ebene, d. h. jede Ebene der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1, mit γ orthogonal verknüpft.

Jedes Paar zueinander senkrechter Ebenen einer jeden der beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C_1^1 sind wechselseitig miteinander orthogonal verknüpft. Jede Ebene eines solchen Paares ist ja eine Achsenebene (9.) von C_1^1 und die andere sonach die mit ihr orthogonal verknüpfte Ebene der Kongruenz. Außer den beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 gibt es, wie wir gleich zeigen werden, noch ∞^1 weitere Geraden c_m, deren Ebenen mit Achsenebenen von C_1^1 orthogonal verknüpft sind.

Die mit einer gegebenen Gerade m der Fluchtebene γ inzidente Achsenebene μ von C_1^1 bestimmt (9.) einen zu ihr senkrechten m rechtwinklig schneidenden Kongruenzstrahl e. Geht die Gerade m in γ nacheinander in jeden Strahl des m enthaltenden Büschels paralleler Strahlen über, und bleibt dabei μ die mit m inzidente Achsenebene von C_1^1, so beschreibt der zu μ senkrechte m rechtwinklig schneidende Kongruenzstrahl e eine durch die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 und den unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞ gehende paraboloidische Regelschar $\mathfrak{R}^2$. Sie ist, da c_∞ und c_d einander rechtwinklig kreuzen, gleichseitig. Die Leitebenen der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ bilden die zu den parallelen Strahlen m senkrechten, die Leitebenen der Leitschar $\mathfrak{L}^2$ von $\mathfrak{R}^2$ die mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞ inzidenten, also zur Fluchtebene γ parallelen Ebenen. Alle Strahlen der gleichseitig paraboloidischen Leitschar $\mathfrak{L}^2$ schneiden die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 rechtwinklig, insbesondere der zu allen Strahlen von $\mathfrak{R}^2$ rechtwinklige Leitstrahl c_m. Er ist parallel zu m. Durch ihn gehen folglich alle Ebenen ε, die je mit m und den Parallelen zu m in γ inzident sind und sonach auf den mit diesen Geraden bzw. inzidenten Achsenebenen μ von C_1^1 senkrecht stehen. Jede nicht zu einer der beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 parallele Gerade m von γ bestimmt einen solchen Strahl c_m. Von den beiden Nebensymmetrieachsen, und folglich auch von den in γ zu ihnen parallelen Geraden, ist aber schon gezeigt, daß jede mit ihnen inzidente Achsenebene mit einer Ebene der betreffenden Nebensymmetrieachse orthogonal verknüpft ist. Folglich ist dargetan:

Die ∞^2 mit den Achsenebenen μ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 orthogonal verknüpften Ebenen ε ordnen sich zu ∞^1 Ebenenbüscheln erster Ordnung, deren Achsen c_m die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 rechtwinklig schneiden. Zwei dieser Ebenenbüschel c_m haben bzw. die Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 von C_1^1 zu Achsen. Jede Ebene der Hauptsymmetrieachse c_d ist mit einer der Geraden c_m inzident.

Alle Hauptachsen einer einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung sind (19.) die Schnitte aufeinander senkrechter Tangentenebenen

des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 der Kongruenz. Und in jeder nich zur Fluchtebene γ parallelen mit einer Achsenebene μ von C_1^1 orthogona verknüpften Ebene ε liegt nach den Nummern **12**, **13** und **15** ei Büschel paralleler zur Schnittgerade $\mathfrak{m}$ von ε mit der Fluchtebene γ senk rechten Hauptachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweite Ordnung. Folglich ist jeder Punkt auf einer der soeben gefundene Geraden $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ der Mittelpunkt eines C^2 umbeschriebenen Kegels zweite Ordnung des Hachette[30]), d. h. der Mittelpunkt eines Strahlenkegels zweite Ordnung, dessen zueinander senkrechte Tangentenebenen einander in de Strahlen zweier Strahlenbüschel erster Ordnung schneiden. Die Ebene de einen der beiden Strahlenbüschel steht auf der mit dem Mittelpunkte eine solchen Kegels inzidenten Gerade $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ senkrecht. In der zu γ paralleler Ebene ε der Gerade $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ liegt also auch ein Büschel paralleler zu $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ senk rechten Hauptachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweite Ordnung. Zusammengefaßt haben wir das Ergebnis:

Jede Gerade $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ *ist als Achse eines Büschels mit Achsenebenen eine linearen Strahlenkongruenz* C_1^1 *orthogonal verknüpfter Ebenen zugleich die im endlichen gelegene Leitgerade einer helikoidischen linearen Strahlen kongruenz im quadratischen Hauptachsenkomplexe* Γ^2 *der einscharig in* C_1^1 *enthaltenen Flächen zweiter Ordnung. Der quadratische Komplex* Γ^2 *wird durch die* ∞^1 *helikoidischen linearen Kongruenzen mit den Leitgeraden* $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ *erschöpft.*

24. Mit jedem Punkte $\mathfrak{X}$ einer der beiden Nebensymmetrieachsen $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 — etwa mit $\mathfrak{c}_1$ — ist außer dieser Nebensymmetrieachse noch ein Strahl $\mathfrak{x}$ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 von C_1^1 inzident (**10.**). Die Ebenen des Strahles $\mathfrak{x}$ sind Achsenebenen μ von C_1^1. Ist der Punkt $\mathfrak{X}$ — was wir nunmehr voraussetzen — nicht der Mittelpunkt von C_1^1, so steht der Strahl $\mathfrak{x}$ nicht auf der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} der Kongruenz senkrecht. Folglich bilden die zu den Ebenen von $\mathfrak{x}$ in ihren Schnittgeraden mit γ bzw. senkrechten Ebenen, also die mit diesen Achsenebenen μ von C_1^1 orthogonal verknüpften Ebenen ε, einen durch γ gehenden Ebenenkegel zweiter Ordnung Ξ^2. In jeder mit einer Achsenebene von C_1^1 orthogonal verknüpften Ebene liegt aber ein zu ihrer Schnittgerade $\mathfrak{m}$ mit γ paralleler, mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 inzidenter Strahl $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$, durch den nur mit Achsenebenen μ von C_1^1 orthogonal verknüpfte Ebenen gehen (**23.**). Jede der Geraden $\mathfrak{c}_\mathfrak{m}$ wird somit aus dem Punkte $\mathfrak{X}$ und aus der Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz durch zwei die Fluchtebene γ in parallelen Geraden schneidende Ebenen projiziert. Beziehen wir nunmehr den die

[30]) Die unter [5]) angeführte Abhandlung, Nr. 42.

Geraden c_m aus dem Punkte $\mathfrak{X}$ projizierenden Ebenenkegel zweiter Ordnung Ξ^2 und den sie aus der Hauptsymmetrieachse c_d projizierenden Ebenenbüschel erster Ordnung derart aufeinander, daß je zwei die nämlichen Geraden c_m projizierender Ebenen einander entsprechen, so schneiden hiernach homologe Ebenen die Fluchtebene γ in homologen Strahlen kongruenter Strahlenbüschel erster Ordnung. Zwei kongruente Strahlenbüschel erster Ordnung sind aber projektiv. Folglich auch der bzw. zu dem einen Strahlenbüschel perspektive Ebenenkegel zweiter Ordnung Ξ^2 und der zu dem andern perspektive Ebenenbüschel erster Ordnung c_d. Beide projektiven Gebilde haben keine Deckelemente. Als geometrischer Ort der Geraden c_m ergibt sich folglich eine kubische Regelschar $\mathfrak{C}^3$. Ihr Träger, die kubische Regelfläche C^3, hat die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 als Doppelpunktsgerade und den unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞ als einfache Leitgerade.

Der von dem Punkte $\mathfrak{X}$ der Nebensymmetrieachse c_1 von C_1^1 ausstrahlende Kegel des quadratischen Hauptachsenkomplexes Γ^2 der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung ist in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallen. Die Ebene des einen Strahlenbüschels steht in $\mathfrak{X}$ auf c_1 senkrecht (**15.**), die Ebene ξ des andern enthält c_1 und steht senkrecht (**13.**) auf dem mit c_1 inzidenten Strahle χ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2. In letzterer Ebene liegt außer der auf der kubischen Fläche C^3 gelegenen Nebensymmetrieachse c_1 noch ein Kegelschnitt ξ^2 von C^3. Jeder Regelstrahl c_m von C^3 schneidet die Doppelpunktsgerade c_d dieser Fläche rechtwinklig und steht senkrecht (**23.**) auf einem von c_1 verschiedenen Strahle des Strahlenbüschels erster Ordnung $(\mathfrak{X}\,\xi)$. Folglich erzeugt der Ebenenbüschel erster Ordnung c_d mit einem zu ihm projektiven Ebenenbüschel erster Ordnung, dessen Achse mit dem Punkte $\mathfrak{X}$ inzident ist und parallel zu c_d läuft und dessen Ebenen die ihnen entsprechenden Ebenen des Büschels c_d rechtwinklig schneiden, einen den Kegelschnitt ξ^2 enthaltenden Rotationszylinder. Die kubische Regelschar $\mathfrak{C}^3$ kann hiernach auch als Ort der Strahlen angesehen werden, die auf dem Strahle c_d eines Rotationszylinders senkrecht stehen und dabei je mit der Ellipse ξ^2 dieses Zylinders einen Punkt gemein haben. Als Träger der kubischen Regelschar $\mathfrak{C}^3$ ergibt sich somit ein Zylindroid[31]). In anderen Worten:

Die Träger c_m der Ebenenbüschel erster Ordnung, zu denen sich die mit den Tangentenebenen μ des gleichseitigen Fokalparaboloides C^2 einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 orthogonal verknüpften Ebenen ε anordnen lassen, bilden die Regelstrahlen eines Zylindroides C^3. Seine Doppelpunktsgerade ist die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1, seine einfache Leitgerade der unendlich ferne Kongruenzstrahl c_∞.

[31]) Die unter [5]) angeführte Abhandlung, Nr. 12.

In jeder Ebene eines Regelstrahles c_m von C^3 liegt (**23.**) ein durch einen Strahl von C_1^1 gehender Parallelstrahlenbüschel (**19.**) zu c_m senkrechter Strahlen des quadratischen Hauptachsenkomplexes Γ^2 der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung. Alle mit einer gegebenen Gerade inzidenten Strahlen von C_1^1 bilden aber eine Regelschar zweiter Ordnung. Diese ist, wenn die gegebene Gerade mit c_m zusammenfällt — also die Kongruenzstrahlen rechtwinklig schneidet — gleichseitig paraboloidisch. Umgekehrt schneiden die Strahlen jeder in C^3 gelegenen gleichseitig paraboloidischen Regelschar je einen Regelstrahl von C^3 rechtwinklig. Es ist demnach ohne Hilfe von Eigenschaften des Γ-Büschels der bekannte Satz bewiesen:

Jeder Regelstrahl des Zylindroides C^3 ist ein Scheitelstrahl eines der einscharig in der linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide.

Alle Flächen des Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener gleichseitigen Paraboloide haben somit die Hauptsymmetrieachse c_d zum gemeinsamen Scheitelstrahle und bzw. je einen Regelstrahl von C^3 zum zweiten Scheitelstrahle.

Die Hauptachse jedes durch C_1^1 gehenden linearen Komplexes ist mit den Strahlen je einer gleichseitig paraboloidischen Regelschar von C_1^1 inzident. Ferner ist jeder Regelstrahl des Zylindroides C^3 die Hauptachse je eines durch C_1^1 gehenden linearen Komplexes. Somit ist C^3 auch auf diesem Wege als Hauptachsenzylindroid des von C_1^1 getragenen Γ-Büschels erkannt. Die üblichen Beweise dieses Satzes gehen den umgekehrten Weg. Mir scheint es jedoch empfehlenswerter von der linearen Kongruenz zum linearen Komplexe aufzusteigen, statt vom linearen Komplexe zur linearen Kongruenz.

25. Alle je ein Paar Regelstrahlen des Zylindroides C^3 enthaltenden Ebenen sind zweimal berührende Ebenen der Fläche, und jede zweimal berührende Ebene des Zylindroides C^3 enthält ein Paar seiner Regelstrahlen. Ist das Paar Regelstrahlen von C^3 in einer die Fläche zweimal berührenden Ebene reell, so liegt eine C^3 „wirklich“ zweimal berührende Ebene vor, ist es konjugiert imaginär eine C^3 „virtuell“ zweimal berührende Ebene. Die zweimal berührenden Ebenen von C^3 bilden den durch die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} der Kongruenz C_1^1 gehenden Büschel paralleler Ebenen. In ihm sind die wirklich zweimal berührenden Ebenen von C^3 von den virtuell zweimal berührenden durch die beiden Kuspidalebenen der Fläche getrennt. Die C^3 wirklich zweimal berührenden Ebenen schneiden die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 in den Punkten der durch die beiden Kuspidalebenen der Fläche auf c_d begrenzten endlichen Strecke, die C^3 virtuell zweimal berührenden Ebenen in den übrigen Punkten.

In jeder zweimal berührenden Ebene von C^3 ist die Strahlenparabel (**19.**) des quadratischen Hauptachsenkomplexes Γ^2 der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung in zwei Büschel paralleler Strahlen zerfallen. Die Strahlen dieser beiden Parallelstrahlenbüschel stehen bzw. auf den zwei in der Ebene gelegenen Regelstrahlen von C^3 senkrecht (**23.**). Nun ist der unendlich ferne Mittelpunkt jedes der beiden Büschel paralleler Strahlen von Γ^2 in einer zweimal berührenden Ebene von C^3 ihr durch den quadratischen Komplex zugeordnet (**21.**). Folglich hat jede solche Ebene ein Paar ihr durch Γ^2 zugeordneter Punkte. Aus der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 werden aber die bzw. mit den Punkten von c_d inzidenten Regelstrahlenpaare von C^3 durch die Ebenenpaare einer symmetrischen Ebeneninvolution projiziert, deren Doppelebenen bzw. durch die beiden Kuspidalstrahlen [32]) von C^3 gehen. Die Berührungspunktepaare der zweimal berührenden Ebenen von C^3 bilden demnach auf dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ eine zu dieser symmetrischen Ebeneninvolution perspektive Punktinvolution. Sie geht in sich selbst über, sobald in ihren Punktepaaren an Stelle jedes Punktes derjenige Punkt tritt, der ihm auf c_∞ in dem polaren Felde des unendlich fernen imaginären Kugelkreises zugeordnet ist, d. h. das Berührungspunktepaar jeder zweimal berührenden Ebene von C^3 durch das der Ebene durch den quadratischen Komplex Γ^2 zugeordnete Punktepaar ersetzt wird. Das einer zweimal berührenden Ebene von C^3 durch den quadratischen Komplex Γ^2 zugeordnete Punktepaar wird somit gleichfalls durch ein Ebenenpaar unserer symmetrischen Ebeneninvolution mit der Achse c_d projiziert. Also:

Die den zweimal berührenden Ebenen des Zylindroides C^3 durch den quadratischen Hauptachsenkomplex Γ^2 der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung bzw. zugeordneten Punktepaare bilden auf dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ eine hyperbolische Punktinvolution. Sie liegt perspektiv zur symmetrischen Ebeneninvolution, deren Ebenenpaare die Regelstrahlenpaare von C^3 in den zweimal berührenden Ebenen der Fläche projizieren. Eine zweimal wirklich berührende Ebene von C^3 hat ein Paar reeller, eine zweimal virtuell berührende ein Paar konjugiert imaginärer ihr durch den quadratischen Komplex Γ^2 zugeordneten Punkte. Und zwar sind einer C^3 zweimal berührenden Ebene durch Γ^2 diejenigen Punkte von c_∞ zugeordnet, die in ihr auf den Normalen der beiden mit der Ebene inzidenten Regelstrahlen von C^3 liegen.

Jeder der beiden in einer zweimal berührenden Ebene von C^3 gelegenen Büschel paralleler Strahlen des quadratischen Komplexes Γ^2 ist ein Büschel

[32]) Die unter [5]) angeführte Abhandlung, Nr. 3.

paralleler Hauptachsen je eines Büschels einscharig in der linearen Kongruenz C_1^1 enthaltener längs des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide (22.). Der Bündel einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide läßt sich hiernach zu ∞^1 Büscheln längs c_∞ einander berührender Paraboloide ordnen. Sie bilden im polaren F^2-Gebüsche $\Pi(F^2)$ von C_1^1 die längs c_∞ tangentialen F^2-Büschel[27]). Zu den in einer zweimal berührenden Ebene von C^3 gelegenen zwei Büscheln paralleler Strahlen des quadratischen Komplexes Γ^2 gehören also bzw. die Elemente eines Paares längs c_∞ tangentialer Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide.

Die Paare der durch die C^3 zweimal wirklich berührenden Ebenen bestimmten längs c_∞ tangentialen Büschel der einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide bilden zusammen die Elementenpaare einer hyperbolischen Involution[27]). Zu Doppelelementen hat sie die beiden aus den zerfallenen Paraboloiden bestehenden tangentialen Paraboloidenbüschel. Jeder dieser zwei Paraboloidenbüschel erschöpft diejenigen einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Paraboloide, die bzw. die Elemente des Büschels paralleler Kongruenzstrahlen in einer der beiden Kuspidalebenen von C^3 zu Doppelpunktsgeraden haben.

Die zweimal C^3 virtuell berührenden Ebenen bestimmen bzw. ein Paar konjugiert imaginärer tangentialen Büschel der einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide. Die diese Paare von F^2-Büscheln bildenden Paraboloide senden in die diese Paare bestimmenden Ebenen als Hauptachsen bzw. die Elemente zweier konjugiert imaginären Parallelstrahlenbüschel mit dem gemeinsamen Strahle c_∞. Der unendlich ferne Strahl von C_1^1 ist somit der einzige reelle Strahl des quadratischen Hauptachsenkomplexes Γ^2 in den C^3 zweimal virtuell berührenden Ebenen.

26. Die im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 gelegene involutorische Regelschar einer einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung $\mathfrak{X}^2$ liegt auch[33]) im Nullraume des der Fläche $\mathfrak{X}^2$ adjungierten linearen Strahlenkomplexes $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$, und die nicht auf dieser Fläche gelegenen Strahlen von C_1^1 sind paarweise für sie reziprok polar und zugleich im Nullraume von $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$ einander zugeordnet[34]).

Bei einem einscharig in C_1^1 enthaltenen Hyperboloide $\mathfrak{X}^2$ ist bekanntlich sein Mittelpunkt E ein eigentlicher Punkt der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1. Somit sind der mit dem Mittelpunkte E von $\mathfrak{X}^2$ inzidente Kongruenzstrahl e und der unendlich ferne Strahl c_∞ von C_1^1 als reziproke Polaren für $\mathfrak{X}^2$ einander zugeordnete Strahlen im Nullraume von $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$. Der Kongruenzstrahl e ist hiernach ein

---

[33]) Die unter [4]) angeführte Abhandlung, Nr. 23.

[34]) A. a. O., Nr. 18.

Durchmesser von $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$. Ferner ist der Mittelpunkt E von $\mathfrak{X}^2$ im Nullraume von $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$ der Nullpunkt der Fluchtebene γ von Σ_{ig}. Wählt man für $\mathfrak{X}^2$ eine Antidurchmesserfläche von C_1^1, also für den Mittelpunkt E von $\mathfrak{X}^2$ den Mittelpunkt C der Kongruenz, und für den Kongruenzstrahl e deren Hauptsymmetrieachse c_d, so erweist sich c_d als Hauptachse des dieser Fläche $\mathfrak{X}^2$ adjungierten linearen Komplexes $\Gamma^2_{\mathfrak{X}^2}$. Bei jedem andern eigentlichen Punkt E von γ schneidet die auf dem Kongruenzstrahle e senkrechte Achsenebene μ von C_1^1 die Fluchtebene γ in einem Strahle $\mu\gamma = \mathfrak{m}$ des der zugehörigen Fläche $\mathfrak{X}^2$ adjungierten linearen Komplexes $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$. Auf dem Strahle $\mathfrak{m}$ liegt dabei der Nullpunkt M von μ im Nullraume von $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$, und der mit M inzidente Durchmesser des Nullraumes ist zugleich die Hauptachse dieses linearen Komplexes. Nach den Nummern **12**, **13** und **15** sind aber die $\mathfrak{m}$ schneidenden zu μ senkrechten Strahlen bzw. zugleich die Hauptachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit der gemeinsamen Symmetrieebene μ. Folglich ist die zu μ senkrechte Hauptachse des $\mathfrak{X}^2$ adjungierten linearen Komplexes $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$ zugleich die Hauptachse eines einscharig in C_1^1 enthaltenen Hyperboloides mit der Symmetrieebene μ. Als Hauptachse dieses Hyperboloides liegt sie (**19.**) in dem von den Hauptachsen aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung gebildeten quadratischen Komplexe Γ^2. Kurz:

Der einem einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Hyperboloide adjungierte lineare Komplex hat zur Hauptachse einen Strahl des quadratischen Hauptachsenkomplexes Γ^2 aller einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung.

27. Die Gesamtheit der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit einem gemeinsamen Mittelpunkte E bilden einen F^2-Büschel (**20.**). Seine beiden zerfallenen Flächen haben den mit E inzidenten Strahl e von C_1^1 und den unendlich fernen Kongruenzstrahl c_∞ bzw. zu Doppelpunktsgeraden. Zu dem F^2-Büschel ist ein Büschel linearer Komplexe aus dem C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsche projektiv[35]). Da die Leitgeraden der beiden speziellen Komplexe des Γ-Büschels bzw. die Doppelpunktsgeraden c und c_∞ der beiden zerfallenen Flächen des F^2-Büschels sind[34]), so erweist sich der Γ-Büschel und seine Trägerkongruenz als axial translatorisch[2]). Das Hauptachsenzylindroid des Γ-Büschels besteht demnach aus einem e enthaltenden doppelt zu zählenden Büschel paralleler Strahlen und aus einem unendlich fernen von dem unendlich fernen Punkte von e ausstrahlenden Strahlenbüschel erster Ordnung. Der Parallelstrahlenbüschel liegt (**23.**) in der Ebene ε, die mit der zu e senkrechten Achsenebene μ orthogonal verknüpft ist. Seine Elemente

[35]) A. a. O., Nr. 21.

sind die in ε zur Schnittgerade $\mu\,\varepsilon = \mathfrak{m}$ senkrechten Strahlen. Jeder dieser Strahlen ist auch (26.) eine Hauptachse einer Fläche aus dem Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit der gemeinsamen Symmetrieebene μ. Also gilt:

Ist bei einem eigentlichen Strahle e einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 der Fluchtpunkt E und die zu e senkrechte Achsenebene μ von C_1^1 gegeben. Ist ferner in dem Gebüsche einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung der F^2-Büschel mit der seinen Flächen gemeinsamen Symmetrieebene μ ausgesondert und in dem C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsche derjenige axial translatorische Γ-Büschel, der zu dem Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit dem gemeinsamen Mittelpunkt E projektiv ist. Dann bilden die zu μ senkrechten Hauptachsen dieses axial translatorischen Γ-Büschels und die zu μ senkrechten Hauptachsen jenes F^2-Büschels mit der seinen Flächen gemeinsamen Symmetrieebene μ in der mit μ orthogonal verknüpften Ebene ε denselben Büschel paralleler Strahlen.

28. Bei der im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 gelegenen involutorischen Regelschar $\mathfrak{L}^2$ eines einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloides $\mathfrak{X}^2$ ist dem in der Fluchtebene γ von Σ_{ig} gelegenen Strahle $\mathfrak{x}_1$ von $\mathfrak{L}^2$ der unendlich ferne Strahl $\mathfrak{x}'_{\infty 1}$ dieser Regelschar zugeordnet. Die involutorische Regelschar $\mathfrak{L}^2$ liegt außer im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} noch im Nullraume[33]) des dem Paraboloide $\mathfrak{X}^2$ adjungierten linearen Komplexes $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$. Somit ist der Strahl $\mathfrak{x}_1$ ein Durchmesser von $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$, und die Hauptachse von $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$ ist folglich die Normale einer $\mathfrak{x}_1$ senkrecht schneidenden Ebene ν in deren Nullpunkte N im Nullraume dieses Komplexes. Fällt ν mit der zu $\mathfrak{x}_1$ senkrechten Tangentenebene des Paraboloides $\mathfrak{X}^2$ zusammen, so ist der mit ν inzidente Strahl n von C_1^1 ein Strahl von $\mathfrak{L}^2$ und somit von $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$. Der Strahl n schneidet also die Hauptachse des Komplexes $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$ im Nullpunkte N der Tangentenebene ν. Für ein einscharig in C_1^1 enthaltenes gleichseitiges Paraboloid ist der Kongruenzstrahl n mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 identisch. Es ist somit gezeigt:

Der einem einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide $\mathfrak{X}^2$ adjungierte lineare Komplex $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$ hat einen die Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 rechtwinklig schneidenden Strahl zur Hauptachse.

Alle einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide bilden einen Büschel und haben einen gemeinsamen auf der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 liegenden Scheitelstrahl. Der zweite Scheitelstrahl jedes dieser gleichseitigen Paraboloide ist (24.) je ein Regelstrahl eines Zylin-

droides C^3. Die eigentlichen Hauptachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide bilden hiernach das aus dem Zylindroide C^3 durch eine Drehung von 90^0 um die Hauptsymmetrieachse c_d hervorgehende Zylindroid $C_{\frac{\pi}{2}}^3$. Beide Zylindroide haben mit C_1^1 außer der Hauptsymmetrieachse c_d noch die beiden Nebensymmetrieachsen c_1, c_2 gemein. Auf jedem Regelstrahle des einen Zylindroides steht ein Regelstrahl des andern senkrecht. Insbesondere schneidet jeder Kuspidalstrahl von C^3 je einen Kuspidalstrahl von $C_{\frac{\pi}{2}}^3$ rechtwinklig.

Zwei lineare Komplexe miteinander rechtwinklig schneidenden Hauptachsen sind bekanntlich füreinander nullinvariant. Schneiden demnach die Regelstrahlen c_m von C^3 und $c_{m\frac{\pi}{2}}$ von $C_{\frac{\pi}{2}}^3$ einander rechtwinklig, so ist jeder lineare Komplex mit der Hauptachse $c_{m\frac{\pi}{2}}$ — d. h. jeder Komplex des Büschels linearer Komplexe mit der gemeinsamen Hauptachse $c_{m\frac{\pi}{2}}$ — nullinvariant für den durch C_1^1 gehenden linearen Komplex Γ_m mit der Hauptachse c_m. Für einen zweiten durch C_1^1 gehenden linearen Komplex Γ_n ist ein Komplex $\Gamma'_{m\frac{\pi}{2}}$ aus dem Büschel linearer Komplexe mit der gemeinsamen Hauptachse $c_{m\frac{\pi}{2}}$ nullinvariant, falls es nicht alle Komplexe dieses Γ-Büschels sind[36]). Der lineare Komplex $\Gamma'_{m\frac{\pi}{2}}$ ist für die zwei Komplexe Γ_m, Γ_n des von C_1^1 getragenen Γ-Büschels und somit für alle Komplexe dieses Γ-Büschels nullinvariant. Ein für alle Komplexe des von C_1^1 getragenen Γ-Büschels nullinvarianter linearer Komplexe ist aber einer einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung adjungiert[35]), also ist es auch der lineare Komplex $\Gamma'_{m\frac{\pi}{2}}$. Die ihm adjungierte einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung ist, da seine Hauptachse $c_{m\frac{\pi}{2}}$ zur Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} von C_1^1 parallel läuft und dabei die Hauptsymmetrieachse c_d dieser linearen Kongruenz rechtwinklig schneidet, nach dem vorstehenden Lehrsatze ein gleichseitiges Paraboloid. $c_{m\frac{\pi}{2}}$ kann jeder Regelstrahl des Zylindroides $C_{\frac{\pi}{2}}^3$ sein. Folglich haben wir als Endergebnis:

Jeder Regelstrahl $c_{m\frac{\pi}{2}}$ *des Hauptachsenzylindroides* $C_{\frac{\pi}{2}}^3$ *aller einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz* C_1^1 *enthaltenen gleichseitigen Paraboloide fällt mit der Hauptachse des einem dieser gleichseitigen Paraboloide adjungierten linearen Komplexes zusammen.*

Hiernach erhält man, wenn wiederum ξ_1 der mit der Fluchtebene γ

[36]) Das unter [24]) angeführte Werk, S. 147.

des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} und mit dem Mittelpunkte C von C_1^1 inzidente Strahl eines einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloides $\mathfrak{X}^2$ ist, die eigentliche Hauptachse des $\mathfrak{X}^2$ adjungierten linearen Komplexes $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$ als den in der Verbindungsebene von $\mathfrak{x}_1$ mit der Hauptsymmetrieachse c_d von C_1^1 gelegenen Regelstrahl des Zylindroides C_π^3. Bei den beiden einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloiden ${}^1\bar{F}^2$, ${}^2\bar{F}^2$ mit bzw. den Nebensymmetrieachsen c_2, c_1 als eigentlichen Hauptachsen (**1.**) sind bzw. c_1, c_2 selbst die Hauptachsen der ${}^1F^2$, ${}^2F^2$ adjungierten linearen Komplexe.

29. Wie wir gesehen haben (**11.**), nimmt unter den einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung das in ihnen gelegene zerfallene Rotationsparaboloid mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ als Doppelpunktsgerade eine Sonderstellung ein. Eine ähnliche Sonderstellung kommt in dem C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsche dem diesem zerfallenen Rotationsparaboloide adjungierten linearen Komplexe zu, d. h. dem speziellen linearen Komplexe mit der Leitgerade c_∞. Es ist der einzige Komplex des C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsches mit mehr als einer Hauptachse. Jede unendlich ferne Gerade ist eine Hauptachse diese speziellen Komplexes sowie jedes Element des durch die Hauptsymmetrieachse c_d gehenden Bündels paralleler Strahlen. Die Hauptachsen des dem einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloide mit c_∞ als Doppelpunktsgerade adjungierten speziellen linearen Komplexes liegen sonach (**19.**) mit den Hauptachsen derjenigen linearen Komplexe, die den einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloiden adjungiert sind (**28.**), in dem quadratischen Hauptachsenkomplexe Γ^2 der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung.

Wir stellen uns mit Rücksicht darauf die Aufgabe, auch die Hauptachsen der den übrigen einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide bzw. adjungierten linearen Komplexe daraufhin zu prüfen.

Der Bündel einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener Paraboloide läßt sich (**25.**) in ∞^1 Büschel längs des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührender Paraboloide ordnen. Die beiden zerfallenen Flächen jedes dieser F^2-Büschel sind mit dem einscharig in C_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationsparaboloide mit der Doppelpunktsgerade c_∞ vereinigt. Nun bilden aber die Doppelpunktsgeraden der beiden zerfallenen Flächen eines Büschels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung das Leitgeradenpaar der Trägerkongruenz des zu ihm projektiven Γ-Büschels aus dem C_1^1 adjungierten Γ-Gebüsche[35]). Folglich ist zu jedem Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener, längs c_∞ einander berührenden Paraboloide je ein parabolischer Γ-Büschel aus dem C_1^1 adjun-

gierten Γ-Gebüsche projektiv, dessen Trägerkongruenz ein mit c_∞ vereinigtes Paar Leitgeraden hat. Das Hauptachsenzylindroid eines solchen parabolischen Γ-Büschels ist zerfallen. Es besteht aus einem doppelt zu zählenden in einer (eigentlichen) Ebene von c_∞ gelegenen Parallelstrahlenbüschel und einem unendlich fernen c_∞ enthaltenden Strahlenbüschel erster Ordnung. In einem gegebenen Büschel einscharig in C_1^1 enthaltener, längs c_∞ einander berührenden Paraboloide liegt aber wie in jedem gegebenen Büschel des Bündels einscharig in C_1^1 enthaltener Paraboloide ein gleichseitiges Paraboloid $\mathfrak{X}^2$. Die Hauptachse des diesem Paraboloide adjungierten linearen Komplexes $\Gamma_{\mathfrak{X}^2}$ ist zugleich die Hauptachse (28.) eines andern einscharig in C_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloides $\mathfrak{Y}^2$. Durch die eigentliche Hauptachse dieses Paraboloides geht ein in einer Ebene von c_∞ gelegener Büschel paralleler Hauptachsen der Flächen des durch das Paraboloid gehenden Büschels längs c_∞ einander berührender einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide (22.). Da die eigentliche Hauptachse des gleichseitigen Paraboloides $\mathfrak{Y}^2$ auf die Hauptachse des dem gleichseitigen Paraboloide $\mathfrak{X}^2$ adjungierten linearen Komplexes fällt, so sind die Strahlen des Parallelstrahlenbüschels sowohl die Hauptachsen der linearen Komplexe, die je den Flächen des durch $\mathfrak{X}^2$ gehenden Büschels längs c_∞ einander berührender einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide adjungiert sind, wie auch bzw. die Hauptachsen der Flächen des durch $\mathfrak{Y}^2$ gehenden Büschels längs c_∞ einander berührender einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide.

Zu jedem gegebenen Büschel einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltener, längs des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührenden Paraboloide gehört also ein zweiter solcher Büschel. Die Hauptachse des einem Paraboloide des gegebenen Büschels adjungierten linearen Komplexes bildet stets auch eine Hauptachse eines Paraboloides des dem Büschel zugehörigen Büschels.

Hieraus erhalten wir zusammen mit den weiteren Darlegungen dieser und den Ergebnissen der vorigen Nummer den für alle einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide gültigen Satz:

Die Hauptachsen der linearen Komplexe, die je den einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Paraboloiden adjungiert sind, fallen auf die Hauptachsen der einscharig in C_1^1 enthaltenen Paraboloide selbst.

30. Nach den Nummern **26** bis **29** erschöpfen die Hauptachsen der linearen Komplexe, die den einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung adjungiert sind, den Hauptachsenkomplex Γ^2 der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung. Folglich hat das Gebüsch der einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter

Ordnung und das C_1^1 adjungierte Γ-Gebüsch denselben Hauptachsenkomplex Γ^2. Jedes Gebüsch linearer Strahlenkomplexe läßt sich aber als das einer linearen Strahlenkongruenz adjungierte Γ-Gebüsch ansehen[37]). Demnach haben wir für den quadratischen Hauptachsenkomplex Γ^2 der Komplexe eines Γ-Gebüsches folgende neue Erzeugung:

Der quadratische Hauptachsenkomplex der linearen Komplexe eines Γ-Gebüsches kann stets erzeugt werden als der quadratische Hauptachsenkomplex der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung.

Den quadratischen Hauptachsenkomplex der linearen Komplexe eines Γ-Büschels hat zuerst Rudolf Sturm im ersten Teile seines Werkes: Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, Leipzig 1892, Nr. 146 untersucht. Später[38]) erwies sich dieser quadratische Komplex als der Ort aller Schnittgeraden der zueinander senkrechten Tangentenebenen eines gleichseitigen Paraboloides. Nunmehr zeigt er sich als Ort der Hauptachsen aller einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung. Letztere Erzeugung dieses quadratischen Komplexes ist anschaulicher und elementarer als seine beiden älteren Erzeugungen. Sie setzt keine Kenntnisse aus der Theorie der linearen Komplexe voraus. Umgekehrt gestattet sie — wie schon aus den vorstehenden Untersuchungen hervorgeht — Hauptsätze dieser Theorie recht einfach zu beweisen.

E. Metrische Sonderheiten des polaren F^2-Gebüsches einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz.

31. Die Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes $\Sigma_{i_g}^P$ einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 verbindet den Träger w der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞. Durch c_∞ und den zu γ senkrechten Kongruenzstrahle c_d geht der Büschel aller einscharig in P_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloide. Er bildet (**1.**) den Durchmesser-F^2-Büschel von P_1^1. Die in ihm enthaltene einzige zerfallene Fläche geht durch den c_d und w verbindenden Kongruenzstrahlenbüschel und den Büschel paralleler Kongruenzstrahlen von γ. Im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 ist nun die Polare eines Büschels einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit einer einzigen zerfallenen Fläche ein aus lauter zerfallenen Flächen zweiter Ordnung gebildeter F^2-Büschel[39]). Folglich besteht in $\Pi^P(F^2)$ der Antidurchmesser-

[37]) Die unter [4]) angeführte Abhandlung, Nr. 22.
[38]) Die unter [5]) angeführte Abhandlung, Nr. 39.
[39]) Die unter [4]) angeführte Abhandlung, Nr. 39.

F^2-Büschel als Polare des Durchmesser-F^2-Büschels aus lauter zerfallenen Flächen zweiter Ordnung. Für diese Flächen bildet jeder Strahl des c_d und w verbindenden Kongruenzstrahlenbüschels C mit jedem zu w parallelen Kongruenzstrahle ein Paar reziproker Polaren. Die beiden je auf einen Kongruenzstrahlenbüschel reduzierten Antidurchmesserflächen sind der Kongruenzstrahlenbüschel C und der Büschel paralleler Kongruenzstrahlen in der Fluchtebene γ. Sie erweisen als die beiden Fundamentalinvolutionen[40]) des Antidurchmesser-F^2-Büschels die von $\mathfrak{w}$ getragene symmetrische Punktinvolution mit dem eigentlichen Doppelpunkte $c_d\,\mathfrak{w} = C$ und die symmetrische Ebeneninvolution mit den beiden Doppelebenen $c_d\,\mathfrak{w}$ und γ. Beide Fundamentalinvolutionen ergeben zusammen die Strahlen $\mathfrak{w}$, c_d und die mit γ und C inzidente Normale $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{w}$ als gemeinsame Hauptachsen aller Antidurchmesserflächen von P_1^1. Damit sind zugleich diese drei Strahlen als die drei bekannten Symmetrieachsen und C als der Mittelpunkt der parabolischen linearen Kongruenz bestimmt. c_d ist die Hauptsymmetrieachse und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{c}$ das Paar Nebensymmetrieachsen (2.) von P_1^1. Die Antidurchmesserflächen von P_1^1 werden von der Fluchtebene γ in der ihnen allen gemeinsamen Doppelpunktsgerade $\mathfrak{w}$ geschnitten. Bei einer parabolischen linearen Kongruenz reduziert sich hiernach der in γ gelegene zum Antidurchmesser-F^2-Büschel perspektive Büschel homothetischer Kegelschnitte (2.) auf den doppelt zu zählenden Träger $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w der Kongruenz.

Das im Antidurchmesser-F^2-Büschel gelegene (5.) orthogonale Direktorhyperboloid D^2 von P_1^1 ist in die in den konjugiert imaginären Doppelebenen des orthogonalen Ebenenbüschels mit der Achse $\mathfrak{w}$ gelegenen konjugiert imaginären Kongruenzstrahlenbüschel zerfallen. Das Direktorhyperboloid ist also rotatorisch und identisch mit dem einscharig in P_1^1 enthaltenen zerfallenen Rotationshyperboloide mit der Rotationsachse $\mathfrak{w}$. Das zerfallene Direktorhyperboloid bildet im polaren Bündel $\pi^P(F_z^2)$ zerfallener Flächen des polaren F^2-Gebüsches $\Pi^P(F^2)$ von P_1^1 als Polfläche des Bündels einscharig in P_1^1 enthaltener gleichseitigen Regelflächen zweiter Ordnung (6.) die Polfläche eines Büschels zerfallener gleichseitigen Hyperboloide. Diese zerfallenen Hyperboloide gehen bzw. durch die Strahlenbüschelpaare von P_1^1 in den Ebenenpaaren des orthogonalen Ebenenbüschels $\mathfrak{w}$. Ein zweiter Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener gleichseitigen Regelflächen zweiter Ordnung besteht aus den einscharig in P_1^1 enthaltenen gleichseitigen Paraboloiden. Folglich ist der jenen Büschel zerfallener gleichseitigen Hyperboloide mit diesem Büschel gleichseitiger Paraboloide verbindende F^2-Bündel einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung

[40]) A. a. O., Nr. 36.

im polaren F^2-Gebüsche $\Pi^P(F^2)$ der von lauter gleichseitigen Regelflächen erfüllte Polar-F^3-Bündel des zerfallenen orthogonalen Direktorhyperboloides D^2.

32. Alle einscharig in einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung berühren im unendlich fernen Punkte W_∞ des Trägers $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 die mit W_∞ inzidenten Kongruenzstrahlen. Diese Kongruenzstrahlen liegen in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^P von P_1^1. Die Fluchtebene γ ist somit als gemeinsame Asymptotenebene aller einscharig in P_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung der Ort der Mittelpunkte dieser Flächen. Nun bilden die durch einen Kongruenzstrahl x gehenden einscharig in P_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung einen F^3-Bündel. Er wird erschöpft durch die $\infty^1 F^2$-Büschel, die den x enthaltenden Kongruenzstrahlenbüschel — als reduzierte Fläche zweiter Ordnung — mit den Flächen eines im F^2-Bündel gelegenen die reduzierte Fläche nicht enthaltenden F^2-Büschels verbinden. Die Mittelpunkte der Flächen jedes solchen F^2-Büschels bestehen in γ aus den Punkten einer zu dem F^2-Büschel projektiven Punktreihe erster Ordnung. Ist x ein mit γ inzidenter Strahl von P_1^1, so liegt diese Punktreihe auf dem den Kongruenzstrahl x von den vereinigten Leitgeraden w symmetrisch trennenden Kongruenzstrahle y. Jeder Punkt von y ist daher der gemeinsame Mittelpunkt ∞^1 durch x gehender einscharig in P_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung. Sie bilden, da je zwei einscharig in P_1^1 enthaltene Flächen zweiter Ordnung durch einen Büschel solcher Flächen verbunden sind, einen Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener konzentrischen Flächen zweiter Ordnung. An dem gemeinsamen Mittelpunkte der Flächen jedes solchen F^2-Büschels spiegeln sich die beiden vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 in zwei von dem Kongruenzstrahle x getragene vereinigte Strahlen. Alle Flächen des F^2-Büschels berühren hiernach einander längs w wie auch längs x. Die Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener konzentrischen Flächen zweiter Ordnung mit je einem bzw. mit einem Punkte des Kongruenzstrahles y zusammengefallenen gemeinsamen Mittelpunkte sind somit die längs des Kongruenzstrahles x tangentialen Büschel[41]) einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung. Für die Flächen jeder dieser tangentialen F^2-Büschel sind in γ jedesmal die durch x und w harmonisch getrennten Kongruenzstrahlen, insbesondere der Kongruenzstrahl y und der unendlich ferne Kongruenzstrahl c_∞ reziprok polar. — Beschreibt der Kongruenzstrahl x den Büschel paralleler Kongruenzstrahlen von γ und zugleich der durch x gehende Bündel einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung das Gebüsch

[41]) A. a. O., Nr. 16.

einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung, so beschreibt der x von w symmetrisch trennende Kongruenzstrahl y ebenfalls diesen Parallelstrahlenbüschel. Das Gebüsch einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung läßt sich folglich in ∞^2 Büschel konzentrischer Flächen zweiter Ordnung ordnen (**22.**). Jeder Punkt der Fluchtebene γ von P_1^1 ist der gemeinsame Mittelpunkt eines solchen F^2-Büschels. In jedem dieser F^2-Büschel liegt die auf den Büschel paralleler Kongruenzstrahlen von γ reduzierte Fläche zweiter Ordnung, d. h. das einscharig in P_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid mit der Doppelpunktsgerade c_∞.

Jeder Punkt $\mathfrak{X}$ des Trägers $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 ist insbesondere der gemeinsame Mittelpunkt aller Flächen je eines F^2-Büschels aus dem Bündel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung. Die eine Fundamentalinvolution eines solchen F^2-Büschels hat zu Doppelelementen den Punkt $\mathfrak{X}$ und den unendlich fernen Punkt W_∞ von $\mathfrak{w}$, die andere die Ebene des Kongruenzstrahlenbüschels $\mathfrak{X}$ und die Fluchtebene γ. Jeder unendlich ferne Punkt von γ ist endlich der gemeinsame Mittelpunkt eines Büschels in diesem Punkte die unendlich ferne Ebene und längs des unendlich fernen Kongruenzstrahles c_∞ einander berührender Paraboloide (**22.**).

33. Die in vorstehender Nummer durchgeführte Konstruktion der ∞^1 tangentialen F^2-Büschel einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 längs eines mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^P von P_1^1 inzidenten Kongruenzstrahles ist ein Sonderfall der Konstruktion dieser F^2-Büschel längs jedes anderen Kongruenzstrahles. Nämlich der durch einen solchen Strahl x gehende Bündel einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung läßt sich ebenfalls je durch ∞^1 F^2-Büschel erschöpfen, die den durch x gehenden Kongruenzstrahlenbüschel als reduzierte Fläche zweiter Ordnung mit je einer Fläche eines nicht durch diesen Strahlenbüschel gehenden F^2-Büschels des F^2-Bündels verbinden. Zur Basiskurve hat ein so erhaltener F^2-Büschel außer den vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 zwei von x getragene vereinigte Strahlen von P_1^1. Die Flächen des F^2-Büschels berühren also einander auch längs x, d. h. alle solche F^2-Büschel bilden die ∞^1 längs des Kongruenzstrahles x tangentialen F^2-Büschel von P_1^1. Für die Flächen dieser längs x tangentialen F^2-Büschel sind die durch den Träger $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 und den Kongruenzstrahl x harmonisch getrennten Strahlen des x enthaltenden Kongruenzstrahlenbüschels paarweise reziprok polar.

Jeder durch einen Kongruenzstrahlenbüschel gehende Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung ist ein längs eines Strahles dieses Strahlenbüschels tangentialer F^2-Büschel von P_1^1. Die Gesamtheit der je längs der Strahlen eines Kongruenzstrahlenbüschels tangentialen

F^2-Büschel von P_1^1 erschöpft folglich alle durch den Kongruenzstrahlenbüschel gehenden einscharig in P_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung.

Dieses Ergebnis dehnt den ersten in Nummer **39** ausgesprochenen Lehrsatz der in [4]) genannten Abhandlung und die dort in den Nummern **39** bis **42** auf ihn sich stützenden Lehrsätze auch auf die auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung reduzierten in P_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung aus. So muß es jetzt dort zum Schlusse dieses Lehrsatzes heißen: Diese Fläche besteht aus zwei verschiedenen Paaren von Strahlenbüscheln erster Ordnung oder ist auf einen Kongruenzstrahlenbüschel reduziert.

Zu dieser Erweiterung führen übrigens in genannter Abhandlung selbst die Darlegungen der angeführten Nummer **39**. Der einschränkende Schlußsatz S. 775, Z. 15 bis 17 v. u. ist als unberechtigt zu streichen.

34. Zwischen der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig} einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 und der unendlich fernen Ebene besteht eine Korrelation, sobald dem Schnittpunkte jedes Kongruenzstrahles mit γ die unendlich ferne Gerade der zum Kongruenzstrahle senkrechten Achsenebene von C_1^1 zugewiesen wird. Als Erzeugnis beider korrelativen ebenen Felder ergibt sich ein gleichseitig paraboloidischer Ebenenbündel zweiter Ordnung (**10.**). Er umhüllt das gleichseitige Fokalparaboloid C^2 von C_1^1. Bei einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 ist jeder Punkt des Trägers $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 der Mittelpunkt eines in einer Ebene von w gelegenen Kongruenzstrahlenbüschels. Infolgedessen wird bei ihr die aufgestellte Korrelation zwischen der Fluchtebene γ und der unendlich fernen Ebene einfach ausgeartet zweiter Art[42]). Die singulären Strahlen von γ und der unendlich fernen Ebene sind bzw. $\mathfrak{w}$ und der $\mathfrak{w}$ rechtwinklig kreuzende unendlich ferne Strahl. Jede Ebene ξ von $\mathfrak{w}$ ist eine Achsenebene von P_1^1. Ihr sind im geschart involutorischen Raume Σ_{ig}^P der Kongruenz die ∞^1 einen Ebenenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{x}$ bildenden Achsenebenen von P_1^1 zugeordnet. Die Achse $\mathfrak{x}$ des Ebenenbüschels ist somit ein Strahl des gleichseitigen Fokalparaboloides ${}_PC^2$ von P_1^1. Sie schneidet im Mittelpunkte des in ξ gelegenen Kongruenzstrahlenbüschels nicht nur ξ sondern auch $\mathfrak{w}$ rechtwinklig. Beschreibt ξ den Ebenenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{w}$, so beschreibt die Achse $\mathfrak{x}$ die eine Regelschar von ${}_PC^2$. In der von dieser gleichseitig paraboloidischen Regelschar getragenen Fokalinvolution (**10.**) bleiben die den Strahlen $\mathfrak{x}$ bzw. zugeordneten Strahlen $\mathfrak{x}'$ in den bzw. zu den $\mathfrak{x}$ senkrechten Achsenebenen ξ von P_1^1. Die Fokalinvolution besteht also aus den einander rechtwinklig kreuzenden Strahlen der gleichseitg paraboloidischen Regelschar und ist folglich elliptisch[43]). Da

[42]) Das unter [24]) angeführte Werk, S. 20.

[43]) Die unter [5]) angeführte Abhandlung, Nr. 16.

die Kollineation von Σ_{ig}^{P} jedem $\mathfrak{w}$ kreuzenden Strahle den Strahl $\mathfrak{w}$ zuordnet, so erweist sich die von der andern Regelschar von $_PC^2$ getragene Fokalinvolution von P_1^1 als parabolisch, und ihre vereinigten Doppelstrahlen haben den Träger $\mathfrak{w}$. Der eine Scheitelstrahl des gleichseitigen Fokalparaboloides $_PC^2$ ist $\mathfrak{w}$, der andere (**32.**) die Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}$ von P_1^1. Seine mit seinem Scheitelpunkte $\mathfrak{w}\,\mathfrak{c} = C$ inzidente Hauptachse ist die Hauptsymmetrieachse c_d der Kongruenz.

35. Jede auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung reduzierte Fläche zweiter Ordnung ist eine Rotationsfläche. In der parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 liegen folglich im Gegensatze zur hyperbolischen und elliptischen ∞^1 auf einen Strahlenbüschel erster Ordnung reduzierte Rotationsflächen. Jeder Punkt des Trägers $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 ist der Mittelpunkt einer solchen. Ihre Rotationsachse ist die in ihrem Mittelpunkte auf ihrer Ebene errichtete Senkrechte. Sie liegt (**34.**) auf dem gleichseitigen Fokalparaboloide $_PC^2$ von P_1^1. Die mit dieser Senkrechten inzidenten Ebenen sind also sowohl Symmetrieebenen der Rotationsfläche wie auch Achsenebenen der parabolischen linearen Kongruenz. Alle $\mathfrak{w}$ schneidenden Strahlen von $_PC^2$ erweisen sich somit als Rotationsachsen der je in einen Kongruenzstrahlenbüschel ausgearteten Rotationsflächen zweiter Ordnung, und die zu diesen Rotationsachsen bzw. senkrechten Symmetrieebenen fallen mit den Ebenen der Rotationsflächen zusammen.

Die übrigen in P_1^1 einscharig enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung gehen durch zwei getrennte (reelle oder konjugiert imaginäre) Kongruenzstrahlenbüschel. Jede solche zerfallene Fläche ist dargestellt[44]) durch die beiden Fundamentalinvolutionen desjenigen Büschels einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung, deren Paare von Doppelelementen bzw. mit den Ebenen und Mittelpunkten der beiden auf der Fläche gelegenen Kongruenzstrahlenbüschel zusammenfallen. Zu Symmetrieebenen hat die Fläche einerseits die beiden Achsenebenen der aus Ebenenpaaren bestehenden Fundamentalinvolution — d. h. ein Paar im Träger $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 einander rechtwinklig schneidender Ebenen, andrerseits diejenige Ebene, die im Mittelpunkte der auf $\mathfrak{w}$ gelegenen aus Punktepaaren bestehenden Fundamentalinvolution auf $\mathfrak{w}$ senkrecht steht. Zusammengefaßt erkennen wir:

Auch (**11.**) bei einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 erschöpfen die Symmetrieebenen der einscharig in ihr enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung den gleichseitig paraboloidischen Bündel der Achsenebenen von P_1^1.

---

[44]) Die unter [4]) angeführte Abhandlung, Nr. 37.

36. Zwei im Träger $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz zueinander senkrechte Ebenen μ, ε sind die gemeinsamen Achsenebenen eines Büschels von $\mathfrak{w}$ getragener Ebeneninvolutionen. Jede der ∞^1 im Büschel gelegenen Ebeneninvolutionen bestimmt — als Fundamentalinvolution betrachtet[40]) — eine von $\mathfrak{w}$ getragene Punktinvolution als die ihr zugehörige Fundamentalinvolution. Die so gewonnenen ∞^1 Punktinvolutionen gehen durch das aus den Mittelpunkten der Kongruenzstrahlenbüschel in den Ebenen μ, ε gebildete Punktepaar und bilden somit einen Büschel von $\mathfrak{w}$ getragener Punktinvolutionen. Je zwei zusammengehörige Fundamentalinvolutionen aus dem Büschel der Ebenen- und aus dem der Punktinvolutionen stellen[44]) eine einscharig in P_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung mit den Symmetrieebenen μ, ε dar. Ferner bildet jeder Strahl aus dem Kongruenzstrahlenbüschel in jeder der beiden Ebenen μ, ε mit jedem Kongruenzstrahle in der andern ein Paar reziproker Polaren für alle diese Flächen. Folglich bilden die Flächen zusammen einen Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung mit den gemeinsamen Symmetrieebenen μ, ε. In diesem F^2-Büschel liegt (**31.**) — gleichültig, welches Paar zueinander senkrechter Ebenen von $\mathfrak{w}$ herausgegriffen wird — das einscharig in P_1^1 enthaltene in zwei konjugiert imaginäre Kongruenzstrahlenbüschel zerfallene Rotationshyperboloid D^2 mit der Rotationsachse $\mathfrak{w}$. Jede einscharig in P_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung sendet aber ein Paar zueinander senkrechter Symmetrieebenen durch $\mathfrak{w}$. Somit erschöpfen die ∞^1 Büschel durch das zerfallene Rotationshyperboloid D^2 gehender einscharig in P_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung den Bündel dieser einscharig in P_1^1 enthaltenen Flächen. Nun ist eine Ebene von $\mathfrak{w}$ niemals eine Symmetrieebene einer einscharig in P_1^1 enthaltenen irreduziblen Fläche zweiter Ordnung. Also ist gezeigt:

Jedes Paar zueinander senkrechter Ebenen μ, ε im Träger $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 besteht aus einem Paare Symmetrieebenen je eines Büschels einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung. Diese F^2-Büschel haben das einscharig in P_1^1 enthaltene, in zwei konjugiert imaginäre Kongruenzstrahlenbüschel zerfallene Rotationshyperboloid D^2 mit der Rotationsachse $\mathfrak{w}$ gemein und gehen je durch zwei bzw. auf einen Kongruenzstrahlenbüschel reduzierte Rotationshyperboloide (**35.**). Die ∞^1 einscharig in P_1^1 enthaltenen zerfallenen Flächen zweiter Ordnung mit je einem Paare in $\mathfrak{w}$ einander rechtwinklig schneidender Symmetrieebenen erschöpfen den Bündel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung.

Der Bündel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung kann auch nach den ∞^1 F^2-Büscheln geordnet werden, die je

eine zu $\mathfrak{w}$ senkrechte Achsenebene von P_1^1 zur gemeinsamen Symmetrieebene haben. Zunächst ist jede zu $\mathfrak{w}$ senkrechte eigentliche Achsenebene μ von P_1^1, wie aus Nummer **15** folgt oder auch direkt sich sehr einfach beweisen läßt, die gemeinsame Symmetrieebene je eines Büschels einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung. In jedem dieser F^2-Büschel liegt außer dem auf den Kongruenzstrahlenbüschel mit dem Mittelpunkte $\mu\,\mathfrak{w} = M$ reduzierten einscharig in P_1^1 enthaltenen Rotationshyperboloide noch das einscharig in P_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid mit der mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ zusammengefallenen Doppelpunktsgerade. Bei jedem dieser F^2-Büschel bildet jeder Strahl des Kongruenzstrahlenbüschels M in der zu $\mathfrak{w}$ senkrechten Symmetrieebene μ aller seiner Flächen mit jedem (zu $\mathfrak{w}$ parallelen) Kongruenzstrahle in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^P von P_1^1 ein Paar reziproker Polaren für alle Flächen des F^2-Büschels.

Aber auch die unendlich ferne Ebene als zu $\mathfrak{w}$ senkrechte Achsenebene von P_1^1 ist die gemeinsame (uneigentliche) Symmetrieebene eines Büschels einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung. In ihm schneiden einander der Bündel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung und der Bündel einscharig in P_1^1 enthaltener Paraboloide. Jede seiner Flächen geht außen durch den Bündel paralleler Strahlen von P_1^1 noch je durch einen weiteren Kongruenzstrahlenbüschel.

Da durch jede einscharig in P_1^1 enthaltene zerfallene Fläche zweiter Ordnung ein Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung mit einer zu $\mathfrak{w}$ senkrechten, seinen Flächen gemeinsamen Symmetrieebene μ geht, so erschöpft die Gesamtheit der von uns konstruierten Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung mit je einer zu $\mathfrak{w}$ senkrechten gemeinsamen Symmetrieebene μ den Bündel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung.

37. Jedes Paar in der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}$ einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 einander rechtwinklig schneidender Ebenen μ, ε ist zugleich ein Paar gemeinsamer Symmetrieebenen je eines Büschels einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung (**13.**). Ein solcher F^2-Büschel enthält drei Rotationsflächen. Die eine Rotationsfläche haben alle diese ∞^1 F^2-Büschel gemein. Sie ist in den Kongruenzstrahlenbüschel der zu $\mathfrak{c}$ senkrechten Ebene $\mu_\mathfrak{c}$ des Trägers $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 ausgeartet und hat $\mathfrak{c}$ zur Rotationsachse. Die beiden übrigen Rotationsflächen R_ε^2, R_μ^2 sind in jedem der ∞^1 F^2-Büschel andere und nur ausgeartet, wenn eine der beiden zueinander senkrechten Ebenen μ, ε mit der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^P von P_1^1 zusammenfällt. R_ε^2 hat (**14.**) den mit μ inzidenten zu ε senkrechten Strahl r_μ des

gleichseitigen Fokalparaboloides ${}^{P}C^{2}$ von P_1^1 zur Rotationsachse, R_μ^2 den mit ε inzidenten zu μ senkrechten Strahl r_ε von ${}^{P}C^{2}$. Da alle $\infty^1 F^2$-Büschel durch die in den Kongruenzstrahlenbüschel von μ_c ausgeartete Fläche zweiter Ordnung gehen, so berühren die Flächen eines jeden von ihnen einander außer längs $\mathfrak{w}$ noch längs je eines zweiten Strahles $s_{\mu\varepsilon}$ dieses Kongruenzstrahlenbüschels. $s_{\mu\varepsilon}$ und $\mathfrak{w}$ sind durch die zueinander senkrechten Ebenen μ, ε symmetrisch getrennt, und zwar kann $s_{\mu\varepsilon}$ jeder Strahl der Ebene μ_c sein. Der von den einscharig in P_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung mit der gemeinsamen Hauptachse c gebildete F^2-Bündel (**16.**) wird von den $\infty^1 F^2$-Büscheln, deren Flächen bzw. je ein Paar zueinander senkrechter Ebenen μ, ε von $\mathfrak{w}$ zu gemeinsamen Symmetrieebenen haben, erschöpft. Er läßt sich also in $\infty^1 F^2$-Büschel ordnen, die durch die auf den Kongruenzstrahlenbüschel der Ebene μ_c reduzierte Fläche zweiter Ordnung gehen und einander längs $\mathfrak{w}$ und je eines Strahles $s_{\mu\varepsilon}$ dieses Kongruenzstrahlenbüschels berühren. Je zwei durch einen Strahl $s_{\mu\varepsilon}$ und durch $\mathfrak{w}$ harmonisch getrennte Strahlen des Kongruenzstrahlenbüschels der Ebene μ_c sind gemeinsame reziproke Polaren für alle Flächen eines solchen durch $s_{\mu\varepsilon}$ und $\mathfrak{w}$ bestimmten F^2-Büschels.

Auch der Bündel einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit der gemeinsamen Hauptachse c läßt sich wie der Bündel einscharig in P_1^1 enthaltener zerfallenen Flächen zweiter Ordnung (**36.**) in ∞^1 Büschel von Flächen zweiter Ordnung mit je einer gemeinsamen zu c senkrechten Symmetrieebene μ ordnen (**15.**). Die Flächen jedes dieser F^2-Büschel sind konzentrisch und haben zum gemeinsamen Mittelpunkte den jeweiligen Schnittpunkt M von μ mit c. Sie berühren einander (**32.**) außer längs der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 noch längs eines zu dem Träger $\mathfrak{w}$ von w parallelen Kongruenzstrahles x_M und haben die durch $\mathfrak{w}$ und x_M harmonisch getrennten Kongruenzstrahlen zu gemeinsamen reziproken Polaren. Der Kongruenzstrahl x_M ist in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^P von P_1^1 das Spiegelbild von $\mathfrak{w}$ für den Punkt M. Hiernach sind die ∞^1 Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung mit der gemeinsamen Hauptachse c und je einer gemeinsamen c rechtwinklig schneidenden Symmetrieebene μ identisch mit den ∞^1 F^2-Büscheln, die durch das einscharig in P_1^1 enthaltene zerfallene Rotationsparaboloid mit dem unendlich fernen Kongruenzstrahle c_∞ als Doppelpunktsgerade gehen und deren Flächen einander außer längs $\mathfrak{w}$ noch je längs eines Kongruenzstrahles dieser zerfallenen Fläche berühren. Jeder dieser F^2-Büschel geht außer durch das zerfallene Rotationsparaboloid noch je durch ein einscharig in P_1^1 enthaltenes Rotationshyperboloid. Es hat zur Rotationsachse den mit μ inzidenten c rechtwinklig schneidenden Strahl des gleichseitigen Fokalparaboloides ${}^{P}C^{2}$ von P_1^1.

38. Es sei jetzt μ eine Achsenebene einer parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1, die den Träger $\mathfrak{w}$ der vereinigten Leitgeraden w von P_1^1 in einem eigentlichen Punkte $\mathfrak{X}$ schneidet. Sie sei weder zu $\mathfrak{w}$ senkrecht (**36.**) noch mit der Nebensymmetrieachse $\mathfrak{c}$ von P_1^1 inzident (**37.**). Die Achsenebene μ schneidet die Ebene ξ des von $\mathfrak{X}$ ausstrahlenden Kongruenzstrahlenbüschels $(\mathfrak{X}\,\xi)$ rechtwinklig. Folglich fällt der mit μ inzidente Kongruenzstrahl m in die Schnittgerade der Ebenen μ, ξ und der zu μ senkrechte Kongruenzstrahl e in den zu m senkrechten Strahl des Kongruenzstrahlenbüschels $(\mathfrak{X}\,\xi)$. Die einander rechtwinklig schneidenden Kongruenzstrahlen m, e sind [3]) gemeinsame reziproke Polaren für einen Büschel einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung. Sein Basisvierseit ist ausgeartet in zwei Paare vereinigter Gegenseiten. Das eine Paar bilden die vereinigten Leitgeraden w von P_1^1, das andere deren Spiegelbild w_μ an der Ebene μ. Längs w und w_μ berühren einander die Flächen des F^2-Büschels. Der Kongruenzstrahlenbüschel $(\mathfrak{X}\,\xi)$ geht durch die Träger $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}_\mu$ von w und w_μ. Seine durch $\mathfrak{w}, \mathfrak{w}_\mu$ harmonisch getrennten Strahlenpaare bestehen aus gemeinsamen reziproken Polaren für alle Flächen des F^2-Büschels, und der aus diesen Strahlenpaaren zusammengesetzte hyperbolisch involutorische Strahlenbüschel erster Ordnung hat die Achsen m, e. — Die Mittelpunkte der Flächen des F^2-Büschels bilden eine zu ihm projektive in der Fluchtebene γ des geschart involutorischen Raumes Σ_{ig}^P von P_1^1 gelegene Punktreihe erster Ordnung, die Zentrareihe des F^2-Büschels. Ihr Träger ist die mit $\mathfrak{X}$ inzidente Schnittgerade $\mathfrak{m}$ der Ebenen μ, γ. Diese Schnittgerade ist mit der Ebene ε der zu μ senkrechten Hauptachsen aller Flächen des F^2-Büschels inzident.

39. Wie bei der hyperbolischen und elliptischen linearen Strahlenkongruenz hat sich auch (**36.** bis **38.**) bei der parabolischen linearen Strahlenkongruenz P_1^1 jede eigentliche Achsenebene als die gemeinschaftliche Symmetrieebene eines Büschels einscharig in P_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung erwiesen. Ferner ist auch hier die unendlich ferne Ebene als Achsenebene von P_1^1 die (uneigentliche) Symmetrieebene des Bündels einscharig in P_1^1 enthaltener Paraboloide. Jede eigentliche Achsenebene von P_1^1 schneidet wiederum als Tangentenebene des gleichseitigen Fokalparaboloides ${}^PC^2$ der Kongruenz die zu ihr senkrechten Achsenebenen von P_1^1 in den Strahlen einer unter Umständen in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung ausgearteten Strahlenparabel, und jeder Strahl der unendlich fernen Ebene ist der Schnitt von ihr mit einer (zu ihr senkrechten) Achsenebene der Kongruenz (**18.**). Auch sind wie in den Nummern **11** bis **13** und **18** die Schnittstrahlen der zueinander senkrechten Achsenebenen von P_1^1 die Hauptachsen der einscharig in P_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung. Da die Achsenebenen von P_1^1 mit den Tangentenebenen des gleich-

seitigen Fokalparaboloides ${}^{P}C^2$ von P_1^1 zusammenfallen, und die Schnittstrahlen zueinander senkrechter Tangentenebenen von ${}^{P}C^2$ einen quadratischen Strahlenkomplex (**19.**) bilden, so erschöpfen bei der parabolischen linearen Strahlenkongruenz ebenfalls die Hauptachsen der einscharig in ihr enthaltenen Flächen zweiter Ordnung einen quadratischen Strahlenkomplex. Jedes gleichseitige Paraboloid bestimmt als gleichseitiges Fokalparaboloid eine parabolische lineare Strahlenkongruenz [45]), sobald seine beiden Regelscharen als deren Fokalregelscharen bzw. eine parabolische Strahleninvolution tragen und eine elliptische, deren einander zu geordnete Strahlen einander rechtwinklig kreuzen [43]). Folglich bilden bei der parabolischen linearen Strahlenkongruenz die Hauptachsen der einscharig in ihr enthaltenen Flächen zweiter Ordnung denselben quadratischen Strahlenkomplex Γ^2 wie bei der hyperbolischen und elliptischen.

Berlin-Halensee, den 26. April 1931.

---

[45]) Die unter [5]) angeführte Abhandlung, Nr. 25.

(Eingegangen am 3. Juli 1931.)

Über lineare Transformationen von Zahlenfolgen.

Von

Josef Lense in München.

Im folgenden soll eine von den Herren O. Toeplitz [1]) und K. Knopp [2]) behandelte Fragestellung, die in das Gebiet der linearen Transformationen unendlicher Zahlenfolgen gehört, in bestimmter Weise ergänzt werden.

Gegeben ist das Schema der Zahlen

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

Es möge folgenden vier Bedingungen genügen:

A. *In jeder Folge stehen Nullfolgen, d. h. bei festem* $p \geqq 1$ *strebt* $a_{np} \to 0$ *für* $n \to +\infty$.

B. *Es gibt eine Konstante* K, *so daß die Summe der absoluten Beträge der Glieder einer jeden Zeile, also für jedes* n *die Summe*

$$|a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{nn}| < K \text{ bleibt.}$$

C. $a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nn} = A_n \to 1$ *für* $n \to +\infty$.

D. *Die Zahlen jeder Schräglinie bilden eine Nullfolge, d. h. bei festem* $p \geqq 0$ *strebt für* $n \to +\infty$ *auch* $a_{n,n-p} \to 0$.

Die Bedingungen sind miteinander verträglich, wie das Schema

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

zeigt.

[1]) O. Toeplitz, Über lineare Mittelbildungen, Prace matematyczno-fiszyczne 22 (1911), S. 113—119.

[2]) K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., S. 75—77, Berlin: Julius Springer, 1931.

Sie sind voneinander unabhängig, wie man aus folgenden vier Beispielen erkennt:

Das Schema

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & \end{array}$$

genügt den Bedingungen B, C, D und erfüllt A nicht.

Das Schema

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & \end{array}$$

genügt den Bedingungen A, B, C und erfüllt D nicht.

Das Schema

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & & & & & & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & & & \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & & & & \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

genügt den Bedingungen A, B, D und erfüllt C nicht.

Das Schema

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & & & & & & & & \\ \frac{1}{\ln 2} & \frac{1}{2\ln 2} & & & & & & & & & \\ \frac{1}{\ln 3} & \frac{1}{2\ln 3} & -\frac{1}{\ln 3} & & & & & & & & \\ \frac{1}{\ln 4} & \frac{1}{2\ln 4} & -\frac{1}{\ln 4} & \frac{1}{3\ln 4} & & & & & & & \\ \frac{1}{\ln 5} & \frac{1}{2\ln 5} & -\frac{1}{\ln 5} & \frac{1}{3\ln 5} & \frac{1}{\ln 5} & & & & & & \\ \frac{1}{\ln 6} & \frac{1}{2\ln 6} & -\frac{1}{\ln 6} & \frac{1}{3\ln 6} & \frac{1}{\ln 6} & \frac{1}{4\ln 6} & & & & & \\ \frac{1}{\ln 7} & \frac{1}{2\ln 7} & -\frac{1}{\ln 7} & \frac{1}{3\ln 7} & \frac{1}{\ln 7} & \frac{1}{4\ln 7} & -\frac{1}{\ln 7} & & & & \\ \frac{1}{\ln 8} & \frac{1}{2\ln 8} & -\frac{1}{\ln 8} & \frac{1}{3\ln 8} & \frac{1}{\ln 8} & \frac{1}{4\ln 8} & -\frac{1}{\ln 8} & \frac{1}{5\ln 8} & & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

genügt den Bedingungen A, C, D und erfüllt B nicht. Daß A und D erfüllt sind, ist unmittelbar deutlich. C ist erfüllt, denn die n-te Zeile ist die durch $\ln n$ dividierte Reihe $(n > 1)$

$$1+\tfrac{1}{2}-1+\tfrac{1}{3}+1+\tfrac{1}{4}-1+\tfrac{1}{5}+\ldots,$$

wobei mit dem n-ten Glied abgebrochen wird. Da nun bekanntlich

$$\ln(n+1)<1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}<\ln n+1,$$

so gilt

$$\frac{\ln\left(\left[\frac{n}{2}\right]+2\right)-1}{\ln n}<A_n<\frac{\ln\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)+1}{\ln n},$$

daher

$$A_n\to 1.^{3})$$

B ist nicht erfüllt, denn die Summe der absoluten Beträge der Glieder der n-ten Zeile ist größer als

$$\frac{\left[\frac{n}{2}\right]-1+\ln\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}{\ln n}$$

und strebt daher mit n nach $+\infty$.

Gegeben seien nun zwei konvergente Zahlenfolgen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \quad \text{und} \quad y_1, y_2, y_3, \ldots$$

mit den Grenzwerten ξ und η. Man bilde aus ihnen mit Hilfe des Schemas der Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ die neuen Folgen

$$x_n'=a_{n1}x_1+a_{n2}x_1+\ldots+a_{nn}x_n$$

und

$$z_n=a_{n1}x_1y_n+a_{n2}x_2y_{n-1}+\ldots+a_{nn}x_ny_1 \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Es gelten folgende Sätze:

I. *Notwendig und hinreichend dafür, daß aus jeder Nullfolge* (x_n) *wieder eine Nullfolge* (x_n') *wird, sind die Bedingungen* A *und* B.

II. *Notwendig und hinreichend dafür, daß für jede beliebige konvergente Folge* (x_n) *die Folge* (x_n') *denselben Grenzwert hat, sind die Bedingungen* A, B, C.

III. *Notwendig und hinreichend dafür, daß für jede beliebige konvergente Folge* (x_n) *und* (y_n) *die Folge* (z_n) *nach* $\xi\eta$ *strebt, sind die Bedingungen* A, B, C, D.[4])

Der Beweis dafür, daß die genannten Bedingungen in den drei Sätzen hinreichen, findet sich bei K. Knopp a. a. O. Daß in den Sätzen I und II die genannten Bedingungen notwendig und hinreichend sind, wird von O. Toeplitz a. a. O. nachgewiesen.

---

[3]) $[x]$ bedeutet in bekannter Weise die größte ganze Zahl $\leqq x$.

[4]) Eine Verallgemeinerung dieser Sätze auf unendliche Matrizen findet sich bei I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. Journal f. d. reine u. angew. Math. **151** (1921), S. 79—111.

Im folgenden sollen für die drei Sätze etwas vereinfachte Beweise gegeben werden.

Satz I. Bedingung A ist notwendig, denn die Nullfolge $x_n = 0$ $(n \neq p)$, $x_p = 1$ wird in die Folge $0, 0, \ldots, 0, a_{pp}, a_{p+1,p}, a_{p+2,p}, \ldots$ transformiert. Bedingung B ist notwendig. Beweis im Anschluß an Toeplitz, auf dessen Gedankengang man durch folgende Überlegung ziemlich zwangsläufig geführt wird.

Angenommen, die Bedingung B wäre nicht erfüllt: Es gibt daher zu jeder Folge positiver Zahlen > 1: $G_1, G_2, G_3, \ldots$ mit $G_n \to +\infty$ eine Teilfolge der Zeilen unseres Schemas, so daß die Summe der absoluten Beträge der Glieder in der m_ν-ten Zeile des Schemas $> G_\nu$ und gleichzeitig wegen der Bedingung A die Summe der absoluten Beträge der ersten $m_{\nu-1}$ Glieder dieser Zeile $< K$ ist. Daher ist die Summe der absoluten Beträge der letzten $m_\nu - m_{\nu-1}$ Glieder dieser Zeile $> G_\nu - K$. Wir wählen nun z. B. die ersten m_1 Zahlen der x_n gleich $\pm \frac{1}{\sqrt{G_1}}$, das Vorzeichen immer so, daß es mit dem von $a_{m_1 n}$ übereinstimmt. Dann ist $|x'_{m_1}| > \sqrt{G_1}$. Die nächsten $m_2 - m_1$ Zahlen der x_n wählen wir gleich $\pm \frac{1}{\sqrt{G_2}}$, das Vorzeichen immer so, daß es mit dem von $a_{m_2 n}$ übereinstimmt. Dann ist $|x'_{m_2}| > \frac{G_2 - K}{\sqrt{G_2}} - K$. In dieser Weise fahren wir fort. So erhalten wir eine Nullfolge x_n, während die transformierte Folge x'_n eine Teilfolge enthält, in der die absoluten Beträge der Glieder über alle Schranken wachsen. In diesem Beweis werden die $a_{\mu\nu}$ reell vorausgesetzt, d. h. die Bedingungen A und B sind für reelle $a_{\mu\nu}$ notwendig, also auch allgemein für komplexe.

Die Bedingungen sind hinreichend. Beweis wie bei Toeplitz:

$$|x'_n| \leqq (|a_{n1}||x_1| + |a_{n2}||x_2| + \ldots + |a_{nm}||x_m|) + (|a_{n,m+1}||x_{m+1}| + |a_{n,m+2}|x_{m+2}| + \ldots + |a_m||x_m|).$$

Der zweite Klammerausdruck kann durch Wahl von m beliebig klein gemacht werden, weil $x_n \to 0$ und B erfüllt ist, hierauf nach Wahl dieses festen m auch der erste durch passende Wahl von n wegen Bedingung A.

Satz II. Die Bedingungen A und B sind notwendig, denn der Satz soll für beliebige ξ, also auch für $\xi = 0$ gelten. Damit sind wir aber im Fall I.

Nun gilt

$$x'_n = [a_{n1}(x_1 - \xi) + a_{n2}(x_2 - \xi) + \ldots + a_{nn}(x_n - \xi)] + A_n \xi.$$

Da $x_n \to \xi$, also wegen I der Klammerausdruck nach 0 strebt, so muß $A_n \to 1$, wenn $x'_n \to \xi$ gelten soll, d. h. C ist notwendig. Daß die Bedingungen auch hinreichen, ergibt sich aus der eben verwendeten Darstellung für x'_n wie bei Toeplitz.

Satz III. Die Bedingungen A, B, C sind notwendig, denn der Satz soll für beliebige konvergente Folgen (y_n), also auch für die Folge $1, 1, 1, \ldots$ gelten. Damit sind wir aber im Fall II. Nun gilt

$$z_n = [a_{n1}(x_1 - \xi)\, y_n + a_{n2}(x_2 - \xi)\, y_{n-1} + \ldots + a_{nn}(x_n - \xi)\, y_1] + \xi(a_{n1} y_n + a_{n2} y_{n-1} + \ldots + a_{nn} y_1).$$

Da $x_n \to \xi$ und die absoluten Beträge der y_n wegen der vorausgesetzten Konvergenz beschränkt sind, strebt nach dem Toeplitzschen Beweis des Satzes I der erste Klammerausdruck nach 0, also muß der Faktor von ξ im zweiten Klammerausdruck nach η streben, wenn $z_n \to \xi\eta$ gelten soll, d. h. aber Bedingung D ist notwendig gemäß Satz II. Daß die vier Bedingungen auch hinreichen, folgt aus der eben verwendeten Darstellung von z_n wie bei Knopp.

Als Anwendung sei der bekannte Satz von F. Mertens[5]) über die Multiplikation zweier konvergenten Reihen in schärferer Fassung ausgesprochen: *Notwendig und hinreichend dafür, daß für alle bedingt konvergenten Reihen* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ *die mit der konvergenten Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *gebildete Produktreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, *wo*

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1$$

ist, konvergiert und $= A \cdot B$, *ist die absolute Konvergenz der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.[6])

Bezeichnen wir die Teilsummen der drei Reihen entsprechend mit A_n, B_n, C_n und setzen $B_n = B + \beta_n$, so gilt

$$C_n = A_n B + (a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \ldots + a_n \beta_1).$$

Soll $C_n \to AB$, so muß wegen $A_n \to A$ der Klammerausdruck nach 0 streben, daher muß nach Satz I wegen $\beta_n \to 0$

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

unterhalb einer von n unabhängigen Schranke bleiben, d. h. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergieren. Daß die Bedingung hinreicht, sieht man unmittelbar aus der Gestalt von C_n. Für besondere bedingt konvergente Reihen kann die Produktreihe auch konvergieren, ohne daß eine der beiden Reihen absolut konvergiert, wie bekannt.[7])

---

[5]) Siehe z. B. K. Knopp, a. a. O. S. 330—331.

[6]) In etwas anderer Form wurde die Verschärfung von I. Schur a. a. O. S. 100—101 ausgesprochen.

[7]) Siehe z. B. K. Knopp, a. a. O. S. 332.

(Eingegangen am 10. August 1931.)

Kovariante Ableitung und die Cesàroschen Unbeweglichkeitsbedingungen.

Von

Alexander Wundheiler in Warschau.

---

1. In gewissen Untersuchungen ist die Einführung eines *zeitabhängigen Koordinatensystems* angezeigt, und sogar durch die Natur des Problems geboten; es steht damit wie mit der Einführung der allgemeinen krummlinigen Koordinaten. Man denke z. B. an den trièdre mobile von Darboux (Cesàrosches Schiffchen), an die Theorie der Relativbewegung, und besonders an die Bewegung eines Massenpunktes auf einer deformierbaren Fläche (oder in einem deformierbaren Raume). Im letzten Falle läßt sich von einem zeitunabhängigen System überhaupt schwerlich reden.

Die Einführung eines solchen Koordinatensystems — wir wollen es ein rheonomes nennen — läuft auf eine zeitabhängige, *„kinematische“* Transformation

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^k, t) \qquad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

aus. Natürlich ist „Zeit“ nur ein konventioneller Name für den Parameter t. Nun wollen wir einen *absoluten Differentialkalkül* für die „kinematische“ Gruppe (1) aufbauen. Die Gegenüberstellung der gewöhnlichen, „geometrischen“ Gruppe

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^k) \tag{2}$$

und der weiteren (1) führt zur Unterscheidung von n-tupeln, die sich *nur* unter (2) nach der Formel

$$\bar{X}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} X^k \quad \text{bzw.} \quad \underline{X}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} X_k \tag{3}$$

transformieren, von solchen, die es auch unter (1) tun. Die ersten nennen wir *„schwache“*, die zweiten *„starke“* Vektoren. Entsprechend lautet die Definition für Tensoren. Starke Tensoren transformieren sich also unter (1), als ob dort t überhaupt nicht vorkäme.

Zur Erläuterung bemerken wir, daß $\frac{dx^i}{dt}$ nur ein schwacher Vektor ist, wogegen $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ ein starker kovarianter Vektor, wenn nur φ ein starker Skalar ist.

Wir machen noch die folgende Bemerkung: In einem zeitunabhängigen — skleronomen — System sind jedem Punkte nur n Zahlen, seine Koordinaten zugeordnet; in einem rheonomen dagegen außerdem noch eine „Geschwindigkeit“ $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial t}$. Zwei rheonome Systeme können verschieden sein, auch wenn dieselben Punkte in den beiden dieselben Koordinaten haben: nämlich wenn die betreffenden $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial t}$ verschieden sind.

Die Transformation (1) ändert gewissermaßen die „Identität“ der Raumpunkte: denselben x^i entsprechen bei verschiedenen t nicht dieselben $\bar{x}^i$. Strenggenommen, kann bei Zugrundelegung von (1) von *demselben* Raumpunkte zu verschiedenen Zeiten nicht gesprochen werden (höchstens konventionell).

2. Der gewöhnliche, unter Zugrundelegung von (2) aufgebaute absolute Differentialkalkül ersetzt das Differential eines Vektors X durch die Formen:

$$\delta X^i = dX^i + \Gamma^i_{jk} X^j dx^k, \qquad \delta X_i = dX_i - \Gamma^j_{ik} X_j dx^k, \tag{4}$$

welche unter (2) einen Vektor darstellen, wenn sich nur die Γ^i_{jk} nach den Formeln

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^k} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \tag{5}$$

transformieren. (4) ist aber nur ein *schwacher* Vektor, die Gestalt (4) ist den Transformationen (1) gegenüber nicht kovariant. Die Forderung der „*starken*“ Kovarianz zwingt zur Ergänzung von (4) durch ein Glied mit dt:

$$\begin{aligned} \delta X^i &= dX^i + \Gamma^i_{jk} X^j dx^k + \Lambda^i_j X^j dt, \\ \delta X_i &= dX_i - \Gamma^j_{ik} X_j dx^k - \Lambda^j_i X_j dt \end{aligned} \tag{6}$$

mit der Festsetzung:

$$\bar{\Lambda}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial t} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^j} \Lambda^\lambda_\mu + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^j \partial t}. \tag{7}$$

Wir schenken uns die Verifizierung, daß sich (6), den Gleichungen (7) zufolge, unter (1) nach den Gesetzen (3), also wie ein starker Vektor transformieren: das ist eine einfache Rechnung. Sind also in *einem* bestimmten (rheonomen) Koordinatensystem die Γ^i_{jk} und Λ^i_j gegeben, so ist damit auch *eine* „starke“ Geometrie erklärt.

Die Erweiterung der Definition der kovarianten starken Ableitung für Tensoren bietet keine Schwierigkeiten: für jeden Tensorindex werden wir eine Form

$$\Gamma^i_{jk} T^{\cdots j \cdots} dx^k + \Lambda^i_j T^{\cdots j \cdots} dt \quad \text{bzw.} \quad -\Gamma^j_{ik} T_{\ldots j \ldots} dx^k - \Lambda^j_i T_{\ldots j \ldots} dt$$

haben. Man verifiziert weiter leicht, daß das starke Differential diesen Namen verdient, d. h. daß die formalen Differentiationsgesetze:

$$\delta p = dp \qquad (p \text{ starker Skalar});$$

$$\delta(\Phi + \Psi) = \delta\Phi + \delta\Psi; \qquad (\Phi, \Psi \text{ starke Tensoren}) \tag{8}$$

$$\delta(\Phi\Psi) = \Phi\delta\Psi + \Psi\delta\Phi$$

in Permanenz bleiben. Es ist dazu bequem, (6) in der Form

$$\delta X^i = dX^i + \omega_j^i X^j, \quad \delta X_i = dX_i - \omega_i^j X_j \tag{9}$$

zu schreiben, wo ω_j^i eine Differentialform bezeichnet.

3. Gibt es ein Koordinatensystem, in welchem die Λ_j^i verschwinden — die Geometrie werden wir dann skleronom nennen —, so lassen sich die Λ_j^i in einem anderen Koordinatensystem leicht berechnen. Das ausgezeichnete System sei $\bar{x}^i$; das starke Differential hat in ihm also die Gestalt:

$$\delta \bar{X}^i = d\bar{X}^i + \bar{\Gamma}_{jk}^i \bar{X}^j d\bar{x}^k. \tag{10}$$

Nun haben wir wegen (3):

$$\begin{aligned}
\delta \bar{X}^i &= d\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} X^\alpha\right) + \bar{\Gamma}_{jk}^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\beta} X^\beta \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\gamma} dx^\gamma \\
&= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} dX^\alpha + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} X^\beta dx^\gamma + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^\beta \partial t} X^\beta dt + \bar{\Gamma}_{jk}^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\gamma} X^\beta dx^\gamma \\
&= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\left[dX^\alpha + \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^h} \frac{\partial^2 \bar{x}^h}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^h} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\gamma} \bar{\Gamma}_{jk}^h\right) X^\beta dx^\gamma + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^h} \frac{\partial^2 \bar{x}^h}{\partial x^\beta \partial t} X^\beta d\right.
\end{aligned}$$

also (vgl. (5)):

$$\delta \bar{X}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\left[dX^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha X^\beta dx^\gamma + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^h} \frac{\partial^2 \bar{x}^h}{\partial x^\beta \partial t} X^\beta dt\right]. \tag{11}$$

Es gilt daher:

$$\Lambda_\beta^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^h} \frac{\partial^2 \bar{x}^h}{\partial x^\beta \partial t}. \tag{12}$$

Im allgemeinen Fall läßt sich natürlich ein System, in welchem die Λ_j^i verschwinden, nicht konstruieren.

4. Nun setzen wir voraus, daß der Raum euklidisch ist und das System $\bar{x}^i$ gerade kartesisch. Wir bezeichnen es jetzt mit y^i, setzen in (5) y^i für x^i, und x^i für $\bar{x}^i$:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^\lambda} \frac{\partial^2 y^\lambda}{\partial x^j \partial x^k}. \tag{13}$$

Ist insbesondere die Transformation

$$x^i = x^i(y^k, t) \tag{14}$$

in den y^k linear und orthogonal, so setzen wi

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^k} = o_k^i, \quad \frac{\partial y^k}{\partial x^h} = o_k^h \tag{15}$$

und haben, wie wohl bekannt:

$$o_h^i o_k^i = \begin{cases} 1, h = k, \\ 0, h \neq k. \end{cases} \tag{16}$$

Hier verschwindet der Unterschied zwischen ko- und kontravariant. Wir haben nach (12):

$$A_k^i = A_{ik} = o_h^i \dot{o}_h^k, \quad A_{ik} = -A_{ki}. \tag{17}$$

Der Punkt über dem Buchstaben bezeichnet Differentiation nach t. Nun ist (17) nichts anderes als die *Drehgeschwindigkeit* des rechtwinkligen Koordinatensystems x^i, das sich nach (14) bewegt. Wir bezeichnen sie mit F_{ik} und schreiben (6) in der Gestalt:

$$\delta X_i = dX_i + F_{ik} X_k dt, \tag{18}$$

die eigentlich aus der Mechanik, und namentlich aus der Theorie der Relativbewegung in Vektorsprache, geläufig ist, und die absolute Änderungsgeschwindigkeit eines in bezug auf ein bewegtes System erklärten Vektors angibt.

Wählen wir nun als das Koordinatensystem x^i das begleitende Dreikant einer Raumkurve C und setzen t gleich der Bogenlänge s, so ergeben sich die Darbouxschen Formeln[1]) für F_{ik} spielend leicht. In der Tat, die aus (18) entspringende Gleichung

$$\frac{\delta X_i}{ds} = \frac{dX_i}{ds} + F_{ik} X_k \tag{19}$$

ist *kovariant*. Bedeutet X_i die Einheitstangente t an C, so ist $\frac{\delta X_i}{ds}$ der Krümmungsvektor $\frac{\mathfrak{n}}{\varrho}$. Im Koordinatensystem x^i sind die Koordinaten dieser beiden Vektoren bzw.

$$(1, 0, 0) \quad \text{und} \quad \left(0, \frac{1}{\varrho}, 0\right).$$

Setzen wir das in (19) ein, so ergibt sich für $i = 2$: $F_{21} = \frac{1}{\varrho}$.

Bedeutet weiter $X_i = \mathfrak{b}$ die Binormale $(0, 0, 1)$, so muß $\frac{\delta \mathfrak{b}}{ds}$ die Torsion $\left(0, \frac{1}{\tau}, 0\right)$ ergeben. Setzen wir das in (19) ein, so kommt abermals für $i = 2$: $F_{23} = \frac{1}{\tau}$. Für $i = 1$ aber kommt $F_{13} = 0$ Damit ist F_{ik} in der Form

[1]) Vgl. z. B.: Kommerell und Kommerell, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, Gruyter 1931, I., S. 29.

$$(20) \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & -\frac{1}{\varrho} & 0 \\ \frac{1}{\varrho} & 0 & \frac{1}{\tau} \\ 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \end{matrix} \right\|$$

gegeben. Natürlich kann man F_{ik} in dem dreidimensionalen Raum durch den zugehörigen Vektor $\mathfrak{w}$ ersetzen, für den die bekannten Komponenten $\left(\frac{1}{\tau}, 0, \frac{1}{\varrho}\right)$ ausfallen.

5. Ebenso unmittelbar und eindrucksvoll erhalten wir die Cesàroschen Unbeweglichkeitsbedingungen, die wir für den dreidimensionalen Fall ableiten. x^i behalten ihre letzte Bedeutung, O sei der Ursprung des unbeweglichen Koordinatensystems, M der laufende Punkt der Kurve C, P ein unbeweglicher Punkt im Raume. δ bedeutet immer das *starke* kovariante Differential. Wir haben:

$$(21) \qquad OP = OM + MP, \qquad \frac{\delta OP}{ds} = \frac{\delta OM}{ds} + \frac{\delta MP}{ds}.$$

Nun ist $\frac{\delta OP}{ds} = 0$ im unbeweglichen, *also auch in jedem* Koordinatensystem. Es gilt also:

$$\frac{\delta MP}{ds} = -\frac{\delta OM}{ds}$$

oder

$$\frac{\delta MP}{ds} = -\mathrm{t},$$

wo t die Einheitstangente an C in M bedeutet. Das sind eigentlich schon die angesagten Unbeweglichkeitsbedingungen. Um sie in der gewöhnlichen Form zu erhalten, gehen wir zu Koordinaten über und bedenken, daß im System x^i die Tangente t die Komponente $(1, 0, 0)$ hat. Es folgt, wenn wir die Formeln (19) und (20) berücksichtigen:

$$(22) \qquad \frac{dx^1}{ds} - \frac{x^2}{\varrho} = -1, \qquad \frac{dx^2}{ds} + \frac{x^1}{\varrho} + \frac{x^3}{\tau} = 0, \qquad \frac{dx^3}{ds} - \frac{x^2}{\tau} = 0,$$

also gerade die Cesàroschen Gleichungen (vgl. z. B. Kowalewski, Allgemeine natürliche Geometrie, S. 76. Gruyter, Leipzig 1931. Die Gleichungen (8) auf S. 77 sind mit der zweiten Gleichung (21) identisch).

6. Ebenso einfach stellt sich die Theorie der Relativbewegung dar. Aus (21) erhalten wir zuerst

$$\frac{\delta OP}{dt} = \frac{\delta OM}{\delta t} + \frac{\delta MP}{dt},$$

also

$$(23) \qquad v^i = \underset{0}{v}{}^i + \frac{dx^i}{dt} + F_{ik} x^k = \underset{m}{v}{}^i + \underset{r}{v}{}^i.$$

Hier ist der schwache Vektor $\frac{dx^i}{dt}$ die Relativgeschwindigkeit, die zwei übrigen Summanden bilden, im Einklang mit bekannten Formeln, die Mitführungsgeschwindigkeit. Differenziert man stark kovariant (23), so erhält man nach leichter Ausrechnung die bekannten Formeln für die Mitführungs- und Coriolisbeschleunigung.

Einer Verallgemeinerung des „starken" Tensorkalküls für Transformationen

$$\bar{x}^i = f^i(x^k, t_1, \ldots, t_r), \tag{24}$$

die von mehreren Parametern abhängen, steht nichts im Wege. Wir erhalten als starkes kovariantes Differential den Ausdruck:

$$\delta u^i = du^i + \Gamma^i_{jk} u^j dx^k + \Lambda^i_{j\alpha} u^j dt_\alpha, \tag{25}$$

wobei die Transformationsweise der $\Lambda^i_{j\alpha}$ sehr leicht zu erschließen ist. Gilt es das Differential eines Tensors zu bilden, so erhalten wir für jeden Tensorindex eine Gliedergruppe wie in (25).

Man gelangt zu einem „starken" Übertragen in extrinseker (Levi-Civitascher) Weise, indem man z. B. eine einfach unendliche Schar von aufeinander geschichteten Räumen $\mathfrak{B}(t)$ betrachtet, die in einem Oberraume $\mathfrak{A}$ eingetaucht sind. Die Transformation (1) läuft auf eine Änderung der gegenseitigen Zuordnung der Punkte verschiedener $\mathfrak{B}(t)$. „Starke" Vektoren sind diejenigen, die in $\mathfrak{B}(t)$ liegen. Das starke Differential erhält man durch Projektion auf $\mathfrak{B}(t)$ des Differentials, das in $\mathfrak{A}$ existiert. Die Projektionsrichtung ist beliebig.

Faßt man die Sache so auf, so erscheint die „starke" Geometrie eigentlich als der integrable Fall der nichtholonomen Geometrie, die in letzter Zeit von verschiedenen Autoren ausgearbeitet wurde.

(Eingegangen am 21. November 1931.)

Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen.

Von

Eduard Rembs in Berlin.

Eine analytische Verbiegung einer Fläche liegt vor, wenn sie einer isometrischen Flächenschar angehört, die eine in einem gewissen Intervall konvergente Entwicklung nach dem Scharparameter t zuläßt. Zur Bestimmung der Glieder erster Ordnung in t, der „infinitesimalen Verbiegungen", sind verschiedene Methoden angegeben worden[1]). Eine Behandlungsweise, die keine der Flächenkoordinaten bevorzugt, stellt die mit der Weingartenschen Funktion dar. Sie genügt einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Eine andere Art führt auf ein System von drei Gleichungen, die man als Gaußsche und Codazzische Gleichungen bezeichnen kann. Man kommt darauf, wenn man versucht, zunächst die jeder infinitesimalen Verbiegung „assoziierte Fläche", den „Drehriß", zu bestimmen. Hier besteht die gleiche Symmetrie wie bei der Weingartenschen Methode. Endlich können die Änderungen der Koordinaten direkter Bestimmung zugänglich gemacht werden.

Über gewisse Fragen der Flächenverbiegung geben schon die infinitesimalen Verbiegungen Auskunft. Hat man z. B. gezeigt, daß sie eine bestimmte einfache Form haben müssen, die als infinitesimale Bewegung bezeichnet wird, so ergibt sich, daß alle Flächen der Entwicklung untereinander kongruent sind[2]). Umgekehrt läßt aber die infinitesimale Verbiegbarkeit keinen Schluß zu auf die endliche, wie durch ein Beispiel in dieser Arbeit belegt wird[3]).

In vielen Fällen ist also die Untersuchung der höheren Glieder unserer Entwicklung nach t, der Verbiegungen zweiter, dritter Stufe usw., unerläßlich. Solche Verbiegungen hat Liebmann[4]) behandelt; er hat gezeigt,

[1]) Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2. Aufl. (1910), Kap. 11.
[2]) Liebmann, Leipziger Berichte 1901, S. 215.
[3]) Ein anderes Beispiel bei Lagally, Math. Zeitschr. 18 (1923), S. 323.
[4]) Münchener Berichte 1920, S. 21–48.

daß zur Bestimmung der Änderungen beliebig hoher Stufe einer bestimmten Flächenkoordinate die Änderungen der andern Koordinaten nicht in Betracht gezogen zu werden brauchen. Lagally[5]) hat die Methode der Weingartenschen Funktion auf die Verbiegungen höherer Stufe ausgedehnt. Die Methode des Drehrisses dagegen scheint noch nicht verallgemeinert worden zu sein.

Eine solche Verallgemeinerung ist aber aus folgendem Grunde wünschenswert. Will man Unverbiegbarkeit einer Fläche beweisen, so stellt der Umstand, daß es stets gilt, gewisse triviale „Verbiegungen", nämlich die Bewegungen, mit in Betracht zu ziehen, ein nicht zu unterschätzendes Hindernis dar. In der Drehrißmethode sind nun aber die infinitesimalen Bewegungen sozusagen unschädlich gemacht. Im Fall der infinitesimalen Bewegung ist nämlich der Drehriß einfach ein Punkt, sein Ortsvektor, anders gesprochen, ein konstanter Vektor. Man kann daher erwarten, daß es nützlich sein wird, eine analoge Methode auch für Verbiegungen höherer Stufe anzugeben. Dies soll im folgenden geschehen.

Das Problem der Verbiegung erster Stufe ist gleichbedeutend mit dem der Flächen, die einander durch Orthogonalität der Elemente entsprechen. Auch die Verbiegungen höherer Stufe können auf jenes Problem reduziert werden. Indem wir in § 1 diesen Weg gehen, entspricht die Darstellung Schritt für Schritt der von Blaschke[6]) für die erste Stufe. Zu der Verbiegung jeder Stufe wird eine „assoziierte Fläche" definiert.

Die Bestimmung der assoziierten Flächen führt, wie in § 2 gezeigt wird, auf ein System von drei Gleichungen, von denen eine endlich ist, die zwei andern Differentialgleichungen erster Ordnung sind. Auch auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (Weingartensche Gleichung) kann die Aufgabe zurückgeführt werden, wenn man die nach der Normalen der Ausgangsfläche genommene Komponente des Ortsvektors der assoziierten Flächen benützt. Diese Komponente, die für die beiden ersten Ordnungen mit der Weingarten-Lagallyschen Funktion übereinstimmt, soll Volterrasche Funktion heißen.

§ 3 handelt von der speziellen Form, die die analytischen Verbiegungen annehmen, wenn bewiesen ist, daß jede infinitesimale Verbiegung der Fläche eine infinitesimale Bewegung sein muß.

Als Anwendung der Biegungen zweiter Stufe, wie wir sie in § 1 besprechen, wird in § 4 ein Beispiel gegeben. In einer früheren Arbeit[7]) ist die infinitesimale Unverbiegbarkeit der Flächen bewiesen worden, die „im Innern durchweg positives Krümmungsmaß haben, aber von solchen ebenen

---

[5]) Loc. cit. [3]); dort weitere Literaturangaben.

[6]) Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 3. Aufl. (1930), § 93. (Freilich ist Blaschkes Drehriß noch von t abhängig.)

[7]) Rembs, Berliner Sitzungsberichte 1930, S. 123—133.

Rändern parabolischer Krümmung begrenzt werden, daß die Ebene jedes Randes zugleich Tangentialebene in allen Punkten dieses Randes ist". In einer neueren Arbeit in der Mathematischen Zeitschrift habe ich ferner auf den Unterschied aufmerksam gemacht, der zwischen der infinitesimalen Verbiegbarkeit jener Flächen und derer besteht, die ebensolche Ränder haben, deren Krümmung im Innern aber überall negativ ist. Unter diesen gibt es infinitesimal unverbiegbare und infinitesimal verbiegbare. Damit war die Frage nach der Verbiegbarkeit dieser Flächen in höherer Ordnung aufgeworfen. Während nun die Entscheidung in einem ähnlich liegenden Fall scheinbar auf Schwierigkeiten stößt[8]), gibt die Betrachtung der Verbiegungen zweiter Ordnung hier schon das Resultat: Jene infinitesimal verbiegbaren Flächen lassen keine Verbiegungen zweiter Ordnung zu. Aber man braucht hierbei gar nicht die in Rede stehenden Flächen in ganzer Ausdehnung zu betrachten, vielmehr überraschenderweise nur einen schmalen Streifen längs eines Randes.

Auf einer Fläche sei nämlich eine geschlossene ebene Kurve, und zwar insbesondere eine Eilinie parabolischer Flächenkrümmung gelegen, deren Ebene zugleich in allen Punkten der Kurve Tangentialebene der Fläche ist; die Fläche liege also in der Umgebung der Kurve ganz auf der einen Seite jener Tangentialebene, mit andern Worten, diese sei eine Stützebene der Fläche, und die parabolische Kurve trenne ein Gebiet von Punkten positiver Krümmung von einem solchen negativer Flächenkrümmung. Das Stück der Fläche, das durch eine der Tangentialebene beliebig benachbarte, z. B. parallele Schnittebene abgeschnitten wird, soll eine „geschlossene ebene eiförmige Rinne" heißen. (Man stelle sich z. B. die Ringfläche vor; die sehr zweckmäßige Bezeichnung „Rinne" habe ich von Herrn Prof. Liebmann übernommen.) Der positiv bzw. negativ gekrümmte Teil der Rinne mit Einschluß jeweils der parabolischen Kurve heiße Halbrinne. Beide Arten geschlossener Halbrinnen sind in erster Ordnung verbiegbar, wenigstens für die an Rotationsflächen vorkommenden (bei denen die Eilinie parabolischer Flächenkrümmung ein Kreis ist) ist das bewiesen. Sie gestatten aber keine reguläre Verbiegung zweiter Ordnung. Die Unverbiegbarkeit der geschlossenen ebenen eiförmigen Rinnen bedeutet natürlich, daß auch jede Fläche, die eine solche Rinne oder Halbrinne enthält, als starr gelten kann.

Was die Differenzierbarkeit nach den Flächenparametern betrifft, so wird man für die Biegungsflächen dieselben Forderungen stellen wie für die Ausgangsfläche. In den ersten Paragraphen kommt man mit dreimaliger Differenzierbarkeit aus. Der Satz des § 4 ist dagegen nur für analytische Flächenrinnen bewiesen.

---

[8]) Cohn-Vossen, Math. Annalen 102 (1929), S. 23–25.

§ 1.

Die assoziierten Flächen.

$\mathfrak{x}(u, v)$ sei der Ortsvektor der zu verbiegenden Fläche.

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + 2t\mathfrak{z} + 2t^2\mathfrak{z}^{(2)} + \ldots, \tag{1}$$

wo die $\mathfrak{z}$ auch von u, v abhängig sind, stellt eine Verbiegung bestimmter Stufe dar, wenn die Entwicklung nur bis zu der entsprechenden Ordnung berücksichtigt wird und die Gleichung

$$d\mathfrak{x}_1^2 = d\mathfrak{x}^2$$

bis zu den Gliedern dieser Ordnung erfüllt ist. Statt dessen schreiben wir

$$d(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}) \cdot d(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}) = 0 \tag{2}$$

und haben somit dasselbe Problem der Flächen, die sich durch Orthogonalität der Elemente entsprechen, wie es für die Verbiegungen erster Stufe auftritt. Zwar besteht ein wichtiger Unterschied, insofern weder $\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}$ noch $\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}$ bekannt ist. Wählt man aber für $\mathfrak{x}_1$ die Entwicklungen (1), so bedeutet (2) eine Reihe von Gleichungen, die die Verbiegungen beliebiger Stufe zu behandeln gestattet, wenn die der niedrigeren Stufen bekannt sind. Auf Grund von (2) kann man die Rechnung ganz analog der Verbiegung erster Stufe durchführen. Statt (2) wollen wir setzen

$$d(t\mathfrak{z} + t^2\mathfrak{z}^{(2)} + \ldots) \cdot d(\mathfrak{x} + t\mathfrak{z} + t^2\mathfrak{z}^{(2)} + \ldots) = 0. \tag{3}$$

Hierin sind folgende Gleichungen zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} &d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{z} = 0, \\ &d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{z}^{(2)} + d\mathfrak{z}^2 = 0, \\ &d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{z}^{(3)} + d\mathfrak{z}\, d\mathfrak{z}^{(2)} + d\mathfrak{z}^{(2)} d\mathfrak{z} = 0 \quad \text{usw.}, \end{aligned}$$

die sich durch Berücksichtigung aller Glieder in (3) mit derselben Potenz von t ergeben; man sieht auch, warum der Faktor 2 in (1) überall mit Ausnahme des ersten Gliedes zugefügt ist.

Wir versuchen, (3) durch den folgenden Ansatz zu lösen:

$$d(t\mathfrak{z} + t^2\mathfrak{z}^{(2)} + \ldots) = (t\mathfrak{y} + t^2\mathfrak{y}^{(2)} + \ldots) \times d(\mathfrak{x} + t\mathfrak{z} + t^2\mathfrak{z}^{(2)} + \ldots),$$

oder ausführlich

$$\begin{aligned} d\mathfrak{z} &= \mathfrak{y} \times d\mathfrak{x}, \\ d\mathfrak{z}^{(2)} &= \mathfrak{y} \times d\mathfrak{z} + \mathfrak{y}^{(2)} \times d\mathfrak{x}, \\ d\mathfrak{z}^{(3)} &= \mathfrak{y} \times d\mathfrak{z}^{(2)} + \mathfrak{y}^{(2)} \times d\mathfrak{z} + \mathfrak{y}^{(3)} \times d\mathfrak{x} \quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{4}$$

Durch die erste der Gleichungen (4) wird eindeutig und widerspruchslos der Drehvektor $\mathfrak{y}$ der infinitesimalen Verbiegung definiert, jedenfalls überall,

wo nicht alle Komponenten von $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ verschwinden, und die assoziierte Fläche, deren Ortsvektor der Vektor $\mathfrak{y}$ ist. Jede der folgenden Gleichungen definiert ebenso einen Vektor $\mathfrak{y}^{(i)}$, der überall in derselben Verbindung $\mathfrak{y}^{(i)} \times d\mathfrak{x}$ auftritt, und eine assoziierte Fläche, deren Ortsvektor der Vektor $\mathfrak{y}^{(i)}$ darstellt.

Die Gleichungen

$$\begin{aligned}(t\mathfrak{z}_u + t^2\mathfrak{z}_u^{(2)} + \ldots) &= (t\mathfrak{y} + t^2\mathfrak{y}^{(2)} + \ldots) \times (\mathfrak{x}_u + t\mathfrak{z}_u + \ldots),\\ (t\mathfrak{z}_v + t^2\mathfrak{z}_v^{(2)} + \ldots) &= (t\mathfrak{y} + t^2\mathfrak{y}^{(2)} + \ldots) \times (\mathfrak{x}_v + t\mathfrak{z}_v + \ldots)\end{aligned} \tag{5}$$

ergeben wegen

$$\frac{\partial}{\partial v}(t\mathfrak{z}_u + t^2\mathfrak{z}_u^{(2)} + \ldots) = \frac{\partial}{\partial u}(t\mathfrak{z}_v + t^2\mathfrak{z}_v^{(2)} + \ldots)$$

die folgende Bedingung für die $\mathfrak{y}^{(i)}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}(t\mathfrak{y} + t^2\mathfrak{y}^{(2)} + \ldots) \times \frac{\partial}{\partial u}(\mathfrak{x} + t\mathfrak{z} + \ldots)&\\ = \frac{\partial}{\partial u}(t\mathfrak{y} + \ldots) \times \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x} + t\mathfrak{z} + \ldots).&\end{aligned} \tag{6}$$

Aus ihnen schließen wir, daß sich $t\mathfrak{y}_u + t^2\mathfrak{y}_u^{(2)} + \ldots$ und $t\mathfrak{y}_v + t^2\mathfrak{y}_v^{(2)} + \ldots$ linear aus $\mathfrak{x}_u + t\mathfrak{z}_u + \ldots$ und $\mathfrak{x}_v + t\mathfrak{z}_v + \ldots$ zusammensetzen lassen in der Form

$$\begin{aligned}t\mathfrak{y}_u + t^2\mathfrak{y}_u^{(2)} + \ldots &= (t\alpha + t^2\alpha_2 + \ldots)(\mathfrak{x}_u + t\mathfrak{z}_u + \ldots)\\ &\quad + (t\beta + t^2\beta_2 + \ldots)(\mathfrak{x}_v + t\mathfrak{z}_v + \ldots),\\ t\mathfrak{y}_v + t^2\mathfrak{y}_v^{(2)} + \ldots &= (t\gamma + t^2\gamma_2 + \ldots)(\mathfrak{x}_u + t\mathfrak{z}_u + \ldots)\\ &\quad + (t\delta + t^2\delta_2 + \ldots)(\mathfrak{x}_v + t\mathfrak{z}_v + \ldots),\end{aligned} \tag{7}$$

an deren Stelle wieder, wie in (4), alle die Gleichungen gesetzt werden könnten, die durch Vergleichen der Glieder mit gleichen Potenzen von t entstehen. Indem man (5) und dann nochmals (7) anwendet, kann (7) auch die folgende Gestalt gegeben werden:

$$\begin{aligned}t\mathfrak{y}_u + t^2\mathfrak{y}_u^{(2)} + \ldots &= (t\alpha + t^2\alpha_2 + \ldots)\mathfrak{x}_u + (t\beta + t^2\beta_2 + \ldots)\mathfrak{x}_v\\ &\quad + (t\mathfrak{y} + t^2\mathfrak{y}^{(2)} + \ldots) \times (t\mathfrak{y}_u + t^2\mathfrak{y}_u^{(2)} + \ldots),\\ t\mathfrak{y}_v + t^2\mathfrak{y}_v^{(2)} + \ldots &= (t\gamma + t^2\gamma_2 + \ldots)\mathfrak{x}_u + (t\delta + t^2\delta_2 + \ldots)\mathfrak{x}_v\\ &\quad + (t\mathfrak{y} + t^2\mathfrak{y}^{(2)} + \ldots) \times (t\mathfrak{y}_v + t^2\mathfrak{y}_v^{(2)} + \ldots).\end{aligned} \tag{8}$$

Endlich muß noch bemerkt werden, daß sich durch Einsetzen von (7) in (6) ergibt

$$t\alpha + t^2\alpha_2 + \ldots = -t\delta - t^2\delta_2 - \ldots, \tag{9}$$

d. i. $\alpha = -\delta$, $\alpha_2 = -\delta_2$ usw.

Für die erste Stufe führen die Gleichungen (8) auf die bekannten Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}_u &= \alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v, \\ \mathfrak{y}_v &= \gamma \mathfrak{x}_u + \delta \mathfrak{x}_v. \end{aligned} \tag{10}$$

Die entsprechenden Gleichungen für die zweite Stufe und dritte Stufe lauten

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}_u^{(2)} &= \mathfrak{y} \times \mathfrak{y}_u + \alpha_2 \mathfrak{x}_u + \beta_2 \mathfrak{x}_v, \\ \mathfrak{y}_v^{(2)} &= \mathfrak{y} \times \mathfrak{y}_v + \gamma_2 \mathfrak{x}_u + \delta_2 \mathfrak{x}_v \end{aligned} \tag{11}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}_u^{(3)} &= \mathfrak{y} \times \mathfrak{y}_u^{(2)} + \mathfrak{y}^{(2)} \times \mathfrak{y}_u + \alpha_3 \mathfrak{x}_u + \beta_3 \mathfrak{x}_v, \\ \mathfrak{y}_v^{(3)} &= \mathfrak{y} \times \mathfrak{y}_v^{(2)} + \mathfrak{y}^{(2)} \times \mathfrak{y}_v + \gamma_3 \mathfrak{x}_u + \delta_3 \mathfrak{x}_v. \end{aligned} \tag{12}$$

Die α_i, β_i, γ_i, δ_i genügen außer (9) einem System von drei Gleichungen, die im nächsten Paragraphen aufgestellt werden. Nach Bestimmung dieser Koeffizienten erhält man aus (8) durch Quadraturen die $\mathfrak{y}^{(i)}$, darauf mittels (4) die $\mathfrak{z}^{(i)}$. Es sei noch bemerkt, daß $-\beta_i$, α_i, γ_i für die beiden ersten Stufen mit den Variationen der betreffenden Stufe der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N der Ausgangsfläche proportional sind.

§ 2.

Die Bestimmungsgleichungen und die Volterrasche Funktion.

1. Die in diesem Paragraphen aufzustellenden Gleichungen für α_i, β_i, γ_i, δ_i und die Volterrasche Funktion sind für die erste Stufe homogen. Durch Z.F. werden bei den höheren Stufen gewisse zusätzliche Funktionen bezeichnet, die nach dem angegebenen Gang der Rechnung leicht zu bestimmen sind, deren genauere Form aber hier nicht interessiert.

Die Gleichungen (8) ergeben allgemein

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}_u^{(i)} &= \sum_{k=1}^{i-1} \mathfrak{y}^{(k)} \times \mathfrak{y}_u^{(i-k)} + \alpha_i \mathfrak{x}_u + \beta_i \mathfrak{x}_v, \\ \mathfrak{y}_v^{(i)} &= \sum_{k=1}^{i-1} \mathfrak{y}^{(k)} \times \mathfrak{y}_v^{(i-k)} + \gamma_i \mathfrak{x}_u + \delta_i \mathfrak{x}_v, \end{aligned} \tag{13}$$

mit

$$\alpha_i = -\delta_i. \tag{14}$$

Wir stellen die Integrabilitätsbedingung $\mathfrak{y}_{uv}^{(i)} = \mathfrak{y}_{vu}^{(i)}$ auf, multiplizieren sie skalar mit dem Vektor der Flächennormalen

$$\xi = \frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{\sqrt{(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)^2}}, \tag{15}$$

ebenso mit $\mathfrak{x}_u$ und endlich mit $\mathfrak{x}_v$. Lösen wir die beiden letzteren Glei-

chungen noch nach $\frac{\partial \alpha_i}{\partial v} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial u}$ und $\frac{\partial \alpha_i}{\partial u} + \frac{\partial \beta_i}{\partial v}$ auf, so erhalten wir die gesuchten Gleichungen für $\alpha_i = -\delta_i$, β_i, γ_i, die für die erste Stufe lauten:

$$L\gamma - 2M\alpha - N\beta = 0, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \gamma}{\partial u} &= \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \gamma - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \alpha - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \beta, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial \beta}{\partial v} &= \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \gamma - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \alpha - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \beta. \end{aligned} \tag{17}$$

Darin bedeuten die Koeffizienten die Christoffelschen Symbole, gebildet für die erste Fundamentalform der Fläche. Für die höheren Stufen treten in (16), (17) noch nach dem angegebenen Verfahren zu berechnende Z.F. hinzu, die die $\mathfrak{y}$ bis zur $(i-1)$-ten Stufe enthalten.

2. Wir betrachten nunmehr die Funktion

$$\varphi = \mathfrak{y}^{(i)} \cdot \xi. \tag{18}$$

Sie ist für die erste Stufe mit der Weingartenschen Funktion identisch. Da Volterra erkannt hat, daß die Weingartensche Funktion in der Form (18) dargestellt werden kann, wollen wir auch für die höheren Stufen die Funktion φ als Volterrasche Funktion bezeichnen. Man bilde die Ableitungen von φ und ersetze $\mathfrak{y}_u^{(i)}$ und $\mathfrak{y}_v^{(i)}$ nach (13). Da $\mathfrak{x}_u \cdot \xi = \mathfrak{x}_v \cdot \xi = 0$ ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi_u &= \sum (\mathfrak{y}^{(k)} \mathfrak{y}_u^{(i-k)} \xi) + \mathfrak{y}^{(i)} \xi_u, \\ \varphi_v &= \sum (\mathfrak{y}^{(k)} \mathfrak{y}_v^{(i-k)} \xi) + \mathfrak{y}^{(i)} \xi_v. \end{aligned} \tag{19}$$

Die Gleichungen (19) werden nochmals nach u und nach v differenziert und $\mathfrak{y}_u^{(i)}$, $\mathfrak{y}_v^{(i)}$ nach (13) ersetzt. Die unter den Summenzeichen auftretenden $\mathfrak{y}$ bis zur $(i-1)$-ten Ordnung werden als bekannt angesehen. In den vier Gleichungen treten u. a. folgende Größen auf:

$$\alpha_i \mathfrak{x}_u \xi_u + \beta_i \mathfrak{x}_v \xi_u = -L\alpha_i - M\beta_i,$$

ferner

$$-L\gamma_i - M\delta_i, \quad -M\alpha_i - N\beta_i, \quad -M\gamma_i - N\delta_i.$$

Werden die vier Gleichungen mit N, $-M$, $-M$, L multipliziert und addiert, so heben sich wegen $\alpha_i = -\delta_i$ diese vier Größen auf, und man erhält

$$L\varphi_{vv} - 2M\varphi_{uv} + N\varphi_{uu} = (L\xi_{vv} - 2M\xi_{uv} + N\xi_{uu}) \cdot \mathfrak{y}^{(i)} + \text{Z.F.} \tag{20}$$

Wenn $\xi_u \times \xi_v \neq 0$, also $LN - M^2 \neq 0$ ist, kann man bekanntlich die Vektoren $\xi_{vv}, \xi_{uv}, \xi_{uu}$ linear aus ξ_u, ξ_v, ξ zusammensetzen. (Grundformeln der Flächentheorie, angewandt auf das sphärische Bild, z. B. Blaschke, loc. cit. [6]), S. 115.) Ist

$$L\xi_{vv} - 2M\xi_{uv} + N\xi_{uu} = P\xi_u + Q\xi_v + R\xi,$$

und werden die skalaren Produkte in (20), nämlich $\mathfrak{y}^{(i)}\xi_u$, $\mathfrak{y}^{(i)}\xi_v$, $\mathfrak{y}^{(i)}\xi$, nach (18), (19) ersetzt, so erhält man für φ die Weingartensche Gleichung

$$L\varphi_{vv} - 2M\varphi_{uv} + N\varphi_{uu} - P\varphi_u - Q\varphi_v - R\varphi = \text{Z.F.} \tag{21}$$

Im Fall der ersten Stufe verschwinden die Glieder der rechten Seite. Unter Benutzung der Gleichungen, die (16), (17) für die höheren Stufen entsprechen, ließe sich auch leicht zeigen, daß die Komponente von $\mathfrak{y}^{(i)}$ nach jeder festen Richtung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zweitem Glied genügt.

Ist φ bekannt, so setze man $\mathfrak{y}^{(i)}$ in der Form an:

$$\mathfrak{y}^{(i)} = A\xi_u + B\xi_v + C\xi.$$

Wird diese Gleichung skalar mit ξ_u, ξ_v und ξ multipliziert, so kann man vermöge (18), (19) die Koeffizienten A, B, C bestimmen. Endlich folgt $\mathfrak{z}^{(i)}$ aus (4).

§ 3.

Die Bewegungen.

Angenommen, man hätte bewiesen, daß die Gleichungen (16), (17) keine andern Lösungen α, β, γ besitzen als 0, 0, 0. Nach (10) ist dann $\mathfrak{y}_u = \mathfrak{y}_v = 0$. Damit erhalten die Gleichungen (11) dieselbe Form wie (10). Also müssen nunmehr auch α_2, β_2, γ_2 den verkürzten Gleichungen (16), (17) genügen, sie müssen also gemäß unserer Annahme alle 0 sein. Schließt man so weiter, so ergibt sich, daß alle Vektoren $\mathfrak{y}^{(i)}$ konstant sein müssen. (4) gestattet dann, sofort anzugeben, welche Form die Glieder $\mathfrak{z}^{(i)}$ der Entwicklung (1) haben müssen. Man findet

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} &= \mathfrak{a} \times \mathfrak{x} + \mathfrak{b}, \\ \mathfrak{z}^{(2)} &= \mathfrak{a} \times \mathfrak{z} + \mathfrak{a}^{(2)} \times \mathfrak{x} + \mathfrak{b}^{(2)}, \\ \mathfrak{z}^{(3)} &= \mathfrak{a} \times \mathfrak{z}^{(2)} + \mathfrak{a}^{(2)} \times \mathfrak{z} + \mathfrak{a}^{(3)} \times \mathfrak{x} + \mathfrak{b}^{(3)} \quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{22}$$

mit konstanten Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}^{(i)}$, $\mathfrak{b}^{(i)}$.

Die Gleichungen (4) haben nun das Bestehen der Gleichung $d\mathfrak{x}_1^2 = d\mathfrak{x}^2$ zur Folge. Aus (22) aber folgen Gleichungen, die (4) entsprechen, wobei überall die Differentiale durch endliche Differenzen ersetzt zu denken sind. Aus ihnen ergibt sich mithin, daß hier auch für endliche Differenzen $(\Delta\mathfrak{x}_1)^2 = (\Delta\mathfrak{x})^2$ sein muß. Es liegt also eine Schar kongruenter Flächen vor, (1) in Verbindung mit (22) stellt eine Bewegung dar.

Die Folgerungen, die sich aus der Annahme ergeben, daß eine Fläche infinitesimal unverbiegbar sei, sind schon von Liebmann in der unter [2]) zitierten Arbeit untersucht worden. Liebmann geht von der Lieschen Dar-

stellung der Schraubungen aus, die wir so schreiben wollen:

$$(23)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= \mathfrak{x} + \mathfrak{z}_0 t + \mathfrak{z}_0^{(2)} \frac{t^2}{2!} + \mathfrak{z}_0^{(3)} \frac{t^3}{3!} + \cdots, \\ \mathfrak{z}_0 &= \mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{x} + \mathfrak{b}_0, \\ \mathfrak{z}_0^{(n)} &= \mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{z}_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Dazu nimmt er die folgenden weiteren Schraubungen

$$(24)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{x}_2 &= \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{z}_1 t^2 + \mathfrak{z}_1^{(2)} \frac{t^4}{2!} + \cdots, \\ \mathfrak{z}_1 &= \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{b}_1, \\ \mathfrak{z}_1^{(n)} &= \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{z}_1^{(n-1)}; \\ \mathfrak{x}_3 &= \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{z}_2 t^3 + \mathfrak{z}_2^{(2)} \frac{t^6}{2!} + \cdots, \\ \mathfrak{z}_2 &= \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{b}_2, \\ \mathfrak{z}_2^{(n)} &= \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{z}_2^{(n-1)} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

mit konstanten Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$. Und dann wird bewiesen, daß im Falle der infinitesimalen Unverbiegbarkeit die Entwicklungen (1) sich darstellen als eine „Überlagerung von unendlich vielen Schraubungen“ in der Form

$$\mathfrak{x}_1 + (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) + (\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_2) + \cdots.$$

Man beachte, daß hierin $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ also auch $\mathfrak{z}_i, \mathfrak{z}_i^{(n)}$ als Potenzreihen in t angesehen werden können. Will man Bewegungen bestimmter Stufe betrachten, so hat man alle diese Entwicklungen bis zu der betreffenden Ordnung zu berücksichtigen. Im wesentlichen müssen diese Glieder mit denen der gleichen Ordnung in (22) übereinstimmen. Das ist für die beiden ersten Ordnungen augenfällig; für die höheren bedarf es des Nachweises, den wir indessen nicht führen wollen. Wir geben diese Darstellung vielmehr aus folgendem Grunde an. Der Ansatz (4) stellt eine Verallgemeinerung der für die Bewegungen gültigen Formeln (22) dar. Würde man die aus (23), (24) folgenden Gleichungen ebenso verallgemeinern, so würde man einen andern Ausgangspunkt für die Behandlung der Verbiegungen höherer Ordnung als (4) gewonnen haben. Unsere Methode ist also nicht die einzig mögliche; sie scheint sich aber vor anderen durch ihre Einfachheit auszuzeichnen.

§ 4.

Ebene Flächenrinnen.

Zum Beweis für die Unverbiegbarkeit der geschlossenen ebenen eiförmigen Rinnen und Halbrinnen benötigen wir die Verbiegungen erster Ordnung,

von den Verbiegungen zweiter Ordnung die Formeln (11), außerdem aber noch ein Ergebnis der unter [7]) zitierten Arbeit (S. 130—133).

Die eiförmige parabolische Kurve der Rinne liege in der 1,2-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems, und durch die Indizes 1, 2, 3 werden die Koordinaten in diesem System gekennzeichnet. Ist ferner die parabolische Kurve eine Parameterkurve $u = \text{konst.}$, so gilt am Rande

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} = \frac{\partial x_3}{\partial v} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial v^2} = 0,$$

und daher

$$M = 0, \quad N = 0.$$

Wir betrachten nur solche Fälle, in denen

$$L \neq 0$$

ist. Diese Bedingung spielt eine wesentliche Rolle. Nach (16) ist dann nämlich am Rande

$$\gamma = 0,$$

so daß aus der zweiten Gleichung (10)

$$\frac{\partial y_1}{\partial v} = \delta \frac{\partial x_1}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial v} = \delta \frac{\partial x_2}{\partial v} \tag{25}$$

folgt; $\frac{\partial y_3}{\partial v}$ ist ja dort ebenso wie $\frac{\partial y_3}{\partial u}$ nach (10) wegen $\frac{\partial x_3}{\partial u} = \frac{\partial x_3}{\partial v} = 0$ auch gleich 0.

In der eben genannten Arbeit ist unter denselben Voraussetzungen wie hier das Integral

$$\int (y_1 dy_2 - y_2 dy_1), \tag{26}$$

gebildet längs der geschlossenen Eilinie, untersucht worden. Als Parameter v war der Winkel φ der Normalen der Eilinie mit der 1-Achse gewählt worden. Das Integral (26) erhielt so die Form

$$\int_0^{2\pi} Y(Y + Y'')\,d\varphi,$$

wo gesetzt war

$$Y = y_1 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi \tag{27}$$

und die Funktion Y die Ableitung hatte

$$Y' = -y_1 \sin\varphi + y_2 \cos\varphi. \tag{28}$$

Man konnte zeigen, daß das Kurvenintegral (26) notwendig $\leqq 0$ werden muß, wenn die Eilinie in positivem Sinne durchlaufen wird. An der betreffenden Stelle ist nicht ausdrücklich hervorgehoben, wann das Integral

$= 0$ wird, weil das für den dort verfolgten Zweck belanglos war. Aus dem Beweis liest man aber sofort ab, daß das nur eintreten kann, wenn alle Fourierkoeffizienten a_i, b_i (einschl. a_0) der Funktion Y mit Ausnahme höchstens von a_1, b_1 verschwinden. Betrachtet man die Gleichungen (27), (28), so ergibt sich, daß dann am Rande y_1 und y_2 konstant sein müssen. Letzteres zieht nach (25) wieder $\delta = 0$, nach (14) $\alpha = 0$ nach sich. Da der Rand eine Parameterkurve $u =$ konst. ist, verschwinden dort mit jeder Funktion alle ihre Ableitungen nach v.

Wir wollen nun mit Hilfe der Gleichungen (16), (17) beweisen, daß am Rande auch β verschwinden muß, und dann schrittweise, daß alle Ableitungen beliebig hoher Ordnung von γ, α, β nach u und damit alle Ableitungen dieser Größen am Rande überhaupt verschwinden müssen.

Wir differenzieren (16) nach u und bedenken, daß am Rande $M = N = \alpha = \gamma = 0$ ist; somit ergibt sich

$$L\gamma_u - N_u\beta = 0.$$

Ebenso liefert die erste Gleichung (17)

$$\gamma_u = \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \beta.$$

Auf Grund einer Codazzischen Gleichung und im Hinblick auf die Randwerte von M, N ist aber

$$N_u + \left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} L = 0.$$

Da aber in unserem Falle eine Eilinie, also eine Kurve nicht verschwindender Krümmung vorliegt, ist am ganzen Rande $\left\{ \begin{matrix} 2\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \neq 0$; aus den 3 letzten Gleichungen folgt daher

$$\beta = 0; \quad \gamma_u = 0.$$

Damit verschwinden, wie gesagt, auch alle Ableitungen dieser Größen nach v, also wegen der zweiten Gleichung (17) auch α_u. Beachtet man noch (14), so wissen wir also jetzt, daß am Rande γ, $\alpha = -\delta$, β, γ_u, $\alpha_u = -\delta_u$ nebst allen Ableitungen nach v verschwinden.

Nun wird (16) nochmals und auch (17) nach u differenziert, und man findet auf dieselbe Art wie vorhin, daß β_u, γ_{uu}, α_{uu} verschwinden müssen, damit zugleich wieder alle ihre Ableitungen nach v. Man sieht, wie durch Fortsetzung dieser Schlußweise das Verschwinden aller Ableitungen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ überhaupt am Rande sich ergibt. Daraus schließen wir aber, daß $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf der ganzen Rinne 0 sein müssen. Dann folgt aus (10), daß η auf der ganzen Rinne konstant ist. Alles dies resultiert, um es noch einmal hervorzuheben, einzig aus der Annahme, daß das Integral (26) verschwindet.

Der Beweis für die Unverbiegbarkeit der Rinnen bzw. Halbrinnen folgt nun sofort aus der zweiten Gleichung (11). Diese umfaßt ja selbst wieder 3 Komponentengleichungen, von denen die dritte lautet

$$\frac{\partial y_3^{(2)}}{\partial v} = y_1 \frac{\partial y_2}{\partial v} - y_2 \frac{\partial y_1}{\partial v} + \gamma_2 \frac{\partial x_3}{\partial u} + \delta_2 \frac{\partial x_3}{\partial v}, \tag{29}$$

γ_2, δ_2 sind, wie alle α_i, β_i, γ_i, δ_i, auf Grund der Definitionsgleichungen von § 1 überall regulär, wo es $x_1, x_2, x_3, z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, z_3^{(i)}$ selbst sind und nicht alle Komponenten von $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ verschwinden. Am Rande ist ferner $\frac{\partial x_3}{\partial u} = \frac{\partial x_3}{\partial v} = 0$. Wird daher (29) längs der geschlossenen Eilinie integriert, so ergibt sich gerade das Verschwinden des Integrals (26). Dann muß, wie eben bemerkt, $\mathfrak{y}$ durchweg konstant sein, die infinitesimale Verbiegung ist nur eine infinitesimale Bewegung; Rinne und Halbrinne sind nach § 3 unverbiegbar.

(Eingegangen am 4. Dezember 1931.)

Über den Laplaceschen Ringkörper.

Von

Karl Maruhn in Leipzig.

Einleitung.

Vor einiger Zeit gelang es, die Existenz einer linearen Reihe von Gleichgewichtsfiguren darzutun, die von einem zusammenhängenden Körper zu zwei getrennten Massen führt[1]). Von besonderem Interesse war dabei die Figur, die aus zwei in einem Punkte zusammenhängenden Körpern besteht. Für das Gelingen des Existenzbeweises wie überhaupt für die ganze Behandlungsweise des Problems war eine Arbeit von Herrn Lichtenstein über Gleichgewichtsfiguren nichthomogener Flüssigkeiten von grundlegender Wichtigkeit[2]).

In dem Vorangehenden handelte es sich durchweg um einfach zusammenhängende Figuren, d. h. es lag das Problem der Doppelsterne vor. In der vorliegenden Arbeit soll nun der Fall eines sich vom Mutterkörper lösenden Ringkörpers behandelt werden, eine Aufgabe, auf die Herr Lichtenstein anläßlich seiner Vorlesung über kosmogonische Hypothesen im W.-S 1928/29 hingewiesen hatte. Hierbei tritt folgende Schwierigkeit auf Während für das erste Problem als Ausgangskonfiguration die Gleichgewichtslage zweier um den gemeinsamen Schwerpunkt rotierenden Massenpunkte gelten kann, so ist bei dem zweiten Problem eine entsprechende, einfache Gleichgewichtslage (Massenpunkt und um diesen rotierende Kreislinie) nicht möglich. Es zeigt sich nämlich schnell, daß keine noch so große Winkelgeschwindigkeit es vermag, eine rotierende Kreislinie im Gleichgewicht zu halten.

---

[1]) Vgl. K. Maruhn, Ein Beitrag zur math. Theorie der Gestalt der Himmelskörper. Math. Zeitschr. 33 (1931), S. 300—320.

[2]) Vgl. L. Lichtenstein, Kosmogonische Untersuchungen I, Leipziger Berichte 80, I (1928), S. 35—68.

So boten die von Herrn Garten [3]) behandelten ringförmigen Gleichgewichtsfiguren mit Zentralkörper eine neue Möglichkeit, die Aufgabe in Angriff zu nehmen und zu lösen, wenn auch dadurch, daß es sich um eine flüssige „Kernfigur" handelt, einige Komplikationen hinzukommen. Im großen ganzen aber ist alles unter Zugrundelegung der in den unter [1]) und [2]) angeführten Arbeiten verwendeten Methode zu erledigen; zum Teil sind die Beweise wörtlich dieselben, weshalb an vielen Stellen ein kurzer Hinweis an Stelle der exakten Durchführung treten konnte.

Wir zeigen also *die Existenz einer linearen Reihe von Gleichgewichtsfiguren, die von einem zusammenhängenden Körper zu einer aus einem Zentralkörper mit abgespaltenem Ring bestehenden Konfiguration führt.*

Zunächst wird angenommen, daß die Randdichte einer jeden Figur der linearen Reihe verschwindet. Es wird alsdann aber noch gezeigt, daß diese Voraussetzung nur bei der „singulären" Figur erforderlich ist, die Randdichte der übrigen Figuren aber durchaus von Null verschieden sein darf und nur bei Annäherung an die singuläre Figur auf eine bestimmte vorgeschriebene Weise gegen Null gehen muß.

§ 1.

Problemstellung.

Die Ausgangskonfiguration sei eine der ringförmigen Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeit mit punktförmig gedachtem Zentralkörper, deren Existenz in einer linearen Reihe von Herrn Garten [4]) bewiesen worden ist. Hierbei möge unsere Figur dem „regulären Fall" angehören [5]).

Ist M die Masse des Zentralkörpers, R_1 die größere, R_2 die kleinere Halbachse des elliptischen Querschnittes E des der Gleichgewichtsfigur zugrunde liegenden Ringkörpers T, so besteht für jedes $|\lambda| \leqq \Lambda$ (Λ hinreichend klein) eine Gleichgewichtsfigur mit der Winkelgeschwindigkeit

$$(1) \qquad \omega_\lambda^2 = \frac{\varkappa M}{L^3} + \lambda q, \quad \left(q = O\left(\frac{R_1}{L}\right)\right),$$

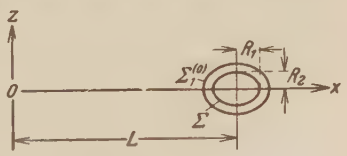


Fig. 1.

$\varkappa$ ist die Gaußsche Gravitationskonstante, L der „Radius" (Fig. 1) der Ringfigur.

---

[3]) Vgl. V. Garten, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Rochesche Satelliten und ringförmige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Zentralkörper. Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 684—745.

[4]) Vgl. loc. cit. [3]) S. 726 ff.

[5]) Das Achsenverhältnis der Ellipse E ist demnach so gewählt, daß eine gewisse homogene Integralgleichung keine Nullösung besitzt.

Ist $E_1^{(0)}$ der Meridianschnitt der Gleichgewichtsfigur $\mathsf{T}_1^{(0)}$, bezeichnen Σ und $\Sigma_1^{(0)}$ die (zur x-Achse symmetrisch gelegenen) Berandungen von E und $E_1^{(0)}$ und ist $\zeta^{(0)}$ die Entfernung zweier entsprechenden, d. h. auf derselben Normalen zu Σ liegenden Punkte P und P_1 auf Σ und $\Sigma_1^{(0)}$ (Fig. 2), so ist, unter σ die den Punkt P charakterisierende Bogenlänge auf Σ verstanden,

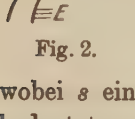


Fig. 2.

$$(2)\qquad \zeta^{(0)} = \zeta^{(0)}\Big(\sigma;\lambda,\frac{R_1}{L},\varepsilon\Big),\qquad \frac{d\zeta^{(0)}}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}\zeta^{(0)}\Big(\sigma;\lambda,\frac{R_1}{L},\varepsilon\Big),$$

wobei ε einen kleinen, das Potential auf $\Sigma_1^{(0)}$ charakterisierenden Parameter bedeutet.

Es sei weiter

$$(3)\qquad \varkappa f\overline{\mathfrak{B}}(x,0,z) = \varkappa f\int_E d\alpha\,d\gamma \int_{K_{\alpha\gamma}} \frac{ds_{\alpha\gamma}}{[(\bar{x}-x)^2+\bar{y}^2+(\gamma-z)^2]^{\frac{1}{2}}} = \varkappa f\int_E \mathfrak{K}_{\alpha\gamma}\,d\alpha\,d\gamma$$

das Potential des Körpers T im Punkte $(x,0,z)$[6]; (α,γ) ist ein Punkt in E, $K_{\alpha\gamma}$ die Kreislinie $\bar{x}^2+\bar{y}^2=\alpha^2$ in der Ebene $z=\gamma$. Das Potential dieser mit der Liniendichte 1 belegten Kreislinie heißt $\mathfrak{K}_{\alpha\gamma}$, das Bogenelement in $(\bar{x},\bar{y})$ sei $ds_{\alpha\gamma}$.

Wir wählen aus der dreiparametrigen Schar (2) die zu $\lambda=0$ und $\varepsilon=0$ gehörige einparametrige Schar aus. Es ergibt sich

$$(4)\qquad \zeta^{(0)} = O\Big(\frac{R_1}{L}\Big).$$

Die zugehörige Winkelgeschwindigkeit ist wegen (1) gleich

$$(5)\qquad \omega^2 = \frac{\varkappa M}{L^3}.$$

Bezeichnen wir ferner mit $\mathfrak{B}^{(0)}(x,0,z)$ das Potential der ringförmigen Gleichgewichtsfigur im Punkte $(x,0,z)$, so erhalten wir

$$(6)\qquad \mathfrak{B}^{(0)}(x,0,z) = \overline{\mathfrak{B}}(x,0,z) + \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t^{(0)}} \zeta^{(0)}\cos\varphi_t^{(0)}\,\mathfrak{K}_{X,Z}^{(t)}\,d\sigma_t^{(0)}$$

$$= \overline{\mathfrak{B}}(x,0,z) + O\Big(\frac{R_1}{L}\Big).$$

Dabei ist jetzt zwischen Σ und $\Sigma_1^{(0)}$ eine einparametrige Kurvenschar $\Sigma_t^{(0)}$ eingeschaltet[7]; (X_t,Z_t) ist ein Punkt einer solchen Kurve, $d\sigma_t$ das dazu

---

[6]) Wegen der Rotationssymmetrie können alle Betrachtungen in der (x,z)-Ebene für $x \gtrless 0$ vorgenommen werden.

[7]) Vgl. die grundlegenden Arbeiten von Herrn L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Erste Abh. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze. Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 229—284; Zweite Abh. Stabilitätsfragen. Math. Zeitschr. 7 (1920), S. 126—231.

gehörige Bogenelement; $\mathfrak{N}^{(t)}_{X,Z}$ bezeichnet das Potential der durch (X_t, Z_t) hindurchgehenden Kreislinie in der Ebene $z = Z_t$ um den Durchstoßpunkt der z-Achse; $\varphi_t^{(0)}$ ist der Winkel zwischen der Normalen zu $\Sigma_t^{(0)}$ in (X_t, Z_t) und der Normalen in dem entsprechenden Punkte von Σ.

Wir setzen jetzt

$$(7) \qquad V^{(0)}(x,0,z) = \frac{\varkappa M}{r} + \varkappa f \mathfrak{B}^{(0)}(x,0,z) + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \qquad (r^2 = x^2 + z^2).$$

Wie in der unter [3]) zitierten Arbeit gezeigt ist, ist die Schwerkraft auf der gesamten Oberfläche der Ausgangsfigur T nach innen gerichtet. Wegen (4) folgt daher das gleiche für die Gleichgewichtsfigur $T_1^{(0)}$, wenn nur $\frac{R_1}{L}$ hinreichend klein, etwa $\frac{R_1}{L} \leqq q_0$, gewählt wird. Bezeichnet daher $\zeta^{(0)}_{L-R_1}$ den Wert von $\zeta^{(0)}$ im Punkte $(L - R_1, 0, 0)$, ζ_{L+R_1} denjenigen im Punkte $(L + R_1, 0, 0)$, so finden wir

$$(8a) \ \frac{\partial}{\partial x} V^{(0)}(L - R_1 - \zeta_{L-R_1}, 0, 0) > 0, \quad (8b) \ \frac{\partial}{\partial x} V^{(0)}(L + R_1 + \zeta_{L+R_1}, 0, 0) < 0.$$

Wegen (7) erhalten wir

$$(9) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial x} &= -\frac{\varkappa x M}{r^3} + \varkappa f \frac{\partial \mathfrak{B}^{(0)}}{\partial x} + \omega^2 x, \qquad \frac{\partial V^{(0)}}{\partial z} = -\frac{\varkappa z M}{r^3} + \varkappa f \frac{\partial \mathfrak{B}^{(0)}}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial x^2} &= 3 \cdot \frac{\varkappa x^2 M}{r^5} - \frac{\varkappa M}{r^3} + \varkappa f \frac{\partial^2 \mathfrak{B}^{(0)}}{\partial x^2} + \omega_0^2; \\ \frac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial z^2} &= 3 \cdot \frac{\varkappa z^2 M}{r^5} - \frac{\varkappa M}{r^3} + \varkappa f \frac{\partial^2 \mathfrak{B}^{(0)}}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Nun ist für $z = 0$ und $0 \leqq x \leqq L - R_1 - \zeta_{L-R_1}$ gewiß $\frac{\partial^2 \mathfrak{B}^{(0)}}{\partial x^2} > 0$ [8]),

---

[8]) Hierfür verdanke ich Herrn E. Hölder folgenden einfachen Beweis. Es genügt augenscheinlich, diese Ungleichheitsbeziehung für das Potential einer Kreislinie zu beweisen. Das Newtonsche Potential einer in der $(x$-$y)$-Ebene gelegenen Kreislinie vom Radius l und der Liniendichte 1 ist im Punkte $(x, 0, 0)$

$$\mathfrak{L}(x,0,0) = l \int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{\sqrt{l^2 + x^2 - 2xl\cos\chi}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{(1 + \tau^2 - 2\tau\cos\chi)^{\frac{1}{2}}} \qquad \left(\tau = \frac{x}{l}\right).$$

Wir führen jetzt die Laplaceschen Koeffizienten A_s^ν ein, die durch die Entwicklung

$$(1 - 2\tau\cos\chi + \tau^2)^{-s} = A_s^0 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} A_s^\nu \cos\nu\chi \qquad (0 < \tau < 1, \ s \text{ reell})$$

definiert sind. Sie sind mit Hilfe der Gaußschen hypergeometrischen Reihe als Potenzreihen nach τ darstellbar, die für $0 \leqq \tau \leqq q < 1$ gleichmäßig konvergieren,

$$A_s^\nu = \frac{\Gamma(s+\nu)}{\Gamma(s)\,\Gamma(\nu+1)} \tau^\nu F(s, s+\nu, \nu+1, \tau^2).$$

Speziell ist

$$A_{\frac{1}{2}}^0 = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \tau^2\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\ldots(\frac{1}{2}+k-1)}{1 \cdot 2 \ldots k}\right)^2 \tau^{2k}.$$

(Fortsetzung der Fußnote [8]) auf nächster Seite.)

somit auch $\frac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial x^2} > 0$. Also wächst $\frac{\partial V^{(0)}}{\partial x}$ in dem angegebenen Intervall monoton und hat dort wegen (8a) eine und nur eine Nullstelle $(x_0, 0, 0)$. Ohne weiteres leuchtet ferner ein, daß $\frac{\partial V^{(0)}}{\partial x}$ auch für $L+R_1+\zeta_{L+R_1} < x < +\infty$ monoton wächst, also wegen (8b) auch dort noch eine Nullstelle $(x_0', 0, 0)$ liegen muß.

Es sei $V^{(0)}(x_0, 0, 0) = \bar{C}^{(0)}$ gesetzt. Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich die Meridianlinie $\bar{S}^{(0)}$ (Fig. 3)

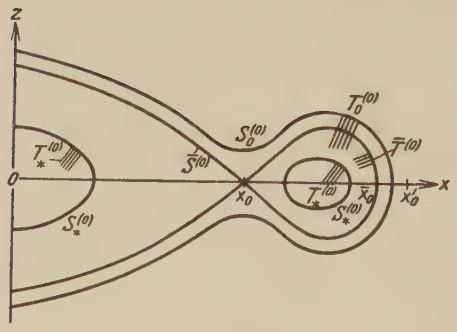


Fig. 3.

(10) $V^{(0)}(x, 0, z) = \bar{C}^{(0)}$

in der Umgebung des Punktes $(x_0, 0, 0)$ verhält [9]).

Es sei

(11) $\frac{\partial^2 V^{(0)}(x_0, 0, 0)}{\partial x^2} = \alpha_0 \quad (\alpha_0 > 0)$

gesetzt. Da weiter für $z = 0$ augenscheinlich $\frac{\partial^2 \mathfrak{V}^{(0)}}{\partial z^2} - \leqq 0$ ist [10]), so erhalten wir

(12) $\frac{\partial^2 V^{(0)}(x_0, 0, 0)}{\partial x^2} = -\gamma_0 \quad (\gamma_0 > 0).$

Da ferner $\frac{\partial V^{(0)}(x_0, 0, 0)}{\partial x}$ nach Konstruktion und $\frac{\partial V^{(0)}(x_0, 0, 0)}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 V^{(0)}(x_0, 0, 0)}{\partial x \partial z}$ aus Symmetriegründen verschwinden, so bekommen wir für hinreichend kleines $\tau = [(x-x_0)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$, etwa $\tau \leqq \tau_0$,

(13) $V^{(0)}(x, 0, z) = \bar{C}^{(0)} + \alpha_0 (x - x_0)^2 - \gamma_0 z^2 + O(\tau^3).$

Demnach besitzt $\bar{S}^{(0)}$ in $(x_0, 0, 0)$ eine Doppeltangente, deren Gleichung

(14) $\alpha_0 (x - x_0)^2 - \gamma_0 z^2 = 0$

lautet.

Betrachten wir jetzt die Kurven

(15) $V^{(0)}(x, 0, z) = C^{(0)},$

Demnach sind die Koeffizienten von $\mathfrak{Q}(x, 0, 0) = 2\pi A_{\frac{1}{2}}^0$ alle positiv. Das gleiche gilt aber auch für die Entwicklungen $\frac{d\mathfrak{Q}}{d\tau}$ und $\frac{d^2\mathfrak{Q}}{d\tau^2}$. Vgl. hierzu H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste 2_1, p. 50—53, Paris 1907, ferner E. Hölder, Die Verzweigungsgleichungen für die kritischen Kreise des restringierten Dreikörperproblems. Leipz. Ber. 83 (1931), S. 179—184, insbes. S. 182.

[9]) Vgl. die analogen Untersuchungen in den in [1]) und [2]) zitierten Arbeiten.

[10]) Dies wird wieder durch Betrachtung des Potentials einer Kreislinie erkannt, diesmal direkt durch Differentiation unter dem Integralzeichen.

so sind diese, wenn $\mathfrak{C}^{(0)}$ den Wert von $V^{(0)}$ auf $\Sigma_1^{(0)}$ bezeichnet, für $\mathfrak{C}^{(0)} > C^{(0)} > \bar{C}^{(0)}$ zwei Scharen ineinander geschachtelter stetig gekrümmter Kurven, die $\Sigma_1^{(0)}$ bzw. den Punkt $(0, 0, 0)$ umschließen und von $\bar{S}^{(0)}$ umschlossen werden. Sie nähern sich mit wachsendem $C^{(0)}$ der Kurve $\Sigma_1^{(0)}$ bzw. dem Punkte $(0, 0, 0)$. Für $\bar{C}^{(0)} > C^{(0)} \geqq \bar{C}^{(0)} - b$, unter b einen gewissen, später zu bestimmenden, hinreichend kleinen positiven Wert verstanden, ergibt sich eine Schar stetig gekrümmter Kurven, die ebenfalls alle ineinander geschachtel sind und $\bar{S}^{(0)}$ umschließen (Fig. 3).

Diese Behauptungen werden folgendermaßen bewiesen: Die Schwerkraft in Richtung der Normalen (ν) auf einer der Flächen (15) in einem auf ihr liegenden Punkte $(x, 0, z)$ ist

$$\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \nu} = \frac{\partial V^{(0)}}{\partial x}\cos(x, \nu) + \frac{\partial V^{(0)}}{\partial z}\cos(z, \nu) = N > 0,$$

$$\cos(x, \nu) = \frac{\partial V^{(0)}}{\partial x} N^{-1}, \quad \cos(z, \nu) = \frac{\partial V^{(0)}}{\partial z} N^{-1}, \quad N^2 = \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V^{(0)}}{\partial z}\right)^2. \tag{16}$$

Wie man leicht sieht, folgt aus (6) und (3), wenn man die Integraldarstellungen von $\mathfrak{R}_{xy}$ und $\mathfrak{R}_{xz}^{(l)}$ betrachtet,

$$\mathfrak{B}^{(0)}(x_0, 0, 0) \geqq \mathfrak{B}^{(0)}(2L - x_0, 0, 0); \tag{17}$$

außerdem ist

$$\frac{\varkappa M}{x_0} + \frac{1}{2}\frac{\varkappa M}{L^3} x_0^2 - \frac{\varkappa M}{2L - x_0} - \frac{1}{2}\frac{\varkappa M}{L^3}(2L - x_0)^2 = 2\varkappa M \cdot \frac{L - x_0}{x_0(2L - x_0)} - 2\varkappa M \cdot \frac{L - x_0}{L^3} > 0. \tag{18}$$

Somit finden wir

$$V^{(0)}(x_0, 0, 0) > V^{(0)}(2L - x_0, 0, 0). \tag{19}$$

Da nun $\mathfrak{C}^{(0)} > \bar{C}^{(0)}$ ist, muß die Kurve $\bar{S}^{(0)}$ ganz außerhalb von $\Sigma_1^{(0)}$ verlaufen und im Intervall $\langle L + R_1 + \zeta_{L+R_1}, 2L - x_0\rangle$ die x-Achse in einem Punkte $(\bar{x}_0, 0, 0)$ schneiden. Da $V^{(0)}$ wegen (19) auf der x-Achse noch Werte annimmt, die kleiner als $\bar{C}^{(0)}$ sind, so liegt die Nullstelle $(x_0', 0, 0)$ von $\frac{\partial V^{(0)}}{\partial x}$, die ja einem Minimum von $V^{(0)}$ entsprechen muß, „rechts“ von $(\bar{x}_0, 0, 0)$, d. h. es ist $x_0' > \bar{x}_0$, und es fällt $\frac{\partial V^0}{\partial x}$ in $\langle L + R_1 + \zeta_{L+R_1}, x_0')$ kleiner als Null aus. Es wird daher für alle Kurven der Schar

$$V^{(0)} = C^{(0)} \quad (\mathfrak{C}^0 > C^0 > \bar{C}^{(0)} - b,\ b > 0) \tag{20}$$

in denjenigen Punkten, in denen sie in $\langle L + R_1 + \zeta_{L+R_1}, x_0')$ die x-Achse treffen, die zu positivem N (vgl. (16)) gehörende Normalenrichtung in das Innere weisen, wenn nur b der Beziehung

$$\bar{C}^{(0)} - b > V^{(0)}(2L - x_0, 0, 0) \tag{21}$$

genügt. Schneidet die Kurve $V^{(0)}(x, 0, z) = \bar{C}^{(0)} - b$ die x-Achse im Punkte $(\beta, 0, 0)$ $(\beta < 2L - x_0)$, so betrachten wir den Bereich $B: 0 \leqq x \leqq \beta$, $-\delta \leqq z \leqq +\delta$ (δ so gewählt, daß die Kurve $V^{(0)}(x, 0, z) = \bar{C}^{(0)} - b$ ganz in B liegt, sonst beliebig). Dann wird, da $\frac{\partial V^{(0)}}{\partial z}$ nur auf der x-Achse verschwindet, wegen der Stetigkeit der Normalen und wegen (16), außer für $(x_0, 0, 0)$, die Normalenrichtung aller ganz in B gelegenen Kurven in deren Inneres weisen.

Damit sind die oben über die Schar (15) ausgesprochenen Behauptungen bewiesen. Wir fassen jetzt diese Schar als eine Schar von Gleichgewichtsfiguren auf, die mit einer Flüssigkeit der Dichte Null angefüllt sind. Wir fragen: *Gibt es in der Nachbarschaft jeder dieser Figuren der Schar eine (ähnlich gestaltete) Gleichgewichtsfigur mit nicht verschwindender Dichte und bilden diese Figuren wieder eine stetige Schar (eine lineare Reihe)?*

Es bezeichne $C_0^{(0)}$ das Randpotential einer bestimmten Ausgangsfigur $\mathfrak{T}_0^{(0)}$ mit der Randfläche $\mathfrak{S}_0^{(0)}$. Der Meridianschnitt heiße $T_0^{(0)}$ mit der Randkurve $S_0^{(0)}$. Die Größe $C_0^{(0)}$ fassen wir als Parameter der gesuchten Schar auf und präzisieren das Problem wie folgt:

Es handle sich um eine nichthomogene inkompressible Flüssigkeit, die einen wie $\mathfrak{T}_0^{(0)}$ beschaffenen Körper $\mathfrak{T}_0$ erfüllt. Seine Randfläche heiße $\mathfrak{S}_0$, der Meridianschnitt T_0 und dessen Berandung S_0. Die Dichte der Flüssigkeit soll nach dem Rande zu verschwinden. Ist jetzt $V(x, 0, z)$ das Gesamtpotential im Punkte $(x, 0, z)$, C_0 der Wert von $V(x, 0, z)$ auf $\mathfrak{S}_0$, so setzen wir

$$C_0 - V(x_0, 0, 0) = m(C_0^{(0)}).$$

Weiterhin sei uns eine Funktion $\Psi(u; C_0^{(0)})$ gegeben, die folgende Eigenschaften habe: Sie ist für alle $u \geqq m$, $C_0^{(0)} \geqq \bar{C}^{(0)} - b$ stetig und besitze dort in bezug auf u stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen; sie wächst bei festgehaltenem $C_0^{(0)}$ für $u \geqq m$ monoton. Stets ist $\Psi(m; C_0^{(0)}) = 0$.

Die Dichte in $\mathfrak{T}_0$ soll ferner außerhalb gewisser Gebiete $\mathfrak{T}_*$ (Meridianschnitt T_*) um O und den ähnlich wie $\mathsf{T}_1^{(0)}$ gestalteten Ringkörper T_1 den Wert

$$\mu(x, y, z; C_0^{(0)}) = \varepsilon \Psi(V(x, y, z) - V(x_0, 0, 0); C_0^{(0)}) \quad (\varepsilon \text{ konstant})$$

haben, in $\mathfrak{T}_*$ aber konstant sein.

§ 2.

Sukzessive Approximationen.

Es sei $C_*^{(0)}$ irgendeine Zahl im Intervall $\bar{C}^{(0)} < C_*^{(0)} < \mathfrak{C}^{(0)}$. Die Kurve $S_*^{(0)}$: $V^{(0)}(x, 0, z) = C_*^{(0)}$ (vgl. Fig. 3) umschließt zwei Gebiete $T_*^{(0)}$, deren zugehöriger Rotationskörper $\mathfrak{T}_*^{(0)}$ (Rand $\mathfrak{S}_*^{(0)}$) heiße. Wir denken uns jetzt den Ringkörper $\mathsf{T}_1^{(0)}$ als nicht vorhanden und den ganzen Körper $\mathfrak{T}_*^{(0)}$ mit

homogener Masse von der Dichte $\mu_1^* = \varepsilon \Psi(C_*^{(0)} - \bar{C}^{(0)}; C_0^{(0)})$, den Körper $\mathfrak{T}_0^{(0)} - \mathfrak{T}_*^{(0)}$ mit inhomogener Masse der Dichte $\mu_1 = \varepsilon \Psi(V^{(0)}(x,y,z) - \bar{C}^{(0)}, C_0^{(0)})$ erfüllt. Das Potential der gesamten Flüssigkeitsverteilung in einem Punkte (x, y, z) heiße $\varkappa W^{(1)}(x, y, z)$. In diesen Rotationskörper soll nun in der Nachbarschaft erster Ordnung des Ringkörpers T eine Gleichgewichtsfigur $T_1^{(1)}$ eingefügt werden, die wir Kernfigur nennen. Ihr Meridianschnitt heiße $E_1^{(1)}$, seine Randkurve $\Sigma_1^{(1)}$. Die Existenz der Kernfigur soll zunächst gezeigt werden.

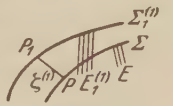


Fig. 4.

Es bezeichne $\varkappa f U_1(\sigma)$ das Potential von $T_1^{(1)}$ in P_1, $\varkappa f U(\sigma)$ das Potential von T in P (Fig. 4)[11]. Die Gleichgewichtsbedingung lautet im Punkte $P_1(X_1, 0, Z_1)$, wenn ω_1 die Winkelgeschwindigkeit ist:

$$(22)\quad \varkappa U_1(\sigma)(f - \mu_1^*) + \frac{\omega_1^2}{2} X_1^2 + \varkappa W^{(1)}(X_1, 0, Z_1) + \varkappa M[X_1^2 + Z_1^2]^{-\frac{1}{2}} = s^*,$$

was auf folgende Integro-Differentialgleichung führt:

$$(23)\quad \varkappa\left[\pi R_1 R_2 (1-\tilde{r}) \cdot \frac{2 + 3\tilde{r} + \tilde{r}^2}{1 + \tilde{r} + \tilde{r}^2} \cdot \frac{\zeta^{(1)}}{p} - 2 \int_{\Sigma} \bar{\xi}^{(1)} \log \frac{R_1}{\varrho (1 + \tilde{r})}\, d\bar{\sigma}\right](f - \mu_1^*)$$
$$= s + \lambda q \cdot 2 L X + \varkappa W^{(1)}(X, 0, Z) + \Pi_1 + \Pi_2.$$

Hierbei ist: $\tilde{r} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$, $(0 < \tilde{r} < 1)$, $p^2 = \left[\frac{X^2}{R_1^4} + \frac{Z^2}{R_2^4}\right]^{-1}$, $(X, 0, Z)$ ein fester, $\bar{\sigma}$ ein variabler Punkt auf Σ, $\bar{\varrho}$ ihre Entfernung, $\bar{\xi}^{(1)} = \zeta^{(1)}(\bar{\sigma})$, $\Pi_1 = O\left(\frac{R_1}{L}\right)$. Π_2 ist die Gesamtheit derjenigen Glieder, in welche entweder $\zeta^{(1)}$ von mindestens zweiter Ordnung eingeht, oder aber mit einem der kleinen Parameter λ, $\frac{R_1}{L}$, $\frac{R_1}{L} \log \frac{8L}{R_1}$, ε behaftet ist. s^* in (22) ist eine Konstante, s dagegen ein kleiner Parameter. Die Beziehung (23) ist bis auf die von der neuen Massenverteilung herrührenden Glieder, die von der Größenordnung ε sind, dieselbe Gleichung wie die in der unter [3]) zitierten Arbeit. Wie Herr Lichtenstein gezeigt hat, sind derartige Integro-Differentialgleichungen, die auf der rechten Seite „hinreichend kleine" Parameter enthalten und bei denen rechts die gesuchte Funktion bzw. deren erste Ableitungen entweder mindestens von zweiter Ordnung oder aber mit einem der kleinen Parameter multipliziert auftreten, durch sukzessive Approximationen lösbar[12]). Nach Voraussetzung sollte der reguläre Fall vorliegen.

---

[11]) Um die Bezeichnungsweise von Herrn Lichtenstein zu verwenden. Vgl. die in [7]) erwähnten Arbeiten.

[12]) Vgl. L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen. Berlin 1931. S. bes. Kap. I, § 2. Dort wird insbesondere gezeigt, daß es nur auf den Nachweis der Gültigkeit von zwei bestimmten Ungleichheitsbeziehungen ankommt.

Wir erhalten also für hinreichend kleine Werte der Parameter eine und nur eine Lösung

$$\zeta^{(1)} = \zeta^{(1)}\left(\sigma; \lambda, \frac{R_1}{L}, s, \varepsilon\right), \tag{24}$$

die sich nach Potenzen der Parameter entwickeln läßt. Wir wählen die zu $\lambda = 0$ gehörige Schar und bestimmen für den Parameter s einen gewissen Wert $s^{(1)}$ so, daß der schwerelose Punkt der zugehörigen neuen Konfiguration wieder in $(x_0, 0, 0)$ fällt. Daß dies möglich ist, ist leicht einzusehen.

Es ist nämlich in der Potenzreihenentwicklung für $\zeta^{(1)}$ der Koeffizient des linearen Gliedes in s gleich $\frac{2(1+\tilde{\tau}+\tilde{\tau}^2)}{\pi(1-\tilde{\tau})R_1R_2(2+3\tilde{\tau}+\tilde{\tau}^2)}$, also sicher stets positiv. Dies erkennt man durch Vergleichung der Fourierschen Koeffizienten, wenn man $\zeta^{(1)}$ in eine Fouriersche Reihe nach der exzentrischen Anomalie der Ellipse Σ entwickelt.

Es soll nun gelten, damit der schwerelose Punkt an derselben Stelle bleibt,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V^{(0)}(x_0, 0, 0)}{\partial x} + \varkappa \frac{\partial W^{(1)}(x_0, 0, 0)}{\partial x} - \varkappa \mu_1^* \frac{\partial \overline{\mathfrak{B}}(x_0, 0, 0)}{\partial x} \\ &+ \varkappa(f - \mu_1^*) \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t^{(1)}} \zeta^{(1)} \cos\varphi_t^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{R}^{(t)}_{X^{(1)}Z^{(1)}}(x_0, 0, 0)\, d\sigma_t^{(1)} \\ &- \varkappa f \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t^{(0)}} \zeta^{(0)} \cos\varphi_t^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{R}^{(t)}_{X^{(0)}Z^{(0)}}(x_0, 0, 0)\, d\sigma_t^{(0)} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Diese Gleichung bedeutet nichts anderes, als daß im Punkte $(x_0, 0, 0)$ die Anziehungskraft der neuen Konfiguration wieder verschwindet. Wir ersetzen nämlich in dem Ausdruck $\frac{\partial}{\partial x} V^{(0)}(x_0, 0, 0)$ die Anziehungskraft des zu $\zeta^{(0)}$ gehörigen schalenförmigen Körpers durch diejenige des entsprechenden, zu $\zeta^{(1)}$ gehörigen Körpers und fügen noch die Schwerkraft der neu eingeführten Flüssigkeitsmassen hinzu.

Da die Differenz der beiden Integrale in der ersten Annäherung gleich

$$\int_{\Sigma} (\zeta^{(1)} - \zeta^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{R}_{XZ}(x_0, 0, 0)\, d\sigma \qquad ((X, Z) \text{ ist ein Punkt auf } \Sigma) \tag{26}$$

ist $\left(\text{die weiteren Glieder in } (\zeta^{(1)} - \zeta^{(0)}) \text{ sind mit } \zeta^{(1)}, \zeta^{(0)}, \frac{d\zeta^{(1)}}{d\sigma}, \frac{d\zeta^{(0)}}{d\sigma} \text{ oder den Parametern behaftet}\right)$, so ergibt sich, wenn man für $\zeta^{(1)}$ und $\zeta^{(0)}$ die Potenzreihenentwicklungen nach den Parametern einsetzt, gliedweise integriert und bedenkt, daß der Koeffizient des linearen Gliedes in s wieder sicher positiv ausfällt, eine (und nur eine) Lösung der Gleichung (25)

$$s^{(1)} = O(\varepsilon). \tag{27}$$

Somit ist auch

$$\zeta^{(1)} - \zeta^{(0)} = O(\varepsilon). \tag{28}$$

Entsprechendes gilt für die erste Ableitung von $\zeta^{(1)} - \zeta^{(0)}$.

Nun betrachten wir den Einfluß der neu hinzugefügten Flüssigkeitsmassen. Es ist

$$\frac{\partial W^{(1)}(x,0,z)}{\partial x} = \int_{\mathfrak{T}_0^{(0)}} \mu_1' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\tau' = -\int_{\mathfrak{T}_0^{(0)}} \mu_1' \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\tau' = \int_{\mathfrak{T}_0^{(0)} - \mathfrak{T}_*^{(0)}} \frac{\partial \mu_1'}{\partial x'} \frac{1}{\hat{r}}\, d\tau'; \tag{29}$$

$$(\hat{r}^2 = (x-x')^2 + y'^2 + (z-z')^2, \quad d\tau' = dx'\,dy'\,dz').$$

Die zweite Ableitung $\frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial x^2}$ ist überall stetig und genügt einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\lambda' < 1$.

Es sei jetzt

$$V^{(1)} = \varkappa W^{(1)} + \frac{\omega^2}{2} x^2 + \frac{\varkappa M}{r} + \varkappa(f - \mu_1^*)\,\mathfrak{V}^{(1)} \tag{30}$$

($\mathfrak{V}^{(1)}$ bezeichnet das Potential der Kernfigur), und es möge für den Punkt $(x_0, 0, 0)$

$$\frac{\partial V^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial V^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x\,\partial z} = 0 \tag{31}$$

gelten. Wir setzen $V^{(1)}(x_0, 0, 0) = \bar{C}^{(1)}$ und betrachten die Meridiankurve $\bar{S}^{(1)}$: $V^{(1)} = \bar{C}^{(1)}$. Diese ist für hinreichend kleines ε wie $\bar{S}^{(0)}$ gestaltet und, abgesehen vom Punkte $(x_0, 0, 0)$, stetig gekrümmt. In der Umgebung des singulären Punktes gilt die Entwicklung

$$V^{(1)} - \bar{C}^{(1)} = \alpha_1 (x - x_0)^2 - \gamma_1 z^2 + O(\mathfrak{r}^{2+\lambda'}) \tag{32}$$

mit

$$\alpha_1 = \alpha_0 + Q_1, \quad \gamma_1 = \gamma_0 + Q_2, \quad Q_1 = O(\varepsilon), \quad Q_2 = O(\varepsilon). \tag{33}$$

Wir nehmen weiter

$$C_0^{(1)} = \bar{C}^{(1)} + C_0^{(0)} - \bar{C}^{(0)} \tag{34}$$

an und betrachten die Meridiankurve $S_0^{(1)}$: $V^{(1)} = C_0^{(1)}$. Ist $C_0^{(1)} < \bar{C}^{(1)}$ und gilt $C_0^{(1)} < C^{(1)} < \bar{C}^{(1)}$, so bilden die Kurven $V^{(1)} = C^{(1)}$ für hinreichend kleines ε eine Schar ineinander geschachtelter geschlossener, doppelpunktfreier, stetig gekrümmter Kurven, die von $S_0^{(1)}$ umschlossen sind und $\bar{S}^{(1)}$ umschließen. Bedeutet ferner $\mathfrak{C}^{(1)}$ das Potential auf dem Rande der Kernfigur und ist $\bar{C}^{(1)} < C^{(1)} < \mathfrak{C}^{(1)}$, so haben wir zwei Scharen von Kurven derselben Eigenschaften, die $\Sigma_1^{(1)}$ und O umschließen und von $\bar{S}^{(1)}$ umschlossen werden.

Auf einen Beweis aller dieser Behauptungen können wir hier verzichten, da er völlig analog demjenigen in meiner in der Fußnote [1]) zitierten Arbeit verlaufen würde. Ebenso läßt sich wie dort erkennen, daß die Ableitung von $V^{(1)}$ in der Normalenrichtung der Ausgangskonfiguration, $\frac{\partial V^{(1)}}{\partial \nu}$, dasselbe Vorzeichen wie $\frac{\partial V^{(0)}}{\partial \nu}$ besitzt.

Die Einführung der zweiten Approximation, die in genau der gleichen Weise wie die der ersten erfolgt, bietet keine neuen Schwierigkeiten dar. Wieder wird sich die Existenz einer Kernfigur ergeben, die bewirkt, daß der schwerelose Punkt in $(x_0, 0, 0)$ erhalten bleibt. Die Winkelgeschwindigkeit bleibt wieder die gleiche wie bei der Ausgangskonfiguration. Ebenso wird man bei den weiteren Approximationen verfahren.

Nun noch einige Bezeichnungen (Fig. 5): Es sei $\hat{\alpha}$ der kleinste Abstand zwischen $\Sigma_1^{(0)}$ und $S_*^{(0)}$, und wir denken uns zu $\Sigma_1^{(0)}$ die (außerhalb von $E_1^{(0)}$) gelegene Parallelkurve im Abstand $\frac{1}{2}\hat{\alpha}$ gezogen. Sie umschließe das Gebiet $\hat{\mathfrak{A}}$. Ferner sei $\hat{\tau}$ der kleinste Abstand des Punktes O von der zugehörigen Komponente von $S_*^{(0)}$. Der Kreis um O mit $\frac{1}{2}\hat{\tau}$ als Radius heiße $\hat{\mathfrak{K}}$. Wir betrachten das Gebiet $\overline{B} = B - \hat{\mathfrak{A}} - \hat{\mathfrak{K}}$, und es möge $\hat{B}$ dasjenige Gebiet bezeichnen, das entsteht, wenn man aus $\overline{B}$ alle Punkte entfernt, die vom Außenrande von $\overline{B}$ um weniger als β^0 entfernt sind. Dabei wird $\beta^0 > 0$ so klein gewählt, daß $T_0^{(0)} - T_*^{(0)}$ ganz im Innern von $\hat{B}$ liegt und der Abstand eines Punktes auf $S_0^{(0)}$ von dem Außenrande von $\hat{B}$ gewiß $\geqq \hat{\beta}$ ist ($\hat{\beta} < 0$, hinreichend klein). Betrachten wir weiter einen Winkelraum um die x-Achse mit dem Scheitel im Punkte $(x_0, 0)$, der den durch die Doppeltangente (14) gegebenen Winkelraum ganz in seinem Innern enthält. Es sei $\hat{T}$ das Gebiet, das zugleich unserem Winkelraum nnd B angehört. Ist dann $\Theta = \hat{T} - \hat{\mathfrak{A}} - \hat{\mathfrak{K}}$, so bezeichne $\hat{\Theta}$ die Gebiete, die entstehen, wenn man aus Θ alle Punkte entfernt, die von dem Außenrande um weniger als $\alpha^0 \mathfrak{r}$ entfernt sind. Dabei wird $\alpha^0 > 0$ so klein gewählt, daß $\overline{T}^{(0)} - T_*^{(0)}$ ganz im Innern von $\hat{\Theta}$ enthalten ist und der Abstand eines Punktes von $\overline{S}^{(0)}$ von dem Außenrand von $\hat{\Theta}$ gewiß $\geqq \hat{\vartheta}\mathfrak{r}$ ($\hat{\vartheta} > 0$, hinreichend klein) ist.

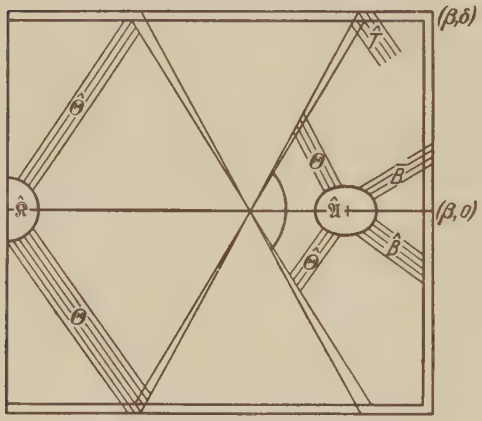


Fig. 5.

§ 3.

Konvergenzbeweis.

Beim Übergang von der n-ten zur $(n+1)$-ten Näherung ordnen wir einem Punkt A_{n-1} in $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ allemal denjenigen Punkt A_n auf der durch A_{n-1} verlaufenden orthogonalen Trajektorie des Systems der Kurven

$S^{(0)}$ zu, in dem die Dichte den gleichen Wert hat:

$$\mu_n(A_{n-1}) = \mu_{n+1}(A_n).$$

So erhalten wir eine topologische Abbildung der Gebiete $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ auf $T_0^{(n)} - T_*^{(n)}$. Sie sei definiert durch

$$x_n = x_{n-1} + \xi_{n-1}; \quad z_n = z_{n-1} + \zeta_{n-1}. \tag{35}$$

Die Funktionen ξ_{n-1} und ζ_{n-1} sind in $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ erklärte stetige Funktionen von x_{n-1} und z_{n-1}, die dort stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen und überdies folgende Eigenschaften haben:

1. Im Punkte $(x_0, 0, 0)$ gilt

$$\xi_{n-1} = \zeta_{n-1} = 0. \tag{36}$$

2. Es gelten die Ungleichheitsbeziehungen

$$|\xi_{n-1}|, \ |\zeta_{n-1}| \leqq \vartheta_2 \Omega \mathfrak{r}_{n-1}; \quad \left|\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\right| \leqq \vartheta_2^* \Omega; \tag{37}$$

$$(\mathfrak{r}_{n-1}^2 = (x_{n-1} - x_0)^2 + z_{n-1}^2).$$

Es sei weiter h_n die Bogenlänge des zwischen $(x_{n-1}, 0, z_{n-1})$ und $(x_n, 0, z_n)$ befindlichen Kurvenstückes der orthogonalen Trajektorie. Auf dieser sei die Richtung, die von O bzw. von der Kernfigur fortweist, als positiv definiert. Wir haben

$$|h_n| \leqq \vartheta_1 \Omega \mathfrak{r}_{n-1}, \quad \left|\frac{\partial h_n}{\partial x_{n-1}}\right|, \ \left|\frac{\partial h_n}{\partial z_{n-1}}\right| \leqq \Omega. \tag{38}$$

Wir betrachten nun die Potentiale

$$W^{(n)}(x_{n-1}, 0, z_{n-1}) = \int_{T_0^{(n-1)}} \mu_n' \frac{1}{\hat{r}_{n-1}} d\tau_{n-1}', \tag{39}$$

$$W^{(n+1)}(x_n, 0, z_n) = \int_{T_0^{(n)}} \mu_{n+1}' \frac{1}{\hat{r}_n} d\tau_n';$$

$$(\hat{r}_{n-1}^2 = (x_{n-1} - x_{n-1}')^2 + y_{n-1}'^2 + (z_{n-1} - z_{n-1}')^2, \ \hat{r}_n^2 = (x_n - x_n')^2 + y_n'^2 + (z_n - z_n')^2,$$

$$d\tau_{n-1}' = dx_{n-1}' dy_{n-1}' dz_{n-1}', \ d\tau_n' = dx_n' dy_n' dz_n').$$

Wie sich mit Hilfe einer von Herrn Lichtenstein[13]) entwickelten Methode zeigen läßt, findet man unter den angegebenen Voraussetzungen für irgendeinen Punkt $(x, 0, z)$ in B

$$|W^{(n+1)}(x, 0, z) - W^{(n)}(x, 0, z)|,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} W^{(n+1)}(x,0,z) - \frac{\partial}{\partial x} W^{(n)}(x,0,z)\right|, \ \left|\frac{\partial}{\partial z} W^{(n+1)}(x,0,z) - \frac{\partial}{\partial z} W^{(n)}(x,0,z)\right| \tag{40}$$

$$\leqq \vartheta_3 \Omega \mathfrak{c},$$

---

[13]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Hilfsätze der Potentialtheorie IV. Leipziger Berichte 82 (1931), S. 265—344, insbes. S. 291 ff. und S. 318 ff. Vgl. auch loc. cit. [2]).

wobei c eine Schranke für μ_n und dessen Ableitungen erster Ordnung bedeutet. Weiterhin ist

$$(41)\quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} V^{(n+1)}(x,0,z) &= \varkappa \frac{\partial}{\partial x} W^{(n+1)}(x,0,z) + \omega^2 x - \frac{\varkappa M x}{r^3} + \varkappa (f - \mu^*_{n+1}) \frac{\partial \mathfrak{B}^{(n+1)}}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial x} V^{(n)}(x,0,z) &= \varkappa \frac{\partial}{\partial x} W^{(n)}(x,0,z) + \omega^2 x - \frac{\varkappa M x}{r^3} + \varkappa (f - \mu^*_{n}) \frac{\partial \mathfrak{B}^{(n)}}{\partial x}, \end{aligned}$$

wobei $\varkappa f \mathfrak{B}^{(n+1)}$ und $\varkappa f \mathfrak{B}^{(n)}$ die Potentiale der beiden Kernfiguren bezeichnen. Denken wir uns jetzt die zu (23) entsprechenden Integro-Differentialgleichungen sowohl für die n-te als auch für die $(n+1)$-te Approximation aufgestellt und die Differenz gebildet, so gewinnen wir eine Integro-Differentialgleichung für $\zeta^{(n+1)} - \zeta^{(n)}$. Als neuer Parameter wird jetzt $\Omega\,\mathfrak{c}$ auftreten (man denke sich etwa $W^{(n+1)} - W^{(n)} = \bar{\vartheta}_3\, \Omega\, \mathfrak{c}$ gesetzt, wobei $\bar{\vartheta}_3$ diesmal eine Funktion von x und z darstellt). Schreiben wir für $\zeta^{(n+1)} - \zeta^{(n)}$ die Potenzreihenentwicklung nach den Parametern (statt s tritt die Differenz $s^{(n+1)} - s^{(n)}$ auf), so erkennt man sogleich, daß in der ersten Potenz und ohne Behaftung mit anderen „kleinen" Größen nur $\Omega\,\mathfrak{c}$ und $s^{(n+1)} - s^{(n)}$ vorkommen. (Man prüft das dadurch nach, daß man als erste Annäherung auf der rechten Seite die gesuchte Funktion gleich Null setzt.)

Hierauf bilden wir die Differenz der der Beziehung (25) entsprechenden Gleichungen. Wir finden, indem wir die Differenz der auftretenden Integrale wie in (26) behandeln und für $\zeta^{(n+1)} - \zeta^{(n)}$ die vorher gefundenen Entwicklungen einsetzen, daß

$$(42)\qquad s^{(n+1)} - s^{(n)} = O(\Omega\,\mathfrak{c})$$

ist. Also ist alles in allem

$$(43)\qquad |\zeta^{(n+1)} - \zeta^{(n)}| \leqq \vartheta_4\, \Omega\, \mathfrak{c},$$

und Entsprechendes gilt für $\left| \frac{d\zeta^{(n+1)}}{d\sigma} - \frac{d\zeta^{(n)}}{d\sigma} \right|$.

Hieraus läßt sich dann ohne weiteres schließen, daß

$$(44)\qquad \left| \frac{\partial \mathfrak{B}^{(n+1)}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}^{(n)}}{\partial x} \right| \leqq \vartheta_5\, \Omega\, \mathfrak{c}$$

ist (man forme wiederum die Integralausdrücke für $\frac{\partial \mathfrak{B}^{(n+1)}}{\partial x}$ und $\frac{\partial \mathfrak{B}^{(n)}}{\partial x}$ um). So folgt jetzt aus (41)

$$(45)\quad \left| \frac{\partial}{\partial x} V^{(n+1)}(x,0,z) - \frac{\partial}{\partial x} V^{(n)}(x,0,z) \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial z} V^{(n+1)} - \frac{\partial}{\partial z} V^{(n)} \right| \leqq \vartheta_6\, \Omega\, \mathfrak{c}.$$

Da aber andererseits auch

$$(46)\quad \left| \frac{\partial}{\partial x} V^{(n+1)}(x,0,z) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial x} V^{(n)}(x,0,z) \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial z} V^{(n+1)} \right|, \left| \frac{\partial}{\partial z} V^{(n)} \right| \leqq \vartheta_7\, \mathfrak{r},$$

also

$$(47)\quad \left| \frac{\partial}{\partial x} V^{(n+1)}(x,0,z) - \frac{\partial}{\partial x} V^{(n)}(x,0,z) \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial z} V^{(n+1)} - \frac{\partial}{\partial z} V^{(n)} \right| \leqq 2\vartheta_7\, \mathfrak{r}$$

ist, so vereinigen wir (45) und (47) zu

$$(48)\quad \left|\frac{\partial}{\partial x}V^{(n+1)}(x,0,z)-\frac{\partial}{\partial x}V^{(n)}(x,0,z)\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}V^{(n+1)}-\frac{\partial}{\partial z}V^{(n)}\right|\leqq\vartheta_8\,\Omega\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}.$$

Hieraus folgern wir, ohne näher darauf eingehen zu wollen[14]),

$$(49)\quad |(V^{(n+1)}(x,0,z)-V^{(n+1)}(x_0,0,0))-(V^{(n)}(x,0,z)-V^{(n)}(x_0,0,0))|\leqq\vartheta_9\,\Omega\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{r}^2,$$

$$(50)\quad \begin{aligned}&\operatorname{Max}|h_{n+1}|\leqq\vartheta^*\,\mathfrak{c}\operatorname{Max}|h_n|,\\ &\operatorname{Max}\left|\frac{\partial}{\partial x}h_{n+1}\right|\leqq\vartheta^*\,\mathfrak{c}\operatorname{Max}\left|\frac{\partial}{\partial x}h_n\right|,\ \operatorname{Max}\left|\frac{\partial}{\partial z}h_{n+1}\right|\leqq\vartheta^*\,\mathfrak{c}\operatorname{Max}\left|\frac{\partial}{\partial z}h_n\right|,\end{aligned}$$

woraus dann durch Wiederholung der Betrachtungen, die auf (43) führten,

$$(51)\quad \operatorname{Max}|\zeta^{(n+2)}-\zeta^{(n+1)}|\leqq\bar{\vartheta}\,\mathfrak{c}\operatorname{Max}|\zeta^{(n+1)}-\zeta^{(n)}|$$

nebst einer entsprechenden Beziehung für die erste Ableitung folgen würde. Jetzt vergegenwärtigen wir uns den Übergang von der 0-ten zur 1-ten Approximation. Es ist wegen (28)

$$(52)\quad |\zeta^{(1)}-\zeta^{(0)}|\leqq\vartheta_9\,\varepsilon$$

nebst einer entsprechenden Beziehung für die erste Ableitung. Hieraus folgt

$$(53)\quad |\mathfrak{V}^{(1)}(x,0,z)-\mathfrak{V}^{(0)}(x,0,z)|,\ \left|\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{V}^{(1)}-\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{V}^{(0)}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{V}^{(1)}-\frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{V}^{(0)}\right|\leqq\vartheta_{10}\,\varepsilon,$$

also ergibt sich wegen (30) und (7), und da

$$(54)\quad \left|\frac{\partial}{\partial x}V^{(1)}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial x}V^{(0)}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}V^{(1)}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}V^{(0)}\right|\leqq\vartheta_{11}\,\mathfrak{r}$$

ist, schließlich

$$(55)\quad \left|\frac{\partial}{\partial x}V^{(1)}-\frac{\partial}{\partial x}V^{(0)}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}V^{(1)}-\frac{\partial}{\partial z}V^{(0)}\right|\leqq\vartheta_{12}\,\varepsilon\,\mathfrak{r},$$

$$(56)\quad |(V^{(1)}(x,0,z)-V^{(1)}(x_0,0,0))-(V^{(0)}(x,0,z)-V^{(0)}(x_0,0,0))\leqq\vartheta_{13}\,\varepsilon\,\mathfrak{r}^2,$$

$$(57)\quad |h_1|\leqq\vartheta_1\,\vartheta^I\,\varepsilon\,\mathfrak{r},\quad \left|\frac{\partial h_1}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial h_1}{\partial z}\right|\leqq\vartheta^I\,\varepsilon.$$

Da wegen $\mu_1=\varepsilon\,\Psi(V^0-\bar{C}^{(0)};\,C_0^{(0)})$ auch

$$(58)\quad V^{(1)}=V^{(1)}(x,0,z;\,C_0^{(0)})$$

ist, so findet sich

$$(59)\quad h_1=h_1(x,0,z;\,C_0^{(0)}),\ \frac{\partial}{\partial x}h_1=\frac{\partial}{\partial x}h_1(x,0,z;\,C_0^{(0)}),\ldots.$$

Man erkennt leicht, daß $h_2, h_3, \ldots, \frac{\partial h_2}{\partial x}, \frac{\partial h_3}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial h_2}{\partial z}, \frac{\partial h_3}{\partial z}, \ldots$ ebenfalls ste-

[14]) Die Schlüsse sind die gleichen wie die der in [1]) und [2]) angegebenen Arbeiten.

tige Funktionen von $C_0^{(0)}$ sein werden, desgleichen

$$\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \sigma}, \frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial \sigma}, \ldots.$$

Für hinreichend kleines ε, etwa $\varepsilon \leqq \bar{\varepsilon}$, läßt sich sicher erreichen, daß

$$\text{Max}\,(\vartheta^* \mathfrak{c}, \bar{\vartheta} \mathfrak{c}) \leqq \frac{1}{2} \tag{60}$$

ausfällt. Daher konvergieren wegen (50) die Reihen

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots, \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + \ldots, \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{\partial h_2}{\partial z} + \ldots,$$

$$\zeta^{(0)} + (\zeta^{(1)} - \zeta^{(0)}) + (\zeta^{(2)} - \zeta^{(1)}) + \ldots, \frac{d\zeta^{(0)}}{d\sigma} + \left(\frac{d\zeta^{(1)}}{d\sigma} - \frac{d\zeta^{(0)}}{d\sigma}\right) + \ldots$$

unbedingt und gleichmäßig und haben h, $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial z}$, ζ, $\frac{d\zeta}{d\sigma}$ zu Summen, die ebenfalls stetig von $C_0^{(0)}$ abhängen. Es gilt

$$|h| \leqq 2\vartheta_1 \vartheta^I \varepsilon \mathfrak{r}, \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial h}{\partial z}\right| \leqq 2\vartheta^I \varepsilon, \tag{61}$$

$$|\zeta| \leqq |\zeta^{(0)}| + 2\,\text{Max}\,|\zeta^{(1)} - \zeta^{(0)}| \leqq \vartheta_{14} \frac{R_1}{L} + 2\vartheta_9 \varepsilon. \tag{62}$$

Entsprechendes gilt für $\frac{d\zeta}{d\sigma}$.

Wegen der stetigen Abhängigkeit von $C_0^{(0)}$ liegt, wie verlangt, eine lineare Reihe vor. Ist ferner mit $M = \text{Max}\left(\sqrt{x_0^2 + \delta^2}, \sqrt{(\beta - x_0)^2 + \delta^2}\right)$

$$\varepsilon \leqq \varepsilon_0 = \text{Min}\left(\frac{\hat{\beta}}{2\vartheta_1 \vartheta^I M}, \frac{\hat{\mathfrak{r}}}{4\vartheta_1 \vartheta^I x_0}, \frac{\hat{\mathfrak{a}}}{8\vartheta_1 \vartheta^I M}, \frac{\hat{\mathfrak{a}}}{8\vartheta_9}, \frac{\hat{\vartheta}}{2\vartheta_1 \vartheta^I}, \bar{\varepsilon}\right), \tag{63}$$

so ist jede der Figuren $T_0^{(n)} - T_*^{(n)}$ ganz in $\hat{B}$ und jede der Figuren $\bar{T}^{(n)} - T_*^{(n)}$ ganz in $\hat{\Theta}$ enthalten. Die Figuren $\mathsf{T}^{(n+1)}$ liegen alle im Innern von $\mathfrak{A}$.

Es konvergiert fernerhin gleichmäßig:

$$W^{(n)}(x_{n-1}, 0, z_{n-1}; C_0^{(0)}) \to W(x, 0, z; C_0^{(0)}),$$
$$D_1 W^{(n)}(x_{n-1}, 0, z_{n-1}; C_0^{(0)}) \to D_1 W(x, 0, z; C_0^{(0)}),$$
$$\mu_n(x_{n-1}, 0, z_{n-1}; C_0^{(0)}) \to \mu(x, 0, z; C_0^{(0)}),$$
$$\mathfrak{W}^{(n)}(x_{n-1}, 0, z_{n-1}; C_0^{(0)}) \to \mathfrak{W}(x, 0, z; C_0^{(0)}),$$
$$D_1 \mathfrak{W}^{(n)}(x_{n-1}, 0, z_{n-1}; C_0^{(0)}) \to D_1 \mathfrak{W}(x, 0, z; C_0^{(0)}).$$

Es ergibt sich so schließlich

$$V(x, 0, z; C_0^{(0)}) = \frac{\varkappa M}{r} + \varkappa W(x, 0, z; C_0^{(0)}) + \varkappa f \mathfrak{W}(x, 0, z; C_0^{(0)}) + \frac{\omega^2}{2} x^2,$$

und wir haben die lineare Reihe der Gleichgewichtsfiguren vor uns, deren Existenz bewiesen werden sollte.

§ 4.

Neue Voraussetzungen über die Randdichte.

Nachdem im vorangehenden der Fall erledigt wurde, daß bei jeder Figur der Schar die Randdichte c verschwindet, soll diese jetzt allein bei der singulären Figur gleich Null werden, während sie bei den Nachbarfiguren verschieden von Null ausfallen darf. Allerdings soll die Randdichte bei Annäherung an die singuläre Figur stetig gegen Null abnehmen. Wir präzisieren unsere Aufgabe folgendermaßen:

Bezeichnet $\mathfrak{R}^{(0)}$ die kleinste Entfernung der Kurve $S_0^{(0)}$ vom Punkte $(x_0, 0, 0)$, so soll für die Randdichte

$$c = \Psi(m; C_0^{(0)}) \leqq a\,[\mathfrak{R}^{(0)}]^{1+\eta} \qquad (\eta > 0,\ a \text{ konstant}) \tag{64}$$

gelten, während auf der singulären Kurve selbst

$$c = \Psi(m; \bar{C}^{(0)}) = 0$$

ist. Fassen wir die Ausgangskonfiguration ins Auge. Auf der Kurve $S_0^{(0)}$ (die nicht $\bar{S}^{(0)}$ sein soll) seien uns zwei Punkte $(x', 0, z')$ und $(x'', 0, z'')$ gegeben. Es ist wegen (16)

$$\cos(x', \nu) - \cos(x'', \nu) = (x' - x'') \cdot \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial}{\partial x} V^{(0)}(\bar{x}, 0, \bar{z}) \cdot N^{-1}(\bar{x}, 0, \bar{z})\Big] + (z' - z'') \frac{\partial}{\partial z}\Big[\frac{\partial}{\partial x} V^{(0)}(\bar{x}, 0, \bar{z}) \cdot N^{-1}(\bar{x}, 0, \bar{z})\Big],$$

wobei $(\bar{x}, 0, \bar{z})$ einen auf der Verbindungsgeraden von $(x', 0, z')$ und $(x'', 0, z'')$ zwischen diesen gelegenen Punkt und (ν) die Normalenrichtung zu $S_0^{(0)}$ bezeichnet. Weiter gilt wegen (13) für $\mathrm{Max}(\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'') \leqq \mathfrak{r}_0$ $(\mathfrak{r}'^2 = (x' - x_0)^2 + z'^2, \ldots)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V^{(0)}(\bar{x}, 0, \bar{z}) = 2\alpha_0 + O(\bar{\mathfrak{r}}), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} V^{(0)}(\bar{x}, 0, \bar{z}) = O(\bar{\mathfrak{r}}), \qquad (\bar{\mathfrak{r}}^2 = (\bar{x} - x_0)^2 + \bar{z}^2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V^{(0)}(\bar{x}, 0, \bar{z}) = 4\alpha_0^2 (\bar{x} - x_0)^2 + 4\gamma_0^2 \bar{z}^2 + O(\bar{\mathfrak{r}}^3) = \bar{\mathfrak{r}}^2 \Big(4\alpha_0^2 \cdot \Big(\frac{\bar{x} - x_0}{\bar{\mathfrak{r}}}\Big)^2 + 4\gamma_0^2 \cdot \Big(\frac{\bar{z}}{\bar{\mathfrak{r}}}\Big)^2 + O(\bar{\mathfrak{r}})\Big),$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x} N^{-1}(\bar{x}, 0, \bar{z})\Big| = |-N^{-3}(\bar{x}, 0, \bar{z}) \cdot [4\alpha_0^2 (\bar{x} - x_0) + O(\bar{\mathfrak{r}}^2)]| = O\Big(\frac{1}{\bar{\mathfrak{r}}^2}\Big).$$

Also ist schließlich alles in allem

$$|\cos(x', \nu) - \cos(x'', \nu)| \leqq \frac{C}{\bar{\mathfrak{r}}}\, \mathfrak{r}_{12} \leqq \frac{C}{\mathfrak{R}^{(0)}}\, \mathfrak{r}_{12} \tag{67}$$

$$(\mathfrak{r}_{12}^2 = (x' - x'')^2 + (z' - z'')^2,\ C \text{ konstant}),$$

d. h. der Höldersche Koeffizient der Richtungskosinus der Normalen zu den Kurven $S_0^{(0)}$ wächst bei Annäherung an die Kurve $\bar{S}^{(0)}$ wie $\frac{1}{\mathfrak{R}^{(0)}}$.

Dies gilt natürlich für alle Kurven der betrachteten Schar; denn für die nicht in den Kreis um $(x_0, 0, 0)$ mit Radius r_0 hineinfallenden Kurvenstücke lassen sich Ungleichheiten angeben, die der Beziehung (67) eingeordnet werden können.

Wir betrachten jetzt

$$(68)\quad \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} = -\int_{\mathfrak{T}_0^{(0)}} \mu_1' \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\tau' = \int_{\mathfrak{T}_0^{(0)} - \mathfrak{T}_*^{(0)}} \frac{\partial \mu_1'}{\partial x'} \cdot \frac{1}{\hat{r}}\, d\tau' + \varepsilon c \int_{\mathfrak{S}_0^{(0)}} \frac{\cos(n', x)\, d\sigma'}{\hat{r}}$$

$$(\hat{r}^2 = (x - x')^2 + y'^2 + (z - z')^2,\ n \text{ ist die Innennormale}).$$

Der erste der beiden Integralausdrücke rechter Hand besitzt ohne Zweifel stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, die überdies einer H-Bedingung genügen. Wie verhalten sich dagegen die Ableitungen erster Ordnung des zweiten Integralausdruckes für den Fall, daß $\mathfrak{S}_0^{(0)}$ in der Nachbarschaft von $\bar{\mathfrak{S}}^{(0)}$ liegt? Augenscheinlich haben wir das Potential einer einfachen Flächenbelegung vor uns.

Wir nehmen an, daß der Punkt $(x, 0, z)$ auf $S_0^{(0)}$ liegt und daß sich ein Flächenstück von $\mathfrak{S}_0^{(0)}$, das $\tilde{\mathfrak{S}}$ heißen möge und den Punkt $(x, 0, z)$ im Innern enthält, durchweg etwa in der Form $z = z(x, y)$ darstellen läßt. Wir wollen zeigen, daß der Grenzwert

$$(69)\quad \mathfrak{N}^{(0)} \int_{\mathfrak{S}_0^{(0)}}' \cos(n', x) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\sigma' = \lim_{\underset{\sim}{\mathfrak{S}} \to 0} \mathfrak{N}^{(0)} \int_{\mathfrak{S}_0^{(0)} - \underset{\sim}{\mathfrak{S}}} \cos(n', x) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\sigma'$$

existiert und für alle $\mathfrak{S}_0^{(0)}$ unterhalb einer gemeinsamen Schranke liegt. Hierbei verstehen wir unter $\underset{\sim}{\mathfrak{S}}$ den von einer Kugel vom Radius $\underset{\sim}{d}$ um $(x, 0, z)$ als Mittelpunkt herausgeschnittenen Teil von $\tilde{\mathfrak{S}}$. Nach dem Vorbild von Herrn Lichtenstein[15]) betrachten wir die Tangentialebene an $\tilde{\mathfrak{S}}$ in $(x, 0, z)$. Sie trifft die soeben eingeführte Kugel in einem größten Kreis, durch den ein schiefer Kreiszylinder mit Mantellinien parallel zur z-Achse gelegt sei. Dieser Zylinder schneidet aus $\tilde{\mathfrak{S}}$ ein Flächenstück $\underset{\sim}{\mathfrak{S}}$ heraus. Wir finden, wenn wir die Betrachtungen von Herrn Lichtenstein zugrunde legen, auf völlig gleiche Weise mit Rücksicht auf (67), daß sich über den Inhalt J des Flächenstückes $\underset{\sim}{\tilde{\mathfrak{S}}} - \underset{\sim}{\mathfrak{S}}$ die folgende Aussage machen läßt:

$$(70)\quad |J| \leqq \text{konst.} \frac{1}{\mathfrak{N}^{(0)}} \cdot \underset{\sim}{d}^3.$$

Hieraus folgern wir sogleich, daß

$$(71)\quad \mathfrak{N}^{(0)} \int_{\mathfrak{S}_0^{(0)} - \underset{\sim}{\mathfrak{S}}} = \mathfrak{N}^{(0)} \int_{\mathfrak{S}_0^{(0)} - \underset{\sim}{\mathfrak{S}}} + \mathfrak{N}^{(0)} \int_{\underset{\sim}{\mathfrak{S}} - \underset{\sim}{\mathfrak{S}}}$$

---

[15]) Vgl. die in [13]) genannte Abh., insbes. S. 274–279.

gleichmäßig beschränkt ist und einen Grenzwert besitzt, wenn nur das gleiche für $\mathfrak{R}^{(0)} \int\limits_{\mathfrak{S}_0^{(0)}-\underline{\mathfrak{S}}}$ gilt.

Betrachten wir ferner das Integral

$$\mathfrak{R}^{(0)} \int\limits_{\tilde{\mathfrak{S}}-\underline{\mathfrak{S}}} \cos(n', x) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\sigma' = \mathfrak{R}^{(0)} \int\limits_{\tilde{\mathfrak{S}}-\underline{\mathfrak{S}}} \cos(n', x) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) \cdot \left[1 + \left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx'\,dy'$$

$$= \mathfrak{R}^{(0)} \int\limits_{\tilde{\mathfrak{S}}-\underline{\mathfrak{S}}} \mathfrak{m}' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) dx'\,dy'$$

$$= \mathfrak{R}^{(0)} \int\limits_{\tilde{\mathfrak{S}}-\underline{\mathfrak{S}}} (\mathfrak{m}' - \mathfrak{m}) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) dx'\,dy' + \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{R}^{(0)} \int\limits_{\tilde{\mathfrak{S}}-\underline{\mathfrak{S}}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) dx'\,dy'.$$

Da nun auch, wie sich leicht einsehen läßt,

$$|\mathfrak{m} - \mathfrak{m}'| \leqq \frac{C_1}{\mathfrak{R}^{(0)}} \hat{r} \tag{73}$$

ist, so haben wir für alle $\mathfrak{S}_0^{(0)}$ gleichmäßig

$$\mathfrak{R}^{(0)} \left| \int\limits_{\tilde{\mathfrak{S}}-\underline{\mathfrak{S}}} (\mathfrak{m}' - \mathfrak{m}) \frac{x' - x}{\hat{r}^3} dx'\,dy' \right| \leqq C_1 \int\limits_{\tilde{\mathfrak{S}}-\underline{\mathfrak{S}}} \frac{1}{\hat{r}} dx'\,dy' \leqq C_2. \tag{74}$$

Die Betrachtung des zweiten Integrals im letzten Ausdruck von (72) ist nach dem Vorbilde von Herrn Lichtenstein leicht auszuführen: Das (zweifach zusammenhängende) Integrationsgebiet in der x, y-Ebene ist von einer Kurve K, der Projektion der Randlinie von $\tilde{\mathfrak{S}}$, und einer Ellipse $\underline{E}$, der Projektion des vorhin betrachteten Kreises in der Tangentialebene in σ an $\tilde{\mathfrak{S}}$, begrenzt. Es muß gezeigt werden, daß $\mathfrak{R}^{(0)} \int \frac{x' - x}{\hat{r}^3} dx'\,dy'$, erstreckt über das von irgendeinem Paar zu $\underline{E}$ ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen begrenzte Gebiet $\mathring{E}$, mit der großen Halbachse $\mathring{a}$ der größeren der beiden Ellipsen zugleich gegen Null geht. Man findet

$$\mathfrak{R}^{(0)} \left| \int\limits_{\mathring{E}} \frac{x' - x}{\hat{r}^3} dx'\,dy' \right| \leqq C_2 \mathring{a}, \tag{75}$$

weiterhin ergibt sich, daß

$$\lim_{\underline{\mathfrak{S}} \to 0} \mathfrak{R}^{(0)} \int\limits_{\tilde{\mathfrak{S}}-\underline{\mathfrak{S}}} \frac{x' - x}{\hat{r}^3} dx'\,dy' \quad \text{und also auch} \quad \lim_{\underline{\mathfrak{S}} \to 0} \mathfrak{R}^{(0)} \int\limits_{\mathfrak{S}_0^{(0)}-\underline{\mathfrak{S}}} \frac{x' - x}{\hat{r}^3} dx'\,dy'$$

existiert für alle Flächen $\mathfrak{S}_0^{(0)}$, wie nahe sie auch der singulären Fläche

liegen mögen. Alles in allem haben wir somit mit Rücksicht auf (71)

$$(76)\quad \mathfrak{R}^{(0)}\left|\int\limits'_{\mathfrak{S}_0^{(0)}}\cos(n',x)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right)d\sigma'\right| = \lim_{\underset{\sim}{\mathfrak{S}}\to 0}\mathfrak{R}^{(0)}\left|\int\limits_{\mathfrak{S}_0^{(0)}-\underset{\sim}{\mathfrak{S}}}\cos(n',x)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right)d\sigma'\right| \leqq C_4.$$

Ohne näher darauf eingehen zu müssen, finden wir weiter

$$(77)\quad \mathfrak{R}^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\mathfrak{S}_0^{(0)}}\cos(n',x)\,\frac{1}{\hat{r}}\,d\sigma' = \mathfrak{R}^{(0)}\int\limits'_{\mathfrak{S}_0^{(0)}}\cos(n',x)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right)d\sigma'.$$

Für die anderen partiellen Ableitungen erster Ordnung erhalten wir die zu (76) und (77) entsprechenden Resultate.

Es läßt sich weiterhin zeigen, daß $\mathfrak{R}^{(0)}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\mathfrak{S}_0^{(0)}}\cos(n',x)\cdot\frac{1}{\hat{r}}\,d\sigma'$ einer H-Bedingung genügt.

Wegen (64) wird nunmehr

$$\frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial x^2} = \int\limits_{\mathfrak{x}_0^{(0)}-\mathfrak{x}_*^{(0)}}\frac{\partial\mu_1'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right)d\tau' + \varepsilon\cdot c\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\mathfrak{S}_0^{(0)}}\cos(n',x)\cdot\frac{1}{\hat{r}}\,d\sigma'$$

für alle $\mathfrak{S}_0^{(0)}$ existieren, gleichmäßig beschränkt sein und einer H-Bedingung genügen. Für die übrigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $W^{(1)}$ gilt Entsprechendes.

Betrachten wir jetzt die Fläche $\mathfrak{S}_0^{(1)}$,

$$(78)\quad V^{(1)} = C_0^{(1)} = \bar{C}^{(1)} + C_0^{(0)} - \bar{C}^{(0)},$$

und es sei $\mathfrak{R}^{(1)}$ der kleinste Abstand der Meridiankurve $S_0^{(1)}$ vom Punkte $(x_0, 0, 0)$. In dessen Umgebung gilt, da ja, wie eben angegeben, die Ableitungen zweiter Ordnung überall existieren und einer H-Bedingung mit Exponenten λ' genügen,

$$(79)\quad V^{(1)} - \bar{C}^{(1)} = \alpha_1(x-x_0)^2 - \gamma_1 z^2 + O(\mathfrak{r}^{2+\lambda'}).$$

Die Größe $\mathfrak{R}^{(1)}$ ist nun die Entfernung des Punktes $(x_0, 0, 0)$ von demjenigen Punkte, in dem $S_0^{(1)}$ die x-Achse (falls $C_0^{(1)} - \bar{C}^{(1)} = C_0^{(0)} - \bar{C}^{(0)} > 0$ ist) bzw. die Gerade $x = x_0$ der $(x$-$z)$-Ebene (falls $C_0^{(0)} - \bar{C}^{(0)} < 0$ ist) schneidet. Das Entsprechende gilt von $\mathfrak{R}^{(0)}$. Fassen wir jetzt diese Schnittpunkte ins Auge, so ist wegen (13) und (79) in hinreichender Nähe des Punktes $(x_0, 0, 0)$, etwa im Falle $C_0^{(0)} > \bar{C}^{(0)}$,

$$(80)\quad \text{auf } S_0^{(0)}:\quad \alpha_0\mathfrak{R}^{(0)2} + O([\mathfrak{R}^{(0)}]^3) = C_0^{(0)} - \bar{C}^{(0)},$$

$$(81)\quad \text{auf } S_0^{(1)}:\quad \alpha_1\mathfrak{R}^{(1)2} + O([\mathfrak{R}^{(1)}]^{2+\lambda'}) = C_0^{(0)} - \bar{C}^{(0)},$$

somit

$$(82)\quad \frac{\mathfrak{R}^{(0)2}}{\mathfrak{R}^{(1)2}}\cdot\frac{\alpha_0 + O(\mathfrak{R}^{(0)})}{\alpha_1 + O([\mathfrak{R}^{(1)}]^{\lambda'})} = 1.$$

Wegen der Beziehung (33), die ja auch hier gilt, findet sich für hinreichend kleines ε in hinreichender Nähe des Punktes $(x_0, 0, 0)$

$$\mathfrak{k}_1 \leqq \frac{\mathfrak{R}^{(0)}}{\mathfrak{R}^{(1)}} \leqq \mathfrak{k}_2 \qquad (\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 > 0, \text{ konstant}). \tag{83}$$

Augenscheinlich kann man sich bei geeigneter Wahl der Konstanten die Beziehung für alle in Betracht kommenden $S_0^{(0)}$ und $S_0^{(1)}$ gültig denken. Für die weiteren Approximationen gelten entsprechende Beziehungen.

Seien jetzt $(x^{(1)}, 0, z^{(1)})$ und $(x^{(2)}, 0, z^{(2)})$ zwei benachbarte Punkte auf $S_0^{(1)}$, so läßt sich wie bei der Ausgangskonfiguration zeigen, daß

$$|\cos(x^{(1)}, \nu^{(1)}) - \cos(x^{(2)}, \nu^{(1)})| \leqq \frac{C'}{\mathfrak{R}^{(1)}} \cdot \mathfrak{r}^{1,2} \tag{84}$$

$$((\mathfrak{r}^{1,2})^2 = (x^{(1)} - x^{(2)})^2 + (z^{(1)} - z^{(2)})^2, \; C' \text{ konstant})$$

ist. Hierbei ist $\nu^{(1)}$ die positiv gerichtete Normale zu $S_0^{(1)}$. Wegen (83) können wir jetzt schreiben:

$$|\cos(x^{(1)}, \nu^{(1)}) - \cos(x^{(2)}, \nu^{(1)})| \leqq \frac{C''}{\mathfrak{R}^{(0)}} \mathfrak{r}^{1,2} \qquad (C'' \text{ konstant}). \tag{85}$$

Wir finden daher auch hier, daß

$$\mathfrak{R}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathfrak{S}_0^{(1)}} \cos(n', x) \cdot \frac{1}{\hat{r}} \, d\sigma' = \mathfrak{R}^{(0)} \int_{\mathfrak{S}_0^{(1)}} \cos(n', x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) d\sigma' \tag{86}$$

gleichmäßig beschränkt ist für alle Flächen $\mathfrak{S}_0^{(1)}$. Also gelten auch für die zweiten und höheren Approximationen Beziehungen der bei der ersten Approximation betrachteten Art, die uns erkennen lassen, daß bei jenen ebenfalls die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Gesamtpotentiale für alle Flächen der Schar existieren, gleichmäßig beschränkt sind und einer H-Bedingung genügen.

Von jetzt ab bietet der Konvergenzbeweis keine neuen Schwierigkeiten dar. Zu den Ungleichheitsbeziehungen (37) muß noch

$$\left|\left(\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)_1 - \left(\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)_2\right|, \ldots, \left|\left(\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\right)_1 - \left(\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\right)_2\right| \leqq \vartheta_2^* \Omega^{(n-1)\lambda^*} \tag{87}$$

und zu (38)

$$\left|\left(\frac{\partial h_n}{\partial x_{n-1}}\right)_1 - \left(\frac{\partial h_n}{\partial x_{n-1}}\right)_2\right|, \; \left|\left(\frac{\partial h_n}{\partial z_{n-1}}\right)_1 - \left(\frac{\partial h_n}{\partial z_{n-1}}\right)_2\right| \leqq \Omega^{(n-1)\lambda^*} \quad (0 < \lambda^* < 1) \tag{88}$$

hinzugefügt werden, wobei z. B. $\left(\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)_1$ den Wert der eingeklammerten Größe in einem Punktc $(x_{n-1}^{(1)}, 0, z_{n-1}^{(1)})$ im Innern oder auf dem Rande von $T_0^{(n-1)} - T_*^{(n-1)}$ bedeutet und $(d_{12}^{(n-1)})^2 = (x_{n-1}^{(1)} - x_{n-1}^{(2)})^2 + (z_{n-1}^{(1)} - z_{n-1}^{(2)})^2$ ist. Durch Überlegungen, die denen meiner früheren Arbeit[16]) vollständig analog

[16]) Vgl. die in [1]) genannte Abhandlung.

verlaufen, erhalten wir als Ergänzung zu (45)

$$(89)\quad \left|\left(\left(\frac{\partial V^{(n+1)}}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial V^{(n+1)}}{\partial x}\right)_2\right)-\left(\left(\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)_2\right)\right| \leqq \vartheta_6\, \Omega\, c\, d_{12}^{\lambda^*},$$

und zu (59)

$$(90)\quad \left|\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)_2\right|,\ \left|\left(\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)_1-\left(\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)_2\right| \leqq \vartheta^I\, \varepsilon\, d_{12}^{\lambda^*}.$$

So bekommen wir schließlich als Ergänzung zu (61)

$$\left|\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_2\right|,\ \left|\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_1-\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_2\right| \leqq 2\,\vartheta^I\, \varepsilon\, d_{12}^{\lambda^*}.$$

Wie im vorigen Kapitel zeigt sich, daß auch hier $h, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial z}$ stetig von $C_0^{(0)}$ abhängen.

(Eingegangen am 26. Januar 1932.)

Eine Ungleichung der Integralrechnung.

Von

Georg Aumann in München.

Ist $f(z)$ auf dem rektifizierbaren Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ (einschließlich der Endpunkte) eindeutig analytisch, so gilt:

$$\left|\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz\right| \leqq \operatorname*{Max}_{\mathfrak{C}} |f(z)| \cdot \int_{\mathfrak{C}} |dz|\,.$$

Fragt man sich nach den Fällen, bei welchen hier das Gleichheitszeichen steht, also

$$\left|\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz\right| = \operatorname*{Max}_{\mathfrak{C}} |f(z)| \cdot \int_{\mathfrak{C}} |dz| \tag{1}$$

statt hat, so denkt man wohl zunächst an den trivialen Fall, daß $f(z) \equiv c$ ist, wobei der Bogen $\mathfrak{C}$ für $c = 0$ beliebig ist, für $c \neq 0$ eine Strecke sein muß. Dies ist aber nicht der einzige Fall, sondern die Gesamtheit der möglichen Fälle ist überraschenderweise wesentlich umfassender. Ich werde zeigen, daß die Bestimmung der allgemeinsten Funktion $f(z)$ und des zugehörigen Kurvenbogens $\mathfrak{C}$ zurückgeführt werden kann auf eine gewisse *konforme Abbildung*, und daß sich bei Vorgabe eines *beliebigen*, aber schlichten (einschließlich der Endpunkte) analytischen Kurvenbogens $\mathfrak{C}$ von stetiger nicht verschwindender Krümmung dazu eine auf $\mathfrak{C}$ eindeutige analytische Funktion $f(z)$, abgesehen von einem konstanten Faktor, *eindeutig* bestimmen läßt, so daß (1) gilt.

1. Soll unter den am Anfang gemachten Voraussetzungen über $f(z)$ und $\mathfrak{C}$ die Gleichung (1) bestehen, wobei wir von dem schon erwähnten trivialen Fall $f(z) \equiv$ konst. im folgenden absehen, so muß, wegen

$$\left|\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz\right| \leqq \int_{\mathfrak{C}} |f(z)\,dz| \leqq \operatorname*{Max}_{\mathfrak{C}} |f(z)| \cdot \int_{\mathfrak{C}} |dz|\,,$$

auf dem Bogen $\mathfrak{C}$ notwendig zugleich gelten

$$\text{(A)} \quad \arg\,(f(z)\,dz) = \text{konst.},$$

$$\text{(B)} \quad |f(z)| = \text{konst.} = \varrho > 0\,.$$

Dies reicht auch hin, damit (1) besteht.

Diese Bedingungen lassen sich nun auf eine bequemere Gestalt bringen. Nach (B) ist $\mathfrak{C}$ ein Teilbogen der Niveaulinie $|f(z)| = \varrho$. Darauf setze ich

$$f(z) = e^{u(x,y)+iv(x,y)} \quad \text{(wobei } z = x + iy\text{)}.$$

$\mathfrak{C}$ ist ein Teilbogen der Kurve

$$u(x, y) = \log \varrho;$$

daher gilt auf $\mathfrak{C}$

$$u_x dx + u_y dy = 0. \tag{2}$$

Dabei wollen wir voraussetzen, daß auf $\mathfrak{C}$ die Ableitungen u_x, u_y nicht gleichzeitig verschwinden, was wir nötigenfalls erzwingen können, wenn wir uns auf einen Teilbogen von $\mathfrak{C}$ beschränken. Nach (A) ist auf $\mathfrak{C}$

$$\frac{f(z)\,dz}{\overline{f(z)\,dz}} = \text{konst.},$$

oder

$$e^{2iv}\frac{dx+i\,dy}{dx-i\,dy} = \text{konst.}$$

Wegen (2) ist

$$dx : dy = u_y : -u_x,$$

und daher auf $\mathfrak{C}$

$$C = e^{2iv}\frac{u_y - i\,u_x}{u_y + i\,u_x} = e^{2iv}\frac{u_x^2 + u_y^2}{(u_y + i\,u_x)^2} = \text{konst.}$$

Die Größe C kann man durch f und f' ausdrücken. Es ist

$$f' = \frac{df}{dz} = \frac{df}{dx} = e^{u+iv}(u_x + i\,v_x) = (u_x - i\,u_y)\,f,$$

denn es gilt $v_x = -u_y$. Also

$$if' = (u_y + i\,u_x)\,f,$$

$$(u_y + i\,u_x)^2 = -\left(\frac{f'}{f}\right)^2, \quad \text{und} \quad u_x^2 + u_y^2 = \left|\frac{f'}{f}\right|^2, \qquad e^{2iv} = \left(\frac{f}{|f|}\right)^2.$$

Somit ist auf $\mathfrak{C}$

$$C = \left(\frac{f}{|f|}\right)^2 \frac{\left|\frac{f'}{f}\right|^2}{-\left(\frac{f'}{f}\right)^2} = -\left(\frac{f^2}{f'}\left|\frac{f'}{f^2}\right|\right)^2 = \text{konst.},$$

oder

$$\frac{f'}{f^2}\left|\frac{f^2}{f'}\right| = \text{konst.} \neq 0.$$

Setzt man

$$\frac{1}{f(z)} = \varphi(z), \tag{3}$$

so ist $\varphi(z)$ auf $\mathfrak{C}$ analytisch, und es gilt dort

$$(\mathrm{A}') \quad \frac{\varphi'}{|\varphi'|} = \text{konst.},$$

$$(\mathrm{B}') \quad |\varphi| = \frac{1}{\varrho}.$$

Setzt man weiter

$$w = \varphi(z), \tag{4}$$

so läßt sich diese Abbildung auf einem gewissen Teilbogen $\mathfrak{C}'$ von $\mathfrak{C}$ eindeutig umkehren

$$z = \psi(w), \quad \text{mit} \quad \varphi' = \frac{1}{\psi'}. \tag{5}$$

Auf einem gewissen Teilbogen $\mathfrak{B}$ von $|w| = \frac{1}{\varrho}$ ist also die analytische Funktion

$$\chi(w) = \psi'(w) \tag{6}$$

von Null verschieden, und es gilt

$$\frac{\chi(w)}{|\chi(w)|} = \text{konst.},$$

d. h. $\chi(w)$ hat auf $\mathfrak{B}$ konstantes Argument. Indem ich $\chi(w)$ mit einer geeigneten Konstanten vom Betrag 1 multipliziere, erreiche ich, daß $\chi(w)$ auf $\mathfrak{B}$ *reell* und *positiv* ist[1]).

Nun ist es ein leichtes, die allgemeinste derartige Funktion $\chi(w)$ zu finden. Ich unterscheide zwei Fälle:

a) $\chi = \text{konst.}$ auf $\mathfrak{B}$, daher identisch konst. $\neq 0$.

b) $\chi \neq \text{konst.}$ auf $\mathfrak{B}$. Dann ist das Bild von $\mathfrak{B}$ vermöge der Abbildung

$$t = \chi(w) \tag{7}$$

eine Teilstrecke der positiven reellen Achse. Es läßt sich ein abgeschlossener Teilbogen $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ angeben, auf dem $\chi'(w) \neq 0$ und $t = \chi(w)$ umkehrbar eindeutig ist. Dieser Teilbogen $\mathfrak{B}'$ werde auf die Strecke $\mathfrak{S}$ der positiven reellen Achse abgebildet. Man kann dann die Endpunkte von $\mathfrak{B}'$ durch einen solchen in $|w| < \frac{1}{\varrho}$ verlaufenden Kreisbogen $\mathfrak{A}$ verbinden, daß in dem durch $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{A}$ begrenzten einfach zusammenhängenden Gebiet G, einschließlich $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{A}$, die Abbildung (7) analytisch und schlicht ist. G wird durch (7) auf das Gebiet G' der t-Ebene abgebildet, welches durch $\mathfrak{S}$ und das Bild $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ begrenzt ist. Dabei ist $\mathfrak{A}'$ ein *schlicht-analytischer* Kurvenbogen[2]).

---

[1]) Diese Multiplikation kommt nach (6) und (5) einer Transformation $z = a\zeta$ gleich mit $|a| = 1$. Man sieht aber sofort, daß, falls für $f(z)$ und $\mathfrak{C}$ die Gleichung (1) gilt, die entsprechende auch für die transformierte Funktion und Kurve richtig ist.

[2]) Einen Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ der z-Ebene nenne ich *schlicht-analytisch*, wenn er vermöge der Abbildung $z = g(\zeta)$ das Bild von $0 \leqq \xi \leqq 1$, $\eta = 0$ ist ($\zeta = \xi + i\eta$); dabei soll $g(\xi)$ auf $0 \leqq \xi \leqq 1$ schlicht und analytisch sein (insbesondere ist also $g'(\xi) \neq 0$ auf dem Intervall $0 \leqq \xi \leqq 1$). Diese Eigenschaft ist invariant gegenüber jeder schlichten analytischen Abbildung.

Sind umgekehrt G und G' in der eben besprochenen Weise irgendwie vorgegeben, so gibt es eine konforme Abbildung des Inneren von G auf das Innere von G', bei welcher der Bogen $\mathfrak{B}'$ und die Strecke $\mathfrak{S}$ bei Annäherung von innen her einander punktweise eineindeutig und stetig entsprechen. Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip ist aber dann die betreffende Abbildungsfunktion auch auf $\mathfrak{B}'$ analytisch, und hat dort reelle positive Werte. Die Aufstellung einer Funktion $\chi(w)$ mit obigen Eigenschaften ist damit auf die Bestimmung einer konformen Abbildungsfunktion zurückgeführt. Aus $\chi(w)$ erhält man dann mittels (6), (5), (4), (3) die Funktion $f(z)$; das Bild des Kreisbogens $\mathfrak{B}'$ vermöge der Abbildung (5) ist ein Teilbogen $\mathfrak{C}''$ des Kurvenbogens $\mathfrak{C}$. Einer analytischen Fortsetzung von $\chi(w)$ längs $|w| = \frac{1}{\varrho}$ über $\mathfrak{B}'$ hinaus entspricht eine Fortsetzung des Teilbogens $\mathfrak{C}''$ von $\mathfrak{C}$ und eine analytische Fortsetzung von $f(z)$ längs $\mathfrak{C}$ über $\mathfrak{C}''$ hinaus.

Da $\psi'(w) > 0$ ist, so sind $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}''$ durch $z = \psi(w)$ *richtungstreu* aufeinander bezogen, d. h. in entsprechenden Punkten von $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}''$ haben die Tangenten gleiche Richtung. $\mathfrak{C}''$ ist daher eine schlicht-analytische Kurve mit *nicht verschwindender Krümmung*. Wir werden gleich sehen, daß diese Eigenschaft charakteristisch ist für das ganze Problem.

2. Zunächst beweise ich den im folgenden notwendigen, aber auch für sich Interesse verdienenden

Satz. *Jede topologische richtungstreue Abbildung zweier schlichtanalytischer Kurvenbögen mit nicht verschwindender Krümmung aufeinander ist eine analytische Abbildung.*

Beweis. Die beiden Kurvenbögen seien durch

$$\begin{aligned} z_1 &= g_1(\xi_1), \\ z_2 &= g_2(\xi_2) \end{aligned} \tag{8}$$

dargestellt[2]). Wenn z_1 und z_2 entsprechende Punkte sein sollen, so muß

$$\arc g_1'(\xi_1) = \arc g_2'(\xi_2) \tag{9}$$

sein. Da diese Beziehung zwischen ξ_1 und ξ_2 (für $0 \leqq \xi_1 \leqq 1$, $0 \leqq \xi_2 \leqq 1$) eine umkehrbar eindeutige sein soll, und da die ersten Ableitungen der in (9) stehenden analytischen Funktionen wegen der nicht verschwindenden Krümmungen der beiden Kurvenbögen in den obigen Intervallen nicht verschwinden, so läßt sich ξ_2 als eindeutige schlichte analytische Funktion von ξ_1 darstellen, woraus sich mit Hilfe von (8) eine schlichte analytische Abbildung der beiden Kurvenbögen aufeinander herleiten läßt, welche mit der gegebenen topologischen richtungstreuen Abbildung identisch ist. Hieraus folgt auch, daß es nur eine einzige solche richtungstreue Abbildung geben kann.

3. Nun zeige ich noch folgendes:

Es sei in der z-Ebene irgendein schlicht-analytischer Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ *mit nicht verschwindender Krümmung vorgegeben. Dann gibt es, von einem konstanten Faktor abgesehen, eine einzige darauf eindeutige analytische Funktion* $f(z)$, *welche* (1) *erfüllt.* Ich nehme zunächst einen Teilbogen $\mathfrak{C}^*$ von $\mathfrak{C}$, dessen Gesamtkrümmung kleiner ist als 2π. Diesen Teilbogen $\mathfrak{C}^*$ kann ich topologisch und richtungstreu abbilden auf einen Teilbogen $\mathfrak{B}^*$ des Kreises $|w| = 1$ (das ϱ in **1.** ist hier $= 1$ gesetzt, womit der willkürliche konstante Faktor von $f(z)$ dem absoluten Betrage nach festgelegt ist; bzgl. des Arguments dieses Faktors vgl. die Normierung in Fußnote [1]). Nach **2.** gibt es nur *eine* solche Abbildung, und diese ist analytisch; sie sei

$$w = \Phi(z).$$

Nach den Ausführungen in **1.** hat $\Phi(z)$ auf $\mathfrak{C}^*$ den absoluten Betrag 1, und $\frac{\Phi'}{|\Phi'|}$ ist konstant. Daher ist

$$\frac{1}{\Phi(z)} = f^*(z)$$

eine, aber auch die einzige auf $\mathfrak{C}^*$ eindeutige analytische Funktion, welche (1) mit $\mathfrak{C}^*$ erfüllt. Durch Überdeckung von $\mathfrak{C}$ mit einer Reihe von Teilbögen $\mathfrak{C}_\nu^*$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), von denen jeder eine Gesamtkrümmung $< 2\pi$ hat, erhält man zunächst zu jedem Teilbogen $\mathfrak{C}_\nu^*$ ein $f_\nu^*(z)$. Aber $f_\nu^*(z)$ und $f_\mu^*(z)$ müssen auf dem $\mathfrak{C}_\nu^*$ und $\mathfrak{C}_\mu^*$ gemeinsamen Bogen identisch sein. Die $f_\nu^*(z)$ gehen also auseinander hervor durch analytische Fortsetzung längs $\mathfrak{C}$. Damit sind wir fertig [3]).

Nun noch zwei nicht triviale Beispiele:

1. $f(z) = \frac{1}{z}$, $\mathfrak{C}$ ein Teilbogen von $|z| = 1$. Dies ergibt sich aus Fall a) in **1.**

2. $f(z) = e^{\frac{i-1}{2}\log z}$, und $\mathfrak{C}$ ein Teilbogen der logarithmischen Spirale $r = e^{-\vartheta}$ ($z = r e^{i\vartheta}$). Dies erhält man für $\chi(w) = (1+i)\, e^{i \log w}$ (abgesehen von unwesentlichen Konstanten ein Beispiel von Fall b) in **1.**).

---

[3]) Bei diesem Beweis wird von der Schlichtheit der Kurve $\mathfrak{C}$ nur die Schlichtheit „im Kleinen" benutzt. Denkt man sich aber den Kurvenbogen $\mathfrak{C}$ in einer geeigneten Riemannschen Fläche eingebettet, so gilt das in **3.** Behauptete ganz allgemein für *im Kleinen schlicht-analytische Kurvenbögen von nicht verschwindender Krümmung.*

München, Mathematisches Seminar, 10. Februar 1932.

(Eingegangen am 17. Februar 1932.)

Über das Minimum positiver Hermitescher Formen.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Einleitung.

Im folgenden werden konjugiert-komplexe Zahlen in üblicher Weise durch Überstreichen bezeichnet. Sei

$$F(x, y; \bar{x}, \bar{y}) = a x \bar{x} + b x \bar{y} + \bar{b} y \bar{x} + c y \bar{y} \tag{1}$$

eine positiv definite Hermitesche Form, also a und c reell und außerdem

$$a > 0, \quad c > 0, \quad a c - b \bar{b} > 0. \tag{2}$$

Aus den Identitäten

$$\begin{aligned} a F(x, y; \bar{x}, \bar{y}) &= (a x + \bar{b} y)(a \bar{x} + b \bar{y}) + (a c - b \bar{b}) y \bar{y} \\ &= |a x + \bar{b} y|^2 + (a c - b \bar{b}) |y|^2, \\ c F(x, y; \bar{x}, \bar{y}) &= (b x + c y)(\bar{b} \bar{x} + c \bar{y}) + (a c - b \bar{b}) x \bar{x} \\ &= |b x + c y|^2 + (a c - b \bar{b}) |x|^2 \end{aligned}$$

folgt durch Addition

$$(a + c) F(x, y; \bar{x}, \bar{y}) \geqq (a c - b \bar{b})(|y|^2 + |x|^2).$$

Wenn daher die Variabeln x, y alle ganzen Zahlen eines imaginären quadratischen Zahlenkörpers $\mathfrak{k}$ durchlaufen mit Ausnahme des Paares $(x, y) = (0, 0)$, so findet die Ungleichung $F(x, y; \bar{x}, \bar{y}) < M$ bei beliebig vorgegebenem M nur für endlich viele Paare (x, y) statt, und folglich hat $F(x, y; \bar{x}, \bar{y})$ ein bestimmtes Minimum. Für die Körper $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i)$ und $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i\sqrt{3})$ hat Herr Speiser kürzlich gezeigt[1]), daß dieses Minimum, wenn man alle unendlich

[1]) A. Speiser, Über die Minima Hermitescher Formen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 167 (1932), S. 88—97.

vielen Formen der gleichen Determinante $ac - b\bar{b} = \Delta$ betrachtet, eine endliche obere Grenze hat, die nur bei ganz bestimmten angegebenen Formen erreicht wird. Herr Speiser bedient sich dabei einer eigenartigen (bei beiden Körpern verschiedenen) Kugelteilung des Raumes, die im Fall $\mathfrak{K}(i)$ auch schon von Herrn Ford angegeben und zu anderen Zwecken benutzt worden ist[2]).

Im folgenden wird das Problem nach einer viel einfacheren Methode behandelt, und zwar ganz einheitlich für diejenigen fünf Körper, in welchen sich der Euklidische Algorithmus durchführen läßt, das sind die Körper[3])

$$(3) \qquad \mathfrak{K}(i), \quad \mathfrak{K}(i\sqrt{2}), \quad \mathfrak{K}(i\sqrt{3}), \quad \mathfrak{K}(i\sqrt{7}), \quad \mathfrak{K}(i\sqrt{11}).$$

Die Methode beruht ebenso wie der Euklidische Algorithmus auf dem Satz, daß jede komplexe Zahl von der nächstgelegenen ganzen Zahl des betreffenden Körpers einen Abstand kleiner als 1 hat. Die Methode läßt sich aber mit geringer Modifikation auch auf andere Körper der Klassenzahl 1, in denen also jedes Ideal ein Hauptideal ist, anwenden, wie ich am Beispiel des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{19})$ zeigen werde. Für diesen Körper gilt der obige Satz nicht, wohl aber werden wir den folgenden Satz beweisen und benutzen, auf den sich auch ein modifizierter Euklidischer Algorithmus und im Verein mit dem Umstand, daß 2 Primideal ist, ein Beweis dafür gründen ließe, daß jedes Ideal ein Hauptideal ist:

Jede komplexe Zahl ϱ hat die Eigenschaft, daß von den Zahlen ϱ, 2ϱ wenigstens eine von der nächstgelegenen ganzen Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{19})$ einen Abstand kleiner als 1 hat[4]).

§ 2.

Die für alle Körper gemeinsame Grundlage der Minimumsbestimmung.

Sei $\mathfrak{k}$ ein imaginärer quadratischer Körper, in dem jedes Ideal Hauptideal ist, z. B. einer der fünf in (3) angegebenen Körper oder der Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{19})$. Zwei Hermitesche Formen heißen äquivalent (in bezug auf $\mathfrak{k}$), wenn die eine durch eine lineare Transformation

$$x \to \alpha x + \beta y, \quad y \to \gamma x + \delta y,$$

---

[2]) L. R. Ford, On the closeness of approach of complex rational fractions to a complex irrational number, Transactions of the American mathematical society 27 (1925), S. 146—154.

[3]) Vgl. L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich und Leipzig 1927, S. 151.

[4]) Über einen derart modifizierten Euklidischen Algorithmus vergleiche man die Arbeit von H. Hasse: Über eindeutige Zerlegung in Primelemente oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 159 (1928), S. 3—12.

also auch

$$\bar{x} \to \bar{\alpha}\bar{x} + \bar{\beta}\bar{y}, \quad \bar{y} \to \bar{\gamma}\bar{x} + \bar{\delta}\bar{y}$$

in die andere übergeht, wobei α, β, γ, δ ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{k}$ mit der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sind. Äquivalente Formen stellen augenscheinlich, wenn die Variabeln x, y alle ganzen Zahlen aus $\mathfrak{k}$ durchlaufen, die gleichen Zahlen dar und haben daher dasselbe Minimum.

Ist das Minimum der Form (1) gleich m und wird es etwa durch die Zahlen $x = \alpha$, $y = \gamma$ dargestellt, so daß

$$a\alpha\bar{\alpha} + b\alpha\bar{\gamma} + \bar{b}\gamma\bar{\alpha} + c\gamma\bar{\gamma} = m$$

ist, so sind α und γ gewiß relativ prim; denn hätten sie einen größten gemeinsamen Teiler ϱ, der keine Einheit ist, so wäre $|\varrho| > 1$, und die ganzen Zahlen $x = \frac{\alpha}{\varrho}$, $y = \frac{\gamma}{\varrho}$ würden der Form einen kleineren Wert als m erteilen. Es gibt also in $\mathfrak{k}$ zwei ganze Zahlen β, δ, so daß

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist. Dann geht aber die Form durch die Transformation

$$x \to \alpha x + \beta y, \quad y \to \gamma x + \delta y$$

in eine äquivalente über, deren erster Koeffizient gleich dem Minimum m ist. Wir dürfen und wollen daher annehmen, daß von vornherein in der Form (1) der erste Koeffizient a gleich dem Minimum ist.

Ist sodann (x, y) ein von $(0, 0)$ verschiedenes Paar ganzer Zahlen aus $\mathfrak{k}$, so muß

$$a \leqq a x\bar{x} + b x\bar{y} + \bar{b} y\bar{x} + c y\bar{y}$$

sein, oder mit leichter Umformung der rechten Seite:

$$a \leqq a\left|x + \frac{\bar{b}}{a}y\right|^2 + \frac{\Delta}{a}|y|^2, \tag{4}$$

wobei Δ die nach Voraussetzung positive Determinante

$$\Delta = ac - b\bar{b} \tag{5}$$

bedeutet. Aus (4) folgt durch Multiplikation mit a:

$$a^2\left(1 - \left|x + \frac{\bar{b}}{a}y\right|^2\right) \leqq \Delta|y|^2. \tag{6}$$

Nun handelt es sich einfach darum, x und y als ganze Zahlen aus $\mathfrak{k}$ so zu wählen, daß nicht beide verschwinden und daß $\left|x + \frac{\bar{b}}{a}y\right| < 1$ wird. Dann ergibt sich aus (6), indem man durch die Größe in der Klammer dividiert und die Quadratwurzel zieht, eine Abschätzung für das Minimum a.

§ 3.

Die Körper $\mathfrak{K}(i)$ und $\mathfrak{K}(i\sqrt{2})$.

Wir fassen die beiden Körper der Überschrift zusammen in der Bezeichnung $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$, wo also $D=1$ oder 2 ist. Die ganzen Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ sind die Zahlen der Form $p+qi\sqrt{D}$, wo p, q ganze rationale Zahlen sind; sie bilden in der komplexen Zahlenebene die Eckpunkte eines Netzes von Rechtecken mit der Grundlinie 1 und der Höhe $\sqrt{D}$. Daraus ergibt sich, daß jede komplexe Zahl ϱ von der nächstgelegenen ganzen Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ einen Abstand hat, der $\leqq \frac{1}{2}\sqrt{1+D}$ ist; und zwar gilt Gleichheit nur, wenn ϱ im Mittelpunkt eines Rechtecks liegt, also die Gestalt

$$\varrho = g + \frac{1+i\sqrt{D}}{2}$$

hat, wo g eine ganze Zahl aus $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$. Wählt man daher in (6) für y die Zahl -1, so läßt sich x so bestimmen, daß

$$\left|x+\frac{\bar{b}}{a}y\right| = \left|x-\frac{\bar{b}}{a}\right| \leqq \tfrac{1}{2}\sqrt{1+D}$$

ist, und zwar gilt Gleichheit nur für

$$\frac{\bar{b}}{a} = g + \frac{1+i\sqrt{D}}{2}.$$

Aus (6) folgt daher

$$a^2\left(1-\frac{1+D}{4}\right) \leqq \Delta,$$

also

$$a \leqq \sqrt{\frac{4\Delta}{3-D}};$$

und zwar gilt Gleichheit allenfalls, wenn

$$a = \sqrt{\frac{4\Delta}{3-D}}, \quad \frac{\bar{b}}{a} = g + \frac{1+i\sqrt{D}}{2},$$

also

$$b = \sqrt{\frac{4\Delta}{3-D}}\left(\bar{g} + \frac{1-i\sqrt{D}}{2}\right),$$

$$c = \frac{\Delta + b\bar{b}}{a} = \frac{\Delta + \frac{4\Delta}{3-D}\left(\bar{g}+\frac{1-i\sqrt{D}}{2}\right)\left(g+\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)}{\sqrt{\frac{4\Delta}{3-D}}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\Delta}{3-D}}\left(g\bar{g} + \frac{1-i\sqrt{D}}{2}g + \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\bar{g} + 1\right)$$

ist. Die Hermitesche Form ist dann die folgende:

$$\sqrt{\frac{4\Delta}{3-D}}\Big[x\bar{x}+\Big(\bar{g}+\frac{1-i\sqrt{D}}{2}\Big)x\bar{y}+\Big(g+\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\Big)y\bar{x}$$
$$+\Big(g\bar{g}+\frac{1-i\sqrt{D}}{2}g+\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\bar{g}+1\Big)y\bar{y}\Big]$$
$$=\sqrt{\frac{4\Delta}{3-D}}\Big[(x+gy)(\bar{x}+\bar{g}\,\bar{y})+\frac{1-i\sqrt{D}}{2}(x+gy)\bar{y}$$
$$+\frac{1+i\sqrt{D}}{2}y(\bar{x}+\bar{g}\,\bar{y})+y\bar{y}\Big].$$

Sie erweist sich durch die Transformation

$$x+gy\to x,\ y\to y$$

als äquivalent mit

$$\sqrt{\frac{4\Delta}{3-D}}\Big(x\bar{x}+\frac{1-i\sqrt{D}}{2}x\bar{y}+\frac{1+i\sqrt{D}}{2}y\bar{x}+y\bar{y}\Big)$$
$$=\sqrt{\frac{4\Delta}{3-D}}\Big(x\bar{x}+\frac{x\bar{y}+\bar{x}y}{2}-i\sqrt{D}\,\frac{x\bar{y}-\bar{x}y}{2}+y\bar{y}\Big).$$

Diese Form kann aber wirklich durch keine zulässige Wahl von x, y kleiner als $\sqrt{\frac{4\Delta}{3-D}}$ gemacht werden. Denn da im Körper $\mathfrak{R}(i\sqrt{D})$ die Summe und Differenz von zwei konjugiert-komplexen ganzen Zahlen stets durch 2 teilbar ist, so ist die Größe in der Klammer, wie die zweite Darstellung zeigt, stets eine ganze Zahl, also, da sie reell und positiv ist, mindestens gleich 1. Somit ergibt sich der

Satz 1. *Für den Körper $\mathfrak{R}(i\sqrt{D})$, wo D gleich* 1 *oder* 2 *ist, ist das Minimum jeder positiv definiten Hermiteschen Form der Determinante Δ kleiner oder gleich $\sqrt{\frac{4\Delta}{3-D}}$, und zwar gleich nur bei den mit*

$$\sqrt{\frac{4\Delta}{3-D}}\Big(x\bar{x}+\frac{1-i\sqrt{D}}{2}x\bar{y}+\frac{1+i\sqrt{D}}{2}y\bar{x}+y\bar{y}\Big)$$

äquivalenten Formen.

Für $D=1$ ist die Ausnahmsform die folgende:

$$\sqrt{2\Delta}\Big(x\bar{x}+\frac{1-i}{2}x\bar{y}+\frac{1+i}{2}y\bar{x}+y\bar{y}\Big);$$

sie geht durch die Äquivalenztransformation

$$x\to x-(1+i)y,\ y\to y$$

über in die von Herrn Speiser angegebene Form

$$\sqrt{2\Delta}\Big(x\bar{x}-\frac{1-i}{2}x\bar{y}-\frac{1+i}{2}y\bar{x}+y\bar{y}\Big).$$

§ 4.

Die Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{3})$, $\mathfrak{K}(i\sqrt{7})$, $\mathfrak{K}(i\sqrt{11})$.

Bedeutet diesmal D eine der drei Zahlen 3, 7, 11, so sind die ganzen Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ die Zahlen der Form $p+q\frac{1+i\sqrt{D}}{2}$, wo p, q ganze rationale Zahlen sind, oder, was damit gleichbedeutend ist, die Zahlen der Form

$$r\frac{1+i\sqrt{D}}{2}+s\frac{1-i\sqrt{D}}{2},$$

wo r, s ebenfalls ganze rationale Zahlen sind. In der komplexen Zahlenebene sind sie die Eckpunkte eines rhombischen Netzes. In Fig. 1 ist ein solcher Rhombus gezeichnet; seine Ecken sind

$$g,\ g+1,\ g+\frac{1+i\sqrt{D}}{2},\ g+\frac{1-i\sqrt{D}}{2},$$

Fig. 1.

wo g irgendeine ganze Zahl aus $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ sein kann. Die Diagonalen haben die Länge 1 und $\sqrt{D}$. Durch die kürzere Diagonale wird der Rhombus in zwei Dreiecke geteilt, von denen jedes durch die drei Mittellote, die sich im Mittelpunkt des Umkreises treffen, in drei Vierecke zerlegt ist. Die Mittelpunkte der beiden Umkreise stellen die Zahlen

$$g+\frac{1}{2}\pm i\frac{D-1}{4\sqrt{D}} \tag{7}$$

dar, und die Radien sind gleich $\frac{D+1}{4\sqrt{D}}$. Daraus ersieht man, daß jeder Punkt im Innern oder auf dem Rand eines der Dreiecke vom nächstgelegenen Eckpunkt, also schließlich jede komplexe Zahl ϱ von der nächstgelegenen ganzen Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ einen Abstand hat, der

$$\leqq\frac{D+1}{4\sqrt{D}}$$

ist; und zwar gilt Gleichheit nur, wenn ϱ von der Form (7) ist.

Wählt man daher in Formel (6) für y die Zahl -1, so läßt sich x so bestimmen, daß

$$\left|x+\frac{\bar{b}}{a}y\right|=\left|x-\frac{\bar{b}}{a}\right|\leqq\frac{D+1}{4\sqrt{D}}$$

ist; und zwar gilt Gleichheit nur für

$$\frac{\bar{b}}{a}=g+\frac{1}{2}\pm i\frac{D-1}{4\sqrt{D}}=h\mp i\frac{D+1}{4\sqrt{D}},$$

wo dann $h=g+\frac{1\pm i\sqrt{D}}{2}$ ebenfalls eine ganze Zahl aus $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ ist. Aus (6)

folgt alsdann

$$a^2\left[1-\left(\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\right)^2\right] \leqq \Delta;$$

also, wenn man beachtet, daß die Zahl in der eckigen Klammer für $D = 3, 7, 11$ positiv ist,

$$a \leqq \sqrt{\frac{16\,D\,\Delta}{14\,D-D^2-1}}.$$

Dabei gilt Gleichheit allenfalls, wenn

$$a = \sqrt{\frac{16\,D\,\Delta}{14\,D-D^2-1}}, \qquad \frac{\bar{b}}{a} = h \mp i\frac{D+1}{4\sqrt{D}},$$

also

$$b = \sqrt{\frac{16\,D\,\Delta}{14\,D-D^2-1}}\left(\bar{h} \pm i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\right),$$

$$c = \frac{\Delta + b\bar{b}}{a} = \frac{\Delta + \frac{16\,D\,\Delta}{14\,D-D^2-1}\left(\bar{h} \pm i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\right)\left(h \mp i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\right)}{\sqrt{\frac{16\,D\,\Delta}{14\,D-D^2-1}}}$$

$$= \sqrt{\frac{16\,D\,\Delta}{14\,D-D^2-1}}\left(h\bar{h} \pm i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}h \mp i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\bar{h} + 1\right)$$

ist. Die Hermitesche Form ist dann die folgende:

$$\sqrt{\frac{16\,D\,\Delta}{14\,D-D^2-1}}\left[x\bar{x} + \left(\bar{h} \pm i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\right)x\bar{y} + \left(h \mp i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\right)y\bar{x}\right.$$

$$\left. + \left(h\bar{h} \pm i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}h \mp i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\bar{h} + 1\right)y\bar{y}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{16\,D\,\Delta}{14\,D-D^2-1}}\left[(x+hy)(\bar{x}+\bar{h}\,\bar{y}) \pm i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}(x+hy)\,\bar{y}\right.$$

$$\left. \mp i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}y(\bar{x}+\bar{h}\,\bar{y}) + y\,\bar{y}\right].$$

Sie erweist sich durch die Transformation

$$x + hy \to x, \qquad y \to y$$

als äquivalent mit

$$\sqrt{\frac{16\,D\,\Delta}{14\,D-D^2-1}}\left(x\bar{x} \pm i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}x\bar{y} \mp i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}y\bar{x} + y\bar{y}\right).$$

Diese Form kann aber wirklich durch keine zulässige Wahl von x, y kleiner als $\sqrt{\frac{16\,D\,\Delta}{14\,D-D^2-1}}$ gemacht werden. Denn setzt man für x, y irgendwelche ganzen Zahlen aus $\mathfrak{R}(i\sqrt{D})$, so geht die Größe in der Klammer, da $\frac{D+1}{4}$

ganzzahlig ist, nach Multiplikation mit $i\sqrt{D}$ in eine ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ über. Die Klammergröße hat daher die Gestalt

$$\frac{p+q\frac{1+i\sqrt{D}}{2}}{i\sqrt{D}};$$

da sie reell ist, muß $q=-2p$ sein, und für die Klammergröße ergibt sich dann der Wert $-p$. Sie ist also eine ganze rationale Zahl, und da sie für $(x,y)\neq(0,0)$ nur positiv sein kann, ist sie $\geqq 1$. Somit ergibt sich der

Satz 2. *Für den Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$, wo D gleich* 3 *oder* 7 *oder* 11 *ist, ist das Minimum jeder positiv definiten Hermiteschen Form der Determinante Δ kleiner oder gleich*

$$\sqrt{\frac{16D\Delta}{14D-D^2-1}},$$

und zwar gleich nur bei den Formen, die mit einer der beiden folgenden äquivalent sind:

$$\sqrt{\frac{16D\Delta}{14D-D^2-1}}\left(x\bar{x}\pm i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}x\bar{y}\mp i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}y\bar{x}+y\bar{y}\right).$$

Die beiden hier durch das Vorzeichen der mittleren Glieder unterschiedenen Formen sind uneigentlich miteinander äquivalent, indem sie durch die Transformation mit der Determinante -1

$$x\to x,\quad y\to -y$$

ineinander übergehen. Eigentlich äquivalent sind sie nicht. Denn wenn

$$\begin{aligned}(\alpha x+\beta y)(\bar{\alpha}\bar{x}+\bar{\beta}\bar{y})+i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}(\alpha x+\beta y)(\bar{\gamma}\bar{x}+\bar{\delta}\bar{y})\\ -i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}(\gamma x+\delta y)(\bar{\alpha}\bar{x}+\bar{\beta}\bar{y})+(\gamma x+\delta y)(\bar{\gamma}\bar{x}+\bar{\delta}\bar{y})\\ =x\bar{x}-i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}x\bar{y}+i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}y\bar{x}+y\bar{y}\end{aligned}$$

und zugleich $\alpha\delta-\beta\gamma=+1$ wäre, so ergäbe sich durch Koeffizientenvergleichung u. a.:

$$\alpha\bar{\alpha}+i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\alpha\bar{\gamma}-i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\gamma\bar{\alpha}+\gamma\bar{\gamma}=1,$$

$$\alpha\bar{\beta}+i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\alpha\bar{\delta}-i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\gamma\bar{\beta}+\gamma\bar{\delta}=-i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}.$$

Hieraus würden sich, wenn man die erste Gleichung mit $-\bar{\beta}$ bzw. $\bar{\delta}$ und die zweite mit $\bar{\alpha}$ bzw. $-\bar{\gamma}$ multiplizierte und dann beide addierte, die

beiden Gleichungen

$$i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\alpha+\gamma=-\bar{\beta}-i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\bar{\alpha},$$

$$\alpha-i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\gamma=\bar{\delta}+i\frac{D+1}{4\sqrt{D}}\bar{\gamma}$$

ergeben, oder nach leichter Umformung:

$$\frac{D+1}{4}(\alpha+\bar{\alpha})=i\sqrt{D}(\gamma+\beta),$$

$$\frac{D+1}{4}(\gamma+\bar{\gamma})=i\sqrt{D}(\bar{\delta}-\alpha).$$

Sonach wären die ganzen Zahlen $\alpha+\bar{\alpha}$, $\gamma+\bar{\gamma}$ durch $i\sqrt{D}$ teilbar; aber auch die Zahlen $\alpha-\bar{\alpha}, \gamma-\bar{\gamma}$ wären als rein imaginäre ganze Zahlen des Körpers $\Re(i\sqrt{D})$ durch $i\sqrt{D}$ teilbar. Daher wären auch 2α und 2γ und folglich auch die Zahl $2(\alpha\delta-\beta\gamma)=2$ durch $i\sqrt{D}$ teilbar, was offenbar nicht der Fall ist.

Speziell für $D=3$ ist die Ausnahmsform von Satz 2 die folgende:

$$\sqrt{\frac{3\Delta}{2}}\left(x\bar{x}\pm\frac{i}{\sqrt{3}}x\bar{y}\mp\frac{i}{\sqrt{3}}y\bar{x}+y\bar{y}\right).$$

Sie geht durch die Äquivalenztransformation

$$x\to\frac{-1\mp i\sqrt{3}}{2}x,\qquad y\to\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}y$$

über in die von Herrn Speiser angegebene Form

$$\sqrt{\frac{3\Delta}{2}}\left(x\bar{x}-\frac{3\pm i\sqrt{3}}{6}x\bar{y}-\frac{3\mp i\sqrt{3}}{6}y\bar{x}+y\bar{y}\right).$$

§ 5.

Der Körper $\Re(i\sqrt{19})$.

Die ganzen Zahlen des Körpers $\Re(i\sqrt{19})$ sind die Zahlen der Form

$$p+q\frac{1+i\sqrt{19}}{2},$$

wo p und q ganze rationale Zahlen sind. Sie bilden in der komplexen Zahlenebene die Eckpunkte eines Parallelogrammnetzes. In Fig. 2 ist ein Parallelogramm des Netzes gezeichnet; die Ecken A, B, C, D entsprechen den ganzen Zahlen

$$g,\ g+1,\ g+\frac{1+i\sqrt{19}}{2},\qquad g+1+\frac{1+i\sqrt{19}}{2},$$

so daß die Grundlinie gleich 1 und die Höhe gleich $\frac{\sqrt{19}}{2}$ ist. Jede komplexe Zahl ϱ liegt in einem solchen Parallelogramm, wenn wir die Begrenzung mit dazurechnen.

Wir teilen das Parallelogramm durch zwei Parallele zur Grundlinie AB in drei kleinere Parallelogramme $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ (siehe Fig. 2), und zwar soll die Höhe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ gleich $\frac{7}{2\sqrt{19}}$ sein, so daß für die Höhe von $\mathfrak{B}$ noch

$$\frac{\sqrt{19}}{2} - 2 \cdot \frac{7}{2\sqrt{19}} = \frac{5}{2\sqrt{19}}$$

übrigbleibt. Die untere und obere Randlinie von $\mathfrak{B}$ rechnen wir nicht zu $\mathfrak{B}$, sondern zu $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{C}$. Auf diesen Randlinien sind die Punkte E und F verzeichnet, die den Zahlen

$$g + \frac{1}{2} + \frac{7i}{2\sqrt{19}} \quad \text{bzw.} \quad g + 1 + \frac{12i}{2\sqrt{19}}$$

entsprechen. Schließlich sind in der Figur noch drei Punkte ohne Benennung verzeichnet, nämlich die Mittelpunkte von AC, AD, BD; sie entsprechen den drei Zahlen

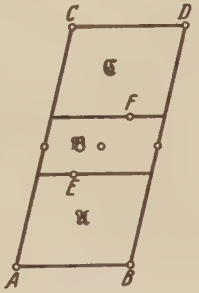


Fig. 2.

$$(8) \qquad g + \frac{1+i\sqrt{19}}{4}, \qquad g + \frac{1}{2} + \frac{1+i\sqrt{19}}{4}, \qquad g + 1 + \frac{1+i\sqrt{19}}{4},$$

welche die Hälften von ganzen Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{19})$ sind.

Wenn nun eine komplexe Zahl ϱ in $\mathfrak{A}$ liegt, so ist die nächstgelegene ganze Zahl h entweder g oder $g+1$, und für die Differenz ergibt sich aus der Figur die Abschätzung

$$|\varrho - h|^2 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2\sqrt{19}}\right)^2 = \frac{17}{19};$$

und zwar gilt Gleichheit nur, wenn ϱ im Punkt E liegt, also für

$$\varrho = g + \frac{1}{2} + \frac{7i}{2\sqrt{19}}.$$

Wenn dagegen ϱ in $\mathfrak{C}$ liegt, so ist die nächstgelegene ganze Zahl h entweder

$$g + \frac{1+i\sqrt{19}}{2} \quad \text{oder} \quad g + 1 + \frac{1+i\sqrt{19}}{2},$$

und für die Differenz ergibt sich wieder die Abschätzung

$$|\varrho - h|^2 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2\sqrt{19}}\right)^2 = \frac{17}{19};$$

und zwar gilt Gleichheit nur, wenn ϱ im Punkt F liegt, also für

$$\varrho = g + 1 + \frac{12i}{2\sqrt{19}} = g_1 + \frac{1}{2} - \frac{7i}{2\sqrt{19}},$$

wo auch $g_1 = g + \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$ eine ganze Zahl aus $\mathfrak{K}(i\sqrt{19})$ ist.

Wenn schließlich ϱ in $\mathfrak{B}$ liegt, so entspricht der nächstgelegenen Hälfte einer ganzen Zahl h einer der drei Punkte, die in Fig. 2 ohne Benennung verzeichnet sind, so daß $\frac{h}{2}$ eine der drei Zahlen (8) ist. Für die Differenz ergibt sich aus der Figur die Abschätzung

$$\left|\varrho - \frac{h}{2}\right|^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4\sqrt{19}}\right)^2 = \frac{11}{4 \cdot 19},$$

oder also

$$|2\varrho - h|^2 < \frac{11}{19},$$

und zwar mit Ausschluß von Gleichheit, weil die untere und obere Randlinie von $\mathfrak{B}$ nicht zu $\mathfrak{B}$ gerechnet werden.

Nun knüpfen wir wieder an die Formel (6) an. Wenn die Zahl $\frac{\bar{b}}{a}$ im Bereich $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C}$ liegt, wählen wir $y = -1$ und können dann nach dem Bewiesenen für x eine solche ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{R}(i\sqrt{19})$ bestimmen, daß

$$\left|x + \frac{\bar{b}}{a} y\right|^2 = \left|x - \frac{\bar{b}}{a}\right|^2 \leqq \frac{17}{19}$$

ist; und zwar gilt Gleichheit nur, wenn $\frac{\bar{b}}{a}$ die Form

$$\frac{\bar{b}}{a} = g + \frac{1}{2} \pm \frac{7i}{2\sqrt{19}}$$

hat, wo g eine ganze Zahl aus $\mathfrak{R}(i\sqrt{19})$ ist. Aus (6) folgt dann $\frac{2}{19} a^2 \leqq \Delta$, also

$$a \leqq \sqrt{\frac{19\Delta}{2}}; \tag{9}$$

und zwar gilt Gleichheit nur für

$$a = \sqrt{\frac{19\Delta}{2}}, \qquad \frac{\bar{b}}{a} = g + \frac{1}{2} \pm \frac{7i}{2\sqrt{19}} = h \mp \frac{6i}{\sqrt{19}}, \tag{10}$$

wo auch $h = g + \frac{1 \pm i\sqrt{19}}{2}$ eine ganze Zahl aus $\mathfrak{R}(i\sqrt{19})$ ist.

Wenn dagegen die Zahl $\frac{\bar{b}}{a}$ im Bereich $\mathfrak{B}$ liegt, wählen wir $y = -2$ und können dann nach dem Bewiesenen für x eine solche ganze Zahl aus $\mathfrak{R}(i\sqrt{19})$ wählen, daß

$$\left|x + \frac{\bar{b}}{a} y\right|^2 = \left|x - 2\frac{\bar{b}}{a}\right|^2 < \frac{11}{19}$$

ist. Aus (6) folgt dann $\frac{8}{19} a^2 < 4\Delta$, also

$$a < \sqrt{\frac{19\Delta}{2}}.$$

Somit findet man dieselbe Schranke wie in (9), jedoch mit Ausschluß der Gleichheit. Daher gilt für das Minimum a der Hermiteschen Form immer die Abschätzung (9), und zwar Gleichheit allenfalls dann, wenn der Fall (10) vorliegt, wenn also

$$a = \sqrt{\frac{19\,\Delta}{2}}, \qquad b = \sqrt{\frac{19\,\Delta}{2}}\left(\bar{h} \pm \frac{6\,i}{\sqrt{19}}\right)$$

und folglich

$$c = \frac{\Delta + b\bar{b}}{a} = \frac{\Delta + \frac{19\,\Delta}{2}\left(\bar{h} \pm \frac{6\,i}{\sqrt{19}}\right)\left(h \mp \frac{6\,i}{\sqrt{19}}\right)}{\sqrt{\frac{19\,\Delta}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{19\,\Delta}{2}}\left(h\bar{h} \pm \frac{6\,i}{\sqrt{19}}h \mp \frac{6\,i}{\sqrt{19}}\bar{h} + 2\right)$$

ist. Die Hermitesche Form ist dann die folgende:

$$\sqrt{\frac{19\,\Delta}{2}}\left[x\bar{x} + \left(\bar{h} \pm \frac{6\,i}{\sqrt{19}}\right)x\bar{y} + \left(h \mp \frac{6\,i}{\sqrt{19}}\right)y\bar{x} + \left(h\bar{h} \pm \frac{6\,i}{\sqrt{19}}h \mp \frac{6\,i}{\sqrt{19}}\bar{h} + 2\right)y\bar{y}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{19\,\Delta}{2}}\left[(x + h\,y)(\bar{x} + \bar{h}\,\bar{y}) \pm \frac{6\,i}{\sqrt{19}}(x + h\,y)\,\bar{y} \mp \frac{6\,i}{\sqrt{19}}y(\bar{x} + \bar{h}\,\bar{y}) + 2\,y\,\bar{y}\right]$$

und daher vermöge der Transformation

$$x + h\,y \to x, \qquad y \to y$$

äquivalent mit

$$\sqrt{\frac{19\,\Delta}{2}}\left(x\bar{x} \pm \frac{6\,i}{\sqrt{19}}x\bar{y} \mp \frac{6\,i}{\sqrt{19}}y\bar{x} + 2\,y\,\bar{y}\right).$$

Das Minimum dieser Form ist aber auch wirklich nicht kleiner als $\sqrt{\frac{19\,\Delta}{2}}$. Denn setzt man für x, y irgendwelche ganzen Zahlen aus $\mathfrak{R}(i\sqrt{19})$, so geht die Größe in der Klammer nach Multiplikation mit $i\sqrt{19}$ in eine ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{R}(i\sqrt{19})$ über. Die Klammergröße hat also die Gestalt

$$\frac{p + q\frac{1 + i\sqrt{19}}{2}}{i\sqrt{19}};$$

da sie reell ist, muß $q = -2p$ sein, und für die Klammergröße ergibt sich dann der Wert $-p$. Sie ist also eine ganze rationale Zahl, und da sie für $(x, y) \neq (0, 0)$ nur positiv sein kann, ist sie $\geqq 1$. Somit ergibt sich der

Satz 3. *Für den Körper $\mathfrak{R}(i\sqrt{19})$ ist das Minimum jeder positiv definiten Hermiteschen Form der Determinante Δ kleiner oder gleich $\sqrt{\frac{19\,\Delta}{2}}$, und zwar gleich nur bei den Formen, die mit einer der beiden folgenden*

äquivalent sind:

$$\sqrt{\frac{19\Delta}{2}}\left(x\bar{x} \pm \frac{6i}{\sqrt{19}}x\bar{y} \mp \frac{6i}{\sqrt{19}}y\bar{x} + 2y\bar{y}\right).$$

Die beiden hier durch das Vorzeichen der mittleren Glieder unterschiedenen Formen sind uneigentlich miteinander äquivalent, indem sie durch die Transformation mit der Determinante -1

$$x \to x, \quad y \to -y$$

ineinander übergehen. Eigentlich äquivalent sind sie nicht. Denn wenn

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y)(\bar{\alpha}\bar{x} + \bar{\beta}\bar{y}) + \frac{6i}{\sqrt{19}}(\alpha x + \beta y)(\bar{\gamma}\bar{x} + \bar{\delta}\bar{y})\\ - \frac{6i}{\sqrt{19}}(\gamma x + \delta y)(\bar{\alpha}\bar{x} + \bar{\beta}\bar{y}) + 2(\gamma x + \delta y)(\bar{\gamma}\bar{x} + \bar{\delta}\bar{y})\\ = x\bar{x} - \frac{6i}{\sqrt{19}}x\bar{y} + \frac{6i}{\sqrt{19}}y\bar{x} + 2y\bar{y}\end{aligned}$$

und zugleich $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ wäre, so ergäbe sich durch Koeffizientenvergleichung u. a.:

$$\alpha\bar{\alpha} + \frac{6i}{\sqrt{19}}\alpha\bar{\gamma} - \frac{6i}{\sqrt{19}}\gamma\bar{\alpha} + 2\gamma\bar{\gamma} = 1,$$

$$\alpha\bar{\beta} + \frac{6i}{\sqrt{19}}\alpha\bar{\delta} - \frac{6i}{\sqrt{19}}\gamma\bar{\beta} + 2\gamma\bar{\delta} = -\frac{6i}{\sqrt{19}}.$$

Hieraus würden sich, wenn man die erste Gleichung mit $-\bar{\beta}$ bzw. $\bar{\delta}$ und die zweite mit $\bar{\alpha}$ bzw. $-\bar{\gamma}$ multiplizierte und dann beide addierte, die beiden Gleichungen

$$\frac{6i}{\sqrt{19}}\alpha + 2\gamma = -\bar{\beta} - \frac{6i}{\sqrt{19}}\bar{\alpha},$$

$$\alpha - \frac{6i}{\sqrt{19}}\gamma = \bar{\delta} + \frac{6i}{\sqrt{19}}\bar{\gamma}$$

ergeben, oder nach leichter Umformung:

$$6(\alpha + \bar{\alpha}) = i\sqrt{19}\,(2\gamma + \bar{\beta}),$$

$$6(\gamma + \bar{\gamma}) = i\sqrt{19}\,(\bar{\delta} - \alpha).$$

Sonach wären die ganzen Zahlen $\alpha + \bar{\alpha}$ und $\gamma + \bar{\gamma}$ durch $i\sqrt{19}$ teilbar, was denselben Widerspruch ergibt wie im vorletzten Absatz des § 4.

(Eingegangen am 17. Februar 1932.)

Über die Lage des Schwerpunktes eines ebenen konvexen Bereiches und die Extrema des logarithmischen Flächenpotentials eines konvexen Bereiches.

Von

Władysław Nikliborc in Lwów, z. Z. in Leipzig.

Bekanntlich liegt der Schwerpunkt eines ebenen, konvexen, mit Masse konstanter Flächendichte belegt gedachten Bereiches D in diesem Bereiche selbst. In diesem Aufsatz werden genauere Angaben über die Lage des Schwerpunktes gegeben. Mit Rücksicht auf die unmittelbar folgende Arbeit des Herrn Blaschke[1]) werden wir uns aber auf die stetig gekrümmten konvexen Bereiche beschränken.

Der § 1 enthält den grundlegenden Hilfssatz; nach einigen weiteren Hilfsbetrachtungen in § 2 wird in § 3 der Beweis des Hauptsatzes dieser Arbeit gegeben; § 4 ist der Untersuchung der Lage der Maxima von logarithmischen Flächenpotentialen gewidmet.

§ 1.

Es sei D ein ebener konvexer Bereich, dessen Rand C als stetig gekrümmt vorausgesetzt wird. Der Krümmungsradius $R(s)$ genügt der Ungleichheit

$$0 < R_1 \leqq R(s),$$

braucht aber nach oben nicht beschränkt zu sein.

[1]) Vgl. W. Blaschke, Über die Schwerpunkte von Eibereichen, Math. Zeitschrift **36** (1932), S. 166. A. a. O. teilt Herr Blaschke einen kurzen und eleganten Beweis für den von mir angegebenen Satz mit, wobei seine Methode auch noch im Raume gültig bleibt, während die meinige dort versagt. Ich habe mich trotzdem entschlossen, meinen Beweis zu publizieren, da er vielleicht elementarer ist. Außerdem dürfte der von mir in § 1 abgeleitete Hilfssatz auch an sich einiges Interesse beanspruchen (vgl. § 1).

Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems kann man die Gleichungen von C in der Form

$$(1) \qquad x(s)=\int_0^s \cos\left\{\int_0^t \frac{d\tau}{R(\tau)}\right\}dt, \qquad y(s)=\int_0^s \sin\left\{\int_0^t \frac{d\tau}{R(\tau)}\right\}dt$$

schreiben. Wir betrachten jetzt die innere Normale zu C im Punkte s und den Punkt $\{\xi(s), \eta(s)\}$ mit

$$\xi(s)=x(s)-R_1 y'(s), \qquad \eta(s)=y(s)+R_1 x'(s).$$

Offenbar liegt dieser Punkt auf der genannten Normale im Abstande R_1 von s. Es gilt die Formel

$$\eta'(s)=\left[1-\frac{R_1}{R(s)}\right]\cdot \sin\int_0^s \frac{d\tau}{R(\tau)}.$$

Ist s_0 derjenige Punkt der Kurve C, für den $y(s)$ seinen Höchstwert annimmt, so folgt aus der geometrischen Bedeutung des Ausdruckes $\int_0^s \frac{d\tau}{R(\tau)}$ für $0 \leqq s \leqq s_0$ die Ungleichheit

$$0 \leqq \int_0^s \frac{d\tau}{R(\tau)} \leqq \pi.$$

Daher ist auch $\eta'(s) \geqq 0$. Daraus und aus $\eta(0)=R_1$ folgt für $0 \leqq s \leqq s_0$, daß $\eta(s) \geqq R_1$ gilt. Ändert man den Umlaufsinn auf C, so erkennt man auf die gleiche Weise, daß die Ungleichheit

$$(2) \qquad \eta(s) \geqq R_1$$

für alle s besteht.

Der Kreis $x^2+(y-R_1)^2=R_1^2$ berührt C im Koordinatenursprung, liegt auf derselben Seite der x-Achse wie der Bereich D, ragt daher aus D nicht hinaus[2]). Hieraus folgt, daß die Gerade $y=R_1$ die Kurve C in zwei verschiedenen Punkten trifft, mithin den Bereich D in zwei Teile D_1 und D_2, die Kurve C in zwei Bogen C_1 und C_2 teilt. In naheliegender Ausdrucksweise sei dabei mit D_1 bzw. C_1 der „untere" Teil von D bzw. C bezeichnet. Es sei endlich D_1' der zu D_1 in bezug auf die Gerade $y=R_1$ symmetrisch gelegene Bereich, desgleichen C_1' der zu C_1 symmetrische Bogen.

Wir wollen zeigen, daß D_1' in D_2 enthalten ist, und nehmen zu diesem Zwecke einen beliebigen Punkt s auf C_1 an und bezeichnen mit $K(s)$ den durch die Gleichung

$$[x-\xi(s)]^2+[y-\eta(s)]^2=R_1^2$$

---

[2]) Vgl. W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 116. Der in Betracht kommende Satz lautet: Der kleinste Krümmungskreis liegt in D.

erklärten Kreis. Aus (2) folgt zunächst, daß $K(s)$ durch die Gerade $y = R_1$ in zwei Teile, den „*unteren*“ $K_1(s)$ und den „*oberen*“ $K_2(s)$ zerlegt wird. Bezeichnet man mit $K_1'(s)$ den zu $K_1(s)$ (in bezug auf die Gerade $y = R_1$) symmetrischen Bereich, so folgt wieder aus (2), daß $K_1'(s)$ in $K_2(s)$ enthalten ist; $K(s)$ liegt aber nach dem in [2]) zitierten Satze in D, so daß auch $K_1'(s)$ in D_2 liegen muß. Insbesondere liegt der zum Punkte (s) symmetrische Punkt in D_2. Da aber (s) auf C_1 beliebig angenommen war, so sieht man, daß C_1', also auch D_1' in D_2 liegen muß.

Hieraus folgt der

Hilfssatz. *Es sei s ein beliebiger Punkt auf C, T_s die Tangente zu C im Punkte s und $N(s)$ die innere Normale, ϱ eine beliebige der Ungleichheit $0 < \varrho \leqq R_1$ genügende Zahl, $\sigma(s)$ derjenige Punkt auf $N(s)$, welcher von s den Abstand ϱ hat, endlich T_s' die durch $\sigma(s)$ zu T_s parallel gezogene Gerade; T_s' zerlegt D in zwei Teile D_1 und D_2, unter D_1 denjenigen Teil, welcher den Punkt s enthält, verstanden.*

Bezeichnet man mit D_1' den zu D_1 in bezug auf T_s' symmetrischen Bereich, so ist D_1' in D_2 enthalten.

§ 2.

Die durch die Gleichungen

$$\xi(s) = x(s) - \varrho\, y'(s), \qquad \eta(s) = y(s) + \varrho\, x'(s) \tag{3}$$

erklärte Kurve liegt für $0 < \varrho \leqq R_1$ gewiß im Innern von D und ist, wie man leicht sieht, gewiß konvex. Für $\varrho = R_1$ wäre es noch möglich, daß sich (3) auf eine geradlinige Strecke oder einen Punkt reduziert. Man kann aber leicht zeigen, daß *sich* (3) *in Wirklichkeit nur auf einen Punkt reduzieren kann.* Wäre nämlich (3) mit einer geradlinigen Strecke identisch, so müßte es eine Gleichung von der Form

$$\xi(s)\cos\alpha + \eta(s)\sin\alpha + p \equiv 0$$

befriedigen. Aus (1) und (3) folgt dann (bei $\varrho = R_1$)

$$\int_0^s \cos\left[\alpha - \int_0^t \frac{d\tau}{R(\tau)}\right] dt + R_1 \sin\left[\alpha - \int_0^s \frac{d\tau}{R(\tau)}\right] + p \equiv 0$$

und nach einer Differentiation auch

$$\left[1 - \frac{R_1}{R(s)}\right] \cos\left[\alpha - \int_0^s \frac{d\tau}{R(\tau)}\right] \equiv 0.$$

Da aber $\int_0^s \frac{d\tau}{R(\tau)}$ mit s monoton wächst, so folgt hieraus

$$R(s) \equiv R_1.$$

Nach einem bekannten Satze der Differentialgeometrie ist also C ein Kreis, demnach (3) ein Punkt.

Wir bemerken, daß die Kurven (1) und (3) dieselben Krümmungsmittelpunkte besitzen.

§ 3.

Wir wollen jetzt den Hauptsatz unserer Arbeit beweisen.

Es seien C und C' zwei stetig gekrümmte, konvexe, parallele Kurven. Es möge etwa C im Innern des von C' begrenzten Bereiches D' liegen. Der Schwerpunkt des Bereiches D' liegt im Innern des durch C begrenzten Bereiches D.

Beweis. Die Kurve C sei in die durch die Formeln (1) definierte Lage gebracht. Ist $R(s)$ der Krümmungsradius von C, so ist der Krümmungsradius der Kurve C' gleich $R+\varrho$, wo $\varrho > 0$ den „Abstand" beider Kurven bedeutet. Nach dem in § 1 bewiesenen Hilfssatze teilt die x-Achse D' in zwei Teile, D_1' und D_2', wobei der „untere" Teil mit D_1' bezeichnet wurde. Das zu D_1' in bezug auf die x-Achse symmetrisch liegende Gebiet ist in D_2' enthalten (Hilfssatz); demnach muß der Schwerpunkt von D' in D_2' enthalten sein. (Wir können sogar behaupten, daß der Schwerpunkt von D' nicht auf der x-Achse liegen kann.)

Hieraus folgt aber sofort folgendes: Sind T_1 und T_2 zwei parallele Tangenten der Kurve C, so liegt der Schwerpunkt des Bereiches D' „zwischen" diesen Tangenten (auf T_1 oder T_2 selbst kann er nicht liegen). Damit ist aber unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Wir können unserem Satz die folgende Gestalt geben:

Es sei C eine konvexe, stetig gekrümmte Kurve, die sich nicht auf einen Kreis reduziert, und es sei R_1 das Minimum des Krümmungsradius von C. Der Schwerpunkt des von C begrenzten Bereiches D liegt im Innern des von der Kurve

$$\begin{aligned} \xi &= x(s) - R_1 y'(s), \\ \eta &= y(s) + R_1 x'(s) \end{aligned} \tag{4}$$

begrenzten Bereiches.

§ 4.

Unter C wieder eine konvexe geschlossene, den Bereich D begrenzende Kurve verstanden, betrachten wir jetzt das Integral

$$V(P) = \int_D \log \frac{1}{r_{MP}} d\sigma_M,$$

wo M den Integrations-, P den Aufpunkt, r_{MP} deren Abstand und $d\sigma_M$ das Flächenelement in T bezeichnet. Bekanntlich genügt $V(P)$ im Innern

von C der Poissonschen Gleichung $\Delta V = -2\pi$, woraus natürlich folgt, daß in D kein Minimum von $V(P)$ liegen kann. Die Maxima von $V(P)$ liegen dagegen im Innern von $V(P)$, und zwar gilt der

Satz. *Unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen des in § 3 bewiesenen Satzes, liegt jedes Maximum von $V(P)$ im Innern des durch die Kurve (4) begrenzten Bereiches.*

Beweis. Es sei P_0 irgendein Punkt der Kurve (4). Das Koordinatensystem sei dabei so gewählt, daß die x-Achse die Kurve (4) im Punkte P_0 berührt, demnach (4) ganz auf der einen Seite dieser Geraden, und zwar in der Halbebene $y \geqq 0$, liegt. Die x-Achse teilt nun D in das „untere" Teilgebiet D_1 und in das „obere" D_2. Das zu D_1 in bezug auf die x-Achse symmetrische Gebiet D_1' liegt in D_2. In naheliegender Schreibweise setzen wir noch $D_1'' = D_2 - D_1'$. Es ist also

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \int\limits_{D_1} \frac{\partial}{\partial y}\left(\log \frac{1}{r_{MP}}\right) d\sigma_M + \int\limits_{D_1'} \ldots + \int\limits_{D_1''} \ldots .$$

Wird nun $\frac{\partial V}{\partial y}$ im Punkte P_0 berechnet, so heben sich die beiden ersten Integrale auf, und es bleibt

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \iint\limits_{D_1''} \frac{y'}{r_{P_0 M}^2}\, dx'dy' > 0,$$

da D_1'' ganz in der „oberen" Halbebene liegt. Im Punkte P_0 kann also $V(P)$ kein Maximum haben. Unsere Überlegung bleibt richtig, wenn wir in (4) für R_1 die Zahl ϱ

$$0 \leqq \varrho \leqq R_1$$

setzen. Damit aber ist unsere Behauptung bewiesen.

Bemerkung 1. Die Verallgemeinerung unserer Bemerkung auf konvexe Gebiete allgemeinster Natur bietet keine Schwierigkeiten dar.

Bemerkung 2. Ist die Massenverteilung nicht homogen, so gelten die in § 3 und § 4 bewiesenen Sätze auch dann, wenn die gewissen Regularitätsbedingungen genügende Dichte auf den zu C parallelen Kurven konstant ist, wobei sie nach innen zu wächst.

Bemerkung 3. Es scheint bisher noch unentschieden zu sein, ob es im homogenen Falle außer dem absoluten auch noch relative Maxima von $V(P)$ gibt.

Leipzig, im April 1929.

(Eingegangen am 30. April 1929.)

Über die Schwerpunkte von Eibereichen.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Es sei $\mathfrak{E}$ eine Eilinie (geschlossene konvexe Kurve), F ihr Flächeninhalt, U ihr Umfang. x_i $(i = 1, 2)$ seien die rechtwinkligen Koordinaten des Schwerpunkts des von $\mathfrak{E}$ umschlossenen homogen mit Masse belegten Eibereichs, x_i' die des Schwerpunkts der homogen belegten Eilinie $\mathfrak{E}$ und endlich x_i'' die des Schwerpunkts der Eilinie $\mathfrak{E}$, wenn man als Dichte auf $\mathfrak{E}$ die Krümmung von $\mathfrak{E}$ nimmt. x_i'' ist der schon von J. Steiner betrachtete *Krümmungsschwerpunkt*. Es sei nun $\mathfrak{E} + t\mathfrak{K}$ die äußere Parallelkurve im Abstand t von $\mathfrak{E}$, die wieder eine Eilinie ist. Für den Schwerpunkt der von ihr umschlossenen homogenen Fläche findet man

$$x_i(t) = \frac{F x_i + U t x_i' + \pi t^2 x_i''}{F + U t + \pi t^2}.$$

Belegt man also x_i, x_i', x_i'' der Reihe nach mit den positiven Massen $F, Ut, \pi t^2$, so erhält man als deren Schwerpunkt $x_i(t)$. Dieser Punkt liegt daher im Dreieck der drei anderen, und da diese anderen in $\mathfrak{E}$ liegen, so liegt er ebenfalls in $\mathfrak{E}$. Damit ist der Hauptsatz des Herrn Nikliborc bewiesen:

Es sei $\mathfrak{E}$ eine Eilinie, $\mathfrak{E} + t\mathfrak{K}$ eine äußere Parallelkurve. Dann liegt der Schwerpunkt der von $\mathfrak{E} + t\mathfrak{K}$ umschlossenen homogenen Fläche in $\mathfrak{E}$.

Für den Schwerpunkt der homogen belegten Eilinie $\mathfrak{E} + t\mathfrak{K}$ findet man

$$x_i'(t) = \frac{U x_i' + \pi t x_i''}{U + \pi t}.$$

Er liegt also ebenfalls in $\mathfrak{E}$.

Die gefundenen Ergebnisse behalten ihre Gültigkeit, wenn man unter $\mathfrak{E} + t\mathfrak{K}$ die Linearkombination von Eilinien[1]) nach Brunn und Minkowski versteht und dabei $\mathfrak{K}$ eine beliebige Eilinie bedeutet, deren Flächenschwerpunkt in den Ursprung fällt, also bei einer Minkowski-Geometrie mit $\mathfrak{K}$ als Eichkurve.

Ähnliches gilt für Eiflächen.

[1]) Vgl. etwa W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916.

(Eingegangen am 7. Juli 1929.)

Eine Bemerkung über die Volumpotentiale II.

Von

Władysław Nikliborc in Lwów, z. Z. in Leipzig *).

1. Das Volumpotential der homogenen Ellipsoidschale, d. h. eines Körpers, welcher durch zwei in bezug auf den gemeinsamen Mittelpunkt ähnliche Ellipsoide begrenzt wird, ist in dem durch das innere Ellipsoid begrenzten Hohlraume konstant.

Man kann jetzt die Frage stellen, ob die Umkehrung des Satzes richtig ist: Es sei T ein durch zwei ähnliche Flächen vom Kugeltypus begrenzter Körper, dessen Volumpotential in dem entstandenen Hohlraume konstant ist. Ist T notwendig eine, durch zwei in bezug auf den gemeinsamen Mittelpunkt ähnliche Ellipsoide begrenzte Ellipsoidschale?

Diese Frage wird in diesem Aufsatze bejahend beantwortet. Der Beweis stützt sich auf einen von Hern E. Hölder herrührenden und von mir bewiesenen Satz[1]). Über den Rand S von T genügt es vorauszusetzen, daß S eine Fläche mit stetiger Normale ist.

2. Es seien also S_1 und S_2 zwei ähnliche Flächen vom Kugeltypus, die in jedem Punkte eine stetige Normale besitzen, T_1 und T_2 die durch S_1 bzw. S_2 begrenzten Gebiete. Wir setzen voraus, daß T_1 in T_2 enthalten ist, und bezeichnen mit T das durch S_1 und S_2 begrenzte Gebiet. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir endlich voraus, daß der Ähnlichkeitsmittelpunkt zum Koordinatenursprung gewählt wird. Demnach liegt der Koordinatenursprung in T_1 (da S_1 vom Kugeltypus ist). Wir setzen in leicht verständlicher Schreibweise

$$V(x, y, z) = \int_T \frac{d\tau}{r}, \qquad V_k(x, y, z) = \int_{T_k} \frac{d\tau}{r} \qquad (k = 1, 2).$$

Wir wollen jetzt folgendes beweisen: Ist V in T_1 konstant, so sind S_1 und S_2 zwei in bezug auf den Koordinatenursprung ähnliche Ellipsoide.

---

*) International Education Board Fellow (Rockefeller Foundation.)

[1]) Eine Bemerkung über die Volumpotentiale. Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 625–631.

3. Es ist offenbar

$$V(x, y, z) = V_2(x, y, z) - V_1(x, y, z). \tag{1}$$

Die Funktion V_k ist in T_k analytisch regulär (da die Dichte konstant, also analytisch regulär ist) und läßt sich demnach in einer hinreichend kleinen Umgebung von $(0, 0, 0)$ durch eine konvergente Potenzreihe

$$V_k(x, y, z) = (V_k)_0 + \left\{\left(\frac{\partial V_k}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial V_k}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial V_k}{\partial z}\right)_0 z\right\} + \frac{1}{2!}\left\{\left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \ldots\right\} + \ldots \tag{2}$$

darstellen.

Wegen (1) gilt also

$$V(x, y, z) = [(V_2)_0 - (V_1)_0] + \left\{\left[\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_0\right] x + \ldots\right\} + \ldots.$$

Nun ist $V(x, y, z)$ nach Voraussetzung in T_1 konstant, so daß nach dem Prinzip der Identität von Potenzreihen die Relationen

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} V_1}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)_0 = \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} V_2}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)_0, \tag{3}$$

für alle ganzzahligen, nicht negativen und nicht gleichzeitig verschwindenden α, β, γ gelten müssen.

4. Wir betrachten jetzt die Funktion

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

und beweisen leicht durch Anwendung der vollständigen Induktion den folgenden Hilfssatz:

Es gilt

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} \frac{1}{r}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = \frac{w_{\alpha,\beta,\gamma}(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)}{r^{2(\alpha+\beta+\gamma)+1}}, \tag{4}$$

wo $w_{\alpha,\beta,\gamma}$ ein homogenes Polynom vom Grade $\alpha+\beta+\gamma$ bedeutet.

Beweis. Es ist zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -\frac{x-\xi}{r^3} = \frac{w_{1,0,0}(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)}{r^3}, \ldots.$$

Aus (4) folgt weiter z. B.

$$\frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta+\gamma} \frac{1}{r}}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^\beta \partial z^\gamma} = \frac{r^{2(\alpha+\beta+\gamma)+1} \frac{\partial w_{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x} - \{2(\alpha+\beta+\gamma)+1\}(x-\xi)\cdot w_{\alpha,\beta,\gamma}\cdot r^{2(\alpha+\beta+\gamma)-1}}{r^{4(\alpha+\beta+\gamma)+2}} =$$

$$= \frac{r^2 \cdot \frac{\partial w_{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x} - \{2(\alpha+\beta+\gamma)+1\}(x-\xi)\cdot w_{\alpha,\beta,\gamma}}{r^{2(\alpha+\beta+\gamma)+3}} = \frac{w_{\alpha+1,\beta,\gamma}}{r^{2\{(\alpha+1)+\beta+\gamma\}+1}},$$

wo, wie man sieht, $w_{\alpha+1,\beta,\gamma}$ ein in bezug auf $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$ homogenes Polynom vom Grade $(\alpha+1)+\beta+\gamma$ ist, w. z. b. w.

5. Wir wenden jetzt unseren Hilfssatz zur Berechnung von $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} V_k}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$ an. Es gilt zunächst

$$\frac{\partial V_k}{\partial x} = \int_{S_k} \frac{\cos(n_k, x)}{r_k} d\sigma_k, \qquad \frac{\partial V_k}{\partial y} = \int_{S_k} \frac{\cos(n_k, y)}{r_k} d\sigma_k, \qquad \frac{\partial V_k}{\partial z} = \int_{S_k} \frac{\cos(n_k, z)}{r_k} d\sigma_k,$$

wo n_k die nach innen gerichtete Normale zu S_k, $d\sigma_k$ das Flächenelement und r_k die Distanz zwischen dem Aufpunkte und $d\sigma_k$ bedeuten.

Aus dem oben bewiesenen Hilfssatze folgen leicht die Formeln:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} V_k}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = \int_{S_k} \frac{w_{\alpha-1,\beta,\gamma}(x-\xi_k, y-\eta_k, z-\zeta_k)}{r_k^{2(\alpha+\beta+\gamma)-1}} \cos(n_k, x)\, d\sigma_k$$

$$= \int_{S_k} \frac{w_{\alpha,\beta-1,\gamma}(x-\xi_k, y-\eta_k, z-\zeta_k)}{r_k^{2(\alpha+\beta+\gamma)-1}} \cos(n_k, y)\, d\sigma_k$$

$$= \int_{S_k} \frac{w_{\alpha,\beta,\gamma-1}(x-\xi_k, y-\eta_k, z-\zeta_k)}{r_k^{2(\alpha+\beta+\gamma)-1}} \cos(n_k, z)\, d\sigma_k.$$

ξ_k, η_k, ζ_k sind dabei die laufenden Koordinaten von S_k. Wir wenden jetzt unsere Formeln insbesondere im Punkte $(0, 0, 0)$ an. Der Ähnlichkeit der Flächen S_1 und S_2 zufolge, ist dann, wenn λ den Ähnlichkeitskoeffizient bedeutet,

$$\xi_2 = \lambda \xi_1, \qquad \eta_2 = \lambda \eta_1, \qquad \zeta_2 = \lambda \zeta_1,$$

$$r_2 = \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2} = \lambda \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2} = \lambda r_1,$$

$$d\sigma_2 = \lambda^2 d\sigma_1,$$

$$\cos(n_1, x) = \cos(n_2, x), \quad \cos(n_1, y) = \cos(n_2, y), \quad \cos(n_1, z) = \cos(n_2, z),$$

$$w_{\alpha-1,\beta,\gamma}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) = w_{\alpha-1,\beta,\gamma}(\lambda \xi_1, \lambda \eta_1, \lambda \zeta_1)$$
$$= \lambda^{(\alpha-1)+\beta+\gamma} w_{\alpha-1,\beta,\gamma}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1).$$

Hieraus folgt (im Koordinatenursprung)

$$\int_{S_2} \frac{w_{\alpha-1,\beta,\gamma}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)}{r_2^{2(\alpha+\beta+\gamma)-1}} \cos(n_2, x)\, d\sigma_2$$

$$= \int_{S_1} \frac{\lambda^{(\alpha-1)+\beta+\gamma} w_{\alpha-1,\beta,\gamma}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{\lambda^{2(\alpha+\beta+\gamma)-1} r_1^{2(\alpha+\beta+\gamma)-1}} \cos(n_1, x)\, \lambda^2 d\sigma_1$$

$$= \lambda^{-\alpha-\beta-\gamma+2} \int_{S_k} \frac{w_{\alpha-1,\beta,\gamma}(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r_1^{2(\alpha+\beta+\gamma)-1}} \cos(n_1, x)\, d\sigma_1.$$

Es ist also

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} V_2}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)_0 = \lambda^{-\alpha-\beta-\gamma+2} \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} V_1}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)_0,$$

also wegen (3)

$$(\lambda^{-\alpha-\beta-\gamma+2}-1)\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}V_1}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right)_0=0. \tag{5}$$

6. Aus (5) folgt wegen $\lambda \neq 1$, daß für $\alpha+\beta+\gamma-2 \neq 0$

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}V_1}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right)_0=0$$

sein muß. Demnach reduziert sich V_1 auf die folgende Gestalt

$$V_1(x,y,z)=(V_1)_0+Ax^2+2A'xy+2A''xz+By^2+2B'yz+Cz^2,$$

oder nach entsprechender Wahl der Koordinatenachsen auf die Gestalt

$$V_1(x,y,z)=(V_1)_0+\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2.$$

Wendet man jetzt die Ergebnisse meiner unter [1]) zitierten Arbeit an, so folgt daraus unmittelbar, daß T_1 ein Ellipsoidkörper ist. Hieraus ergibt sich unsere Behauptung ohne weiteres.

Leipzig, 20. Juli 1931.

(Eingegangen am 27. Juli 1931.)

Nachtrag. Der inhaltlich gleichlautende Satz ist mittlerweile auf einem anderen Wege von Herrn P. Dive bewiesen worden. Vgl. P. Dive, Sur une propriété exclusive des homoïdes ellipsoidaux, Comptes rendus **193** (1931), S. 141—142; Attraction des ellipsoïdes homogènes et réciproque d'un théorème de Newton, Bulletin de la Société mathématique de France **59** (1931), 13 S.

Leipzig, den 27. August 1932.

Über den Wertevorrat einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen.

Von

Stefan Bergmann in Berlin.

Die Tatsache, daß das Maximum des absoluten Betrages einer Funktion stets am Rande angenommen wird, spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. In einer vor kurzem erschienenen Arbeit[1]) wurde darauf hingewiesen, daß es in $\mathfrak{R}$[2]), bei den Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen Bereiche $\mathfrak{A}$ gibt, auf deren (dreidimensionaler) Berandung „ausgezeichnete Randflächen" $\mathfrak{H}$ liegen. Die Eigenschaften einer „ausgezeichneten Randfläche" wurden in der Arbeit A näher niedergelegt; u. a. besitzt sie die Eigenschaft, daß der Absolutwert einer in $\mathfrak{A}$ regulären Funktion sein Maximum auf der „ausgezeichneten Randfläche" $\mathfrak{H}$ annimmt, d. h. daß

$$(1) \qquad \operatorname*{Max}_{\mathfrak{A}} |f(X, Z)| \leqq \operatorname*{Max}_{\mathfrak{H}} |f(X, Z)|$$[3])

[1]) „Über die Existenz von Repräsentantenbereichen in der Theorie der Abbildung durch Paare von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen", Math. Annalen 102 (1929), S. 430. (Abkürzungsweise Arbeit E genannt.) Es wird außerdem im weiteren auf die folgenden Untersuchungen bezug genommen: „Über unendliche Hermitesche Formen, die zu einem Bereich gehören, ...", Math. Zeitschr. 29 (1929), S. 640 (Arbeit H), „Zwei Sätze über Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Math. Annalen 100 (1928), S. 399 (Arbeit S) und „Über die ausgezeichneten Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Math. Annalen 104 (1931), S. 611 (Arbeit A).

[2]) Mit $\mathfrak{R}$ soll der vierdimensionale Raum bezeichnet werden. Wir werden im folgenden

mit fett gedruckten großen deutschen Buchstaben die vierdimensional. Mannigfaltigkeiten

„ gewöhnl. „ „ „ „ „ zweidimensional. „

„ „ „ kleinen „ „ „ eindimensional. „

bezeichnen. Falls das Gegenteil nicht hervorgehoben wird, sind sämtliche im folgenden vorkommenden Mannigfaltigkeiten als offen zu betrachten.

[3]) $\operatorname*{Max}_{\mathfrak{G}} |f(X, Z)|$ = Maximum von $|f(X, Z)|$, wenn X, Z alle Punkte der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ durchläuft.

ist[4]). In der Arbeit A wurde ferner gezeigt, daß zu jeder (dem Torus homöomorphen) Fläche $\mathfrak{F}$ von gewisser Art ein Bereich $\mathfrak{A}$ existiert, dessen „ausgezeichnete Randfläche" nämlich Bestimmungsfläche $\mathfrak{F}$ ist.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Anwendung dieses Satzes und des Maximumprinzips (1) geschildert.

Sei $\mathfrak{G}$ ein schlichter, ganz im Endlichen gelegener Bereich, in dessen Innerem der Koordinatenanfangspunkt O liegt. Sei $\mathfrak{F}$ eine Fläche der geschilderten Art (deren nähere Beschreibung sich im § 1 findet), die ganz im Inneren von $\mathfrak{G}$ liegt.

Sei schließlich $f(X, Z)$ eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion, die im Koordinatenanfangspunkte O verschwindet und in $\mathfrak{G}$ den Wert γ ausläßt.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine untere Schranke für $|\gamma|$ anzugeben. Diese untere Schranke hängt von $f'_X \equiv \left[\frac{\partial f(X,Z)}{\partial X}\right]_{X=Z=0}$, $f'_Z \equiv \left[\frac{\partial f(X,Z)}{\partial Z}\right]_{X=Z=0}$, $\operatorname{Max}_{\mathfrak{F}} |f(X,Z)|$ ab, sonst ist sie von $f(X, Z)$ unabhängig. (Im übrigen treten natürlich in der Abschätzung auch Größen auf, die von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ abhängen.)

§ 1.

Sei $\mathfrak{G}$ ein ganz im Endlichen gelegener einfach zusammenhängender Bereich des $\mathfrak{R}$, in dessen Innerem der Koordinatenanfangspunkt O liegt. In $\mathfrak{G}$ liege eine Fläche $\mathfrak{F}$ von folgender Beschaffenheit: Bezeichnet man mit

$$r = |X|, \quad R = |Z|, \quad \varphi = \operatorname{arctang} \frac{\mathbf{Im}(X)}{\mathbf{Re}(X)}, \quad \Phi = \operatorname{arctang} \frac{\mathbf{Im}(Z)}{\mathbf{Re}(Z)}$$

($\mathbf{Im}$ = Imaginärteil von; $\mathbf{Re}$ = Realteil von)

die Polarkoordinaten von $\mathfrak{R}$, so lauten die Gleichungen von $\mathfrak{F}$:

$$(1) \quad r = \varrho(\Phi, \varphi), \qquad \varrho(\Phi, \varphi) = \varrho(\Phi + 2\pi, \varphi), \qquad \varrho(\Phi, \varphi) = \varrho(\Phi, \varphi + 2\pi)$$

$$(1a) \quad R = \mathsf{P}(\Phi), \qquad \mathsf{P}(\Phi) = \mathsf{P}(\Phi + 2\pi) \qquad (\mathsf{P}(\Phi, \varphi) > 0,\ \varrho(\Phi) > 0),$$

wo P und ϱ nach den beiden Veränderlichen stetig differentiierbare Funktionen sind.

Die Fläche $\mathfrak{F}$ kann man sich offenbar dadurch entstanden denken, daß man sich zu jedem Punkt $\tilde{Z}$[5]) der durch (1a) gegebenen Kurve $\mathfrak{k}$ die durch (1) gegebene Kurve $\mathfrak{b}(\tilde{Z})$ in die Ebene

$$Z = \tilde{Z}$$

---

[4]) Diese Tatsache ist in der Arbeit A zwar nicht explizite bewiesen; der Beweis verläuft jedoch ganz analog dem Nachweis, daß eine biharmonische Funktion auf $\mathfrak{F}$ sein Maximum (und Minimum) annimmt.

[5]) Das Zeichen $\sim$ über Z soll bedeuten, daß $\tilde{Z}$ ein Punkt von $\mathfrak{k}$ ist. Ein Strich über einer Größe wird dagegen in üblicher Weise den Übergang zu der konjugiert komplexen Größe bedeuten.

gelegt denkt. $\mathfrak{F}$ wird durch die Gesamtheit dieser Kurven erzeugt. Symbolisch schreiben wir

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{k} \times \mathfrak{b}(\tilde{Z}).$$

Wir werden im folgenden für $\tilde{Z}$ die Parameterdarstellung

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}(\Phi), \qquad \tilde{Z}(\Phi) = \tilde{Z}(\Phi + 2\pi)$$

benutzen. Mit $\mathfrak{K}$ soll das Innere von $\mathfrak{k}$, mit $\mathfrak{B}(\tilde{Z})$ das Innere von $\mathfrak{b}(\tilde{Z})$ bezeichnet werden.

Wie im § 3 und § 4 der Arbeit A gezeigt wurde, existieren zu einer Fläche $\mathfrak{F}$ dieser Art vierdimensionale Bereiche, deren „ausgezeichnete Randfläche" $\mathfrak{F}$ ist. Wir wählen einen solchen Bereich, den wir mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen, und setzen voraus, daß der Punkt O ein innerer Punkt von $\mathfrak{A}$ ist[6]) und daß $\mathfrak{A}$ ganz im Inneren von $\mathfrak{G}$ liegt.

Wir sagen kurz, die Funktion $f(X, Z)$ sei in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbar, falls $f(X, Z)$ in $\mathfrak{G}$ regulär ist und falls $\lim\limits_{n\to\infty} \int\int\int\int_{\mathfrak{G}_n} |f(X, Z)|^2 d\omega$ existiert, wobei unter $\mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ eine Folge von ganz im Inneren von $\mathfrak{G}$ gelegenen Bereichen verstanden wird, die $\mathfrak{G}$ ganz ausschöpfen[7]). $d\omega$ ist das (vierdimensionale) Volumenelement. Wie in der Arbeit S, S. 401 gezeigt wurde, existiert ein (abzählbar unendliches) vollständiges System von in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbaren linear unabhängigen Funktionen

$$\Theta_\nu(X, Z) \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots).^8) \tag{4}$$

Betrachtet man die Funktionen (4) auf der Fläche $\mathfrak{F}$, so bilden sie ein System von Funktionen

$$\Theta_\nu^*(\varphi, \Phi) \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{4a}$$

der reellen Veränderlichen φ, Φ $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \Phi \leqq 2\pi)$, das *linear unabhängig* ist. Wäre nämlich

$$\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \Theta_p^*(\varphi, \Phi) = 0 \qquad (\lambda_p \text{ Konstanten}),$$

so wäre, da $\mathfrak{F}$ die ausgezeichnete Randfläche von $\mathfrak{A}$ ist,

$$\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \Theta_p(X, Z) = 0,$$

was unmöglich ist, weil die Funktionen $\Theta_\nu(X, Z)$ linear unabhängig sind.

---

[6]) Wie aus dem Beweis der Existenz von $\mathfrak{A}$ in der Arbeit A hervorgeht, ist es stets möglich, solche Bereiche $\mathfrak{A}$ zu finden, in deren Innerem der Punkt O liegt.

[7]) Sind f_1 und f_2 quadratintegrierbar, so ist — wie man das leicht unter Benutzung der Schwarzschen Ungleichung beweist — auch $(f_1 + f_2)$ quadratintegrierbar.

[8]) Sie werden in der Arbeit S mit $\varphi_{\nu\mu}(X, Z)$ bezeichnet.

Mit Hilfe eines Orthogonalisierungsverfahrens [9]) kann man daher aus (4) ein neues vollständiges System

$$\Omega_\nu(X, Z) \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

bilden, das die Orthogonalrelation

$$\iint_{\mathfrak{F}} \Omega_\nu(X, Z)\, \overline{\Omega_\mu(X, Z)}\, do = \begin{cases} 1 \text{ [10])} & (\mu = \nu), \\ 0 & (\mu \neq \nu), \end{cases} \tag{6}$$

$$do = |D(\varphi, \Phi)|\, d\varphi\, d\Phi \tag{6a}$$

befriedigt, wo $D(\varphi, \Phi) = \frac{\partial(X, Z)}{\partial(\varphi, \Phi)}$ ist.

Wir wollen zeigen, daß der Kern

$$K(X, Z; \bar{X}, \bar{Z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\Omega_\nu(X, Z)|^2 \tag{7}$$

dieses Orthogonalsystems eine in $\mathfrak{A}$ endliche Funktion ist. Dazu benötigen wir den

Hilfssatz. *Ist X_0, Z_0 ein Punkt von $\mathfrak{A}$, so ist*

$$\iint_{\mathfrak{F}} |f(X, Z)|^2\, do \geqq \alpha(X_0, Z_0)\, |f(X_0, Z_0)|^2, \tag{8}$$

wobei $\alpha(X_0, Z_0) > 0$ eine von der speziellen Wahl der Funktion $f(X, Z)$ unabhängige Konstante ist.

Beweis. In der Arbeit A wurde die folgende Eigenschaft des Bereiches $\mathfrak{A}$ bewiesen. Indem man $\Phi = t$ setzt, kann man dem auf S. 173 Gesagten gemäß $\tilde{Z}$ in der Parameterdarstellung

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}(t) \qquad [0 \leqq t \leqq 2\pi,\ \tilde{Z}(0) = \tilde{Z}(2\pi)] \tag{1b}$$

schreiben, so daß jedem Wert von t ein und nur ein Punkt $\tilde{Z}$ von $\mathfrak{k}$ entspricht. Der Bereich $\mathfrak{A}$ läßt sich dann als eine Vereinigungsmenge von

---

[9]) Z. B. mit Hilfe des Gramm-Schmidtschen Verfahrens. Wir werden jedoch im folgenden ein anderes Verfahren benutzen, das ebenfalls die Orthogonalfunktionen liefert, welche gewisse Eigenschaften, die bei weiteren Überlegungen gebraucht werden, besitzen. Man kann ebenfalls ein anderes Orthogonalisierungsverfahren hier anwenden, das darin besteht, daß man die Minimalfunktionen bildet, die geeignet normiert sind. Wie Herr Welke in einer in den Math. Annalen erscheinenden Arbeit zeigt, stellen diese Minimalfunktionen ein vollständiges Orthogonalfunktionensystem dar. Anstatt von dem System (4) auszugehen, könnte man von der Folge

$$1, X, Z, X^2, XZ, \ldots$$

ausgehen. In gewissen Fällen wird dabei jedoch der Vollständigkeitsnachweis große Schwierigkeiten verursachen.

[10]) Im folgenden wird unter orthogonal stets die Orthogonalität im Sinne der Relation (6) verstanden.

einer einparametrig unendlichen Schar von Bereichen $\mathfrak{A}_t$ darstellen[11]):

$$\mathfrak{A} = \sum \mathfrak{A}_t \qquad (0 \leqq t < 2\pi,\ \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_{2\pi}), \tag{9}$$

wobei jeder Bereich $\mathfrak{A}_t$ durch die Transformation

$$X = X^\dagger T_t(Z^\dagger), \tag{10}$$

$$Z = Z^\dagger \tag{10a}$$

aus dem Produktbereich

$$\mathfrak{R} \times \mathfrak{B}_t \tag{11}$$

entsteht. $\mathfrak{R}$ ist dabei (wie es schon gesagt wurde) das Innere von $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{B}_t$ von $\mathfrak{b}[\tilde{Z}(t)] = \mathfrak{b}_t$, während $T_t(Z^\dagger)$ die in der Arbeit A näher definierte Funktion $T_\nu(Z; \mu)$ bedeutet. $T_t(Z^\dagger)$ $[0 \leqq t \leqq 2\pi]$ ist eine im abgeschlossenen Gebiete $\mathfrak{R}$ reguläre, in $\mathfrak{R} + \mathfrak{k}$ stetige Funktion der einen komplexen Veränderlichen $Z^\dagger$. (Die Funktionen $T_t(Z^\dagger)$ wurden in der Arbeit A näher charakterisiert.)

Die Produktfläche

$$\mathfrak{k} \times \mathfrak{b}_t$$

ist die ausgezeichnete Randfläche des Produktbereiches (11). Sie geht durch die Transformation (10), (10a) in die „ausgezeichnete Randfläche"

$$\mathfrak{k} \times \mathfrak{b}_t[\tilde{Z}(s)] \quad (\mathfrak{b}[\tilde{Z}(s)] = \mathfrak{b}[\tilde{Z}(s + 2\pi)])$$

von $\mathfrak{A}_t$ über[12]). Die Kurven $\mathfrak{b}_t[\tilde{Z}(s)]$ haben die Eigenschaft, daß es zwei positive Konstanten C und μ gibt, derart, daß für den Abstand $E(s, t)$ zwischen den beiden Kurven $\mathfrak{b}_t[\tilde{Z}(s)]$ und $\mathfrak{b}[\tilde{Z}(s)]$ die Ungleichung

$$E(s, t) \geqq C(s - t)^\mu \tag{12}$$

gilt und die erste Kurve für $s \neq t$ im Inneren der zweiten verläuft (dies folgt aus den über ϱ auf der S. 172 gemachten Voraussetzungen und Ungleichung (55) der Arbeit A).

Ist nun ein innerer Punkt X_0, Z_0 von $\mathfrak{A}$ gegeben, so existiert nach (9) ein $\mathfrak{A}_t$, in dessen Innerem der Punkt X_0, Z_0 liegt; $\mathfrak{A}_t$ entspricht vermöge (10), (10a) der Produktbereich (11). Wir werden den dem Punkte X, Z von $\mathfrak{A}_t$ entsprechenden Punkt von (11) mit $X^\dagger, Z^\dagger$ bezeichnen. Wir betrachten nun die Funktion

$$F(X^\dagger, Z^\dagger) = f[X^\dagger T_t(Z^\dagger), Z^\dagger] = f(X, Z), \tag{13}$$

---

[11]) Der kontinuierliche Index t spielt hier dieselbe Rolle, wie in der Arbeit A die Werte $\frac{2\pi k}{2^\varkappa}$ von Φ. Man überzeugt sich leicht, daß die Einführung des kontinuierlichen Indexes keinen Unterschied gegenüber Arbeit A mit sich bringt.

[12]) Wir setzen dabei $\Phi = s$ und halten im Laufe der folgenden Überlegungen t fest.

wobei $f(X, Z)$ in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbar ist. Nach (10), (10a) ist

$$X_0^\dagger = \frac{X_0}{T_t(Z_0)}, \qquad Z_0^\dagger = Z_0. \tag{14}$$

Bei festen $X_0^\dagger$ ist $F(X_0^\dagger, Z^\dagger)$ eine in $\mathfrak{R}$ reguläre, in $\mathfrak{R} + \mathfrak{k}$ stetige Funktion von $Z^\dagger$. Es gilt deshalb

$$F(X_0^\dagger, Z_0^\dagger) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{k}} \frac{F(X_0^\dagger, u)}{u - Z_0^\dagger}\, du = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{F(X_0^\dagger, u)}{u - Z_0^\dagger}\,\frac{du}{ds}\, ds \text{ [13]}. \tag{15}$$

Nach (13) ist

$$F(X_0^\dagger, u) = f[X_0^\dagger T_t(u), u] = f\Big[\frac{X_0 T_t(u)}{T_t(Z_0)}, u\Big]. \tag{16}$$

Da bei festen u, $f(X, u)$ eine in $\mathfrak{B}(u)$ reguläre, in $\mathfrak{B}(u) + \mathfrak{b}(u)$ stetige Funktion der Veränderlichen X ist und da (wie wir noch nachträglich zeigen werden) $\frac{X_0 T_t(u)}{T_t(Z_0)}$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}(u)$ ist, so gilt

$$f\Big[\frac{X_0 T_t(u)}{T_t(Z_0)}, u\Big] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{b}(u)} \frac{f(v, u)}{v - \frac{X_0 T_t(u)}{T_t(Z_0)}}\, dv = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(v, u)}{v - \frac{X_0 T_t(u)}{T_t(Z_0)}}\,\frac{\partial v}{\partial \varphi}\, d\varphi. \tag{16a}$$

(13), (15), (16a) ergeben

$$\begin{aligned} f(X_0, Z_0) &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathfrak{k}}\int_{\mathfrak{b}(u)} \frac{f(v, u)}{[u - Z_0]\Big[v - \frac{X_0 T_t(u)}{T_t(Z_0)}\Big]}\, dv\, du \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int\!\!\int_{\tilde{\mathfrak{s}}} \frac{f(v, u)\,\frac{\partial(v, u)}{\partial(\varphi, \Phi)}}{[u - Z_0]\Big[v - \frac{X_0 T_t(u)}{T_t(Z_0)}\Big]}\, d\varphi\, ds. \end{aligned} \tag{17}$$

Ist X_0, Z_0 ein innerer Punkt von $\mathfrak{A}$, so ist zunächst klar, daß es eine Konstante β gibt, derart, daß

$$|Z_0 - \tilde{Z}(s)| \geqq \beta > 0 \qquad (0 \leqq s \leqq 2\pi) \tag{18}$$

ist.

Ist ferner X_0, Z_0 ein innerer Punkt von $\mathfrak{A}_t$, so ist $X_0^\dagger, Z_0^\dagger$ ein innerer Punkt des Produktbereiches (11); $X_0^\dagger = \frac{X_0^\dagger}{T_t(Z_0)}$ ist also ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}_t = \mathfrak{B}[u(t)]$. $X_0^\dagger T_t(u) = \frac{X_0 T_t(u)}{T_t(Z_0)}$ ist somit auch (für jedes u aus $\mathfrak{k}$) ein innerer Punkt von $\mathfrak{D}_t(u)$. (Mit $\mathfrak{D}_t(u)$ wird das Innere von $\mathfrak{d}_t(u)$ bezeichnet.)

Wie in der Arbeit A gezeigt ist, ist $T_t(u)$ eine in $\mathfrak{R} + \mathfrak{k}$ stetige Funktion von u. Es wurde ferner in der gleichen Arbeit bewiesen, daß die

---

[13]) Da die Integration längs der Kurve $\mathfrak{k}$ geschieht, nimmt u die Werte $u = w(s) = \tilde{Z}(s)$ an.

Kurven $\mathfrak{d}_t(u)$ stetig (und zwar gleichmäßig in X) von u abhängen und daß $\mathfrak{d}_t[u(t)] = \mathfrak{d}[u(t)]$ ist. Da für $u = u(t)$ (d. h. $s = t$) die Integrationsvariable in (16a) $v = v(t, \varphi) = v(t)$ diese Kurve durchläuft, gibt es eine positive Konstante δ_1, derart, daß

$$\left| v(t) - \frac{X_0 T_t[u(t)]}{T_t(Z_0)} \right| \geqq \delta_1 > 0 \tag{19}$$

ist. Infolge der stetigen Abhängigkeit der angegebenen Größen von t existiert eine positive Konstante $\varepsilon > 0$, für die die Ungleichung

$$\left| v(t+\varepsilon') - \frac{X_0 T_t[u(t+\varepsilon')]}{T_t(Z_0)} \right| \geqq \frac{\delta_1}{2} \tag{19a}$$

gilt, sobald

$$|\varepsilon'| < \varepsilon$$

wird. Bezeichnen wir mit $\delta = \operatorname{Min}\left(\frac{\delta_1}{2}, C\varepsilon^{\mu}\right)$, so folgt aus (19a) und (12)

$$\left| v(s) - \frac{X_0 T_t[u(s)]}{T_t(Z_0)} \right| \geqq \delta > 0. \tag{19b}$$

Aus (17), (18) und (19b) folgt

$$|f(X_0, Z_0)| \leqq \frac{1}{4\pi^2\beta\delta} \iint_{\mathfrak{F}} |f(X, Z)|\, do \leqq \frac{1}{4\pi^2\beta\delta} \left[\iint_{\mathfrak{F}} |f(X, Z)|^2\, do \cdot \iint_{\mathfrak{F}} do \right]^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

$$= \frac{A^{\frac{1}{2}}}{4\pi^2\beta\delta} \left[\iint_{\mathfrak{F}} |f(X, Z)|^2\, do \right]^{\frac{1}{2}},$$

woraus wir nun (8) erhalten.

Man kann nun Schritt für Schritt in einer ähnlichen Weise, wie dies in der Arbeit H, S. 649—651 geschehen ist, die Endlichkeit des Kernes (7) in $\mathfrak{A}$ beweisen, wobei man das in der Arbeit A benutzte Korollar durch den soeben bewiesenen Hilfssatz ersetzt. Aus der *Vollständigkeit des Systems* (5), [*die besagt, daß*

$$\iint_{\mathfrak{F}} |f(X, Z)|^2\, do = \sum_{s=0}^{\infty} \left| \iint_{\mathfrak{F}} f(X, Z)\, \overline{\Omega_s(X, Z)}\, do \right|^2 \tag{21}$$

ist], der *Endlichkeit des Kernes und der Ungleichung* (8) folgt in üblicher Weise der

Entwicklungssatz. *Jede in* $\mathfrak{G}$ *quadratintegrierbare Funktion* $f(X, Z)$ *läßt sich in* $\mathfrak{A}$ *in der Form*

$$f(X, Z) = \sum_{s=0}^{\infty} \Omega_s(X, Z) \iint_{\mathfrak{F}} f(X, Z)\, \overline{\Omega_s(X, Z)}\, do \tag{22}$$

darstellen.

Wir gehen nun dazu über, ein Verfahren zu schildern, das uns ein besonderes Orthogonalfunktionensystem liefert. Dieses System wird eine für unsere weiteren Entwicklungen nötige Eigenschaft besitzen. Wir be-

trachten die Gesamtheit der in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbaren Funktionen $h(X, Z)$, die im Koordinatenanfangspunkte nebst ihren beiden Ableitungen verschwinden, d. h. für die die Relation

$$h(0,0) = \left[\frac{\partial h(X,Z)}{\partial X}\right]_{X=Z=0} = \left[\frac{\partial h(X,Z)}{\partial Z}\right]_{X=Z=0} = 0 \tag{23}$$

gilt. Alle unseren früheren Überlegungen wie auch die hier angewandten Betrachtungen aus den Arbeiten S und H lassen sich ohne Schwierigkeit in diesem Falle wiederholen; wir erhalten zunächst ein System von linear unabhängigen Funktionen $X_\nu(X, Z)$ (die den $\Theta_\nu(X, Z)$ entsprechen). Mit Hilfe des Gramm-Schmidtschen Verfahrens gelangen wir zu dem Orthogonalfunktionensystem

$$\psi_\nu(X, Z) \qquad (\nu = 3, 4, 5, 6, \ldots), \tag{24}$$

das für die Klasse der Funktionen $h(X; Z)$ (die die Nebenbedingungen (23) erfüllen) vollständig ist. In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß man jede Funktion $h(X, Z)$ nach dem System (24) entwickeln kann. Die Funktionen $\psi_\nu(X, Z)$ haben eine für das folgende wichtige Eigenschaft:

In einer genügend kleinen Hyperkugel $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{H} \subset \mathfrak{A}$) lassen sich die $\psi_\nu(X, Z)$ in Potenzreihen entwickeln. Wie wir zeigen wollen, *fehlen in diesen Potenzreihen das konstante und die linearen Glieder*, d. h. sie haben die Form

$$\sum_{n,m=(2,0)}^{\infty} L_{nm}^{(\nu)} X^n Z^m \quad [14]) \qquad (\nu = 3, 4, 5, 6, \ldots). \tag{24a}$$

Jede Funktion $X_\nu(X, Z)$ ergibt sich als ein Limes der geeignet gewählten Folge von Funktionen, die den Nebenbedingungen (23) genügen. (Vgl. Arbeit S, Seite 402.) Das Funktionselement von $X_\nu(X, Z)$ muß somit die Form (24a) haben. Orthogonalisiert man nun diese Folge von Funktionen $X_\nu(X, Z)$ mit Hilfe des Gramm-Schmidtschen Verfahrens, so haben die Funktionselemente der auf diese Weise erhaltenen Orthogonalfunktionen gewiß die angegebene Eigenschaft, denn jede dieser Orthogonalfunktionen setzt sich aus endlich vielen Funktionen $X_\nu(X, Z)$ zusammen[15]).

Will man aus (24) zu einem für die allgemeinste Klasse von in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbaren Funktionen $f(X, Z)$ (die also (23) nicht zu erfüllen brauchen) vollständigen System gelangen, so muß man noch drei weitere

---

[14]) Für die Doppelindizes $n\,m$ soll stets die Reihenfolge

$$(0,0);\ (1,0);\ (0,1);\ (2,0);\ (1,1);\ (0,2);\ \ldots$$

festgehalten werden.

[15]) Geht man von diesem speziellen System durch eine orthogonale Transformation zu einem beliebigen über, so bleibt die genannte Eigenschaft der Funktionselemente erhalten, da sich jede der neuen Funktionen in eine in $\mathfrak{H}$ gleichmäßig konvergente, nach den alten fortschreitende Reihe entwickeln läßt.

Funktionen $\psi_2(X, Z)$, $\psi_1(X, Z)$, $\psi_0(X, Z)$, die durch die Orthogonalisierung von $Z, X, 1$ entstehen, beifügen. Die Funktionen ψ_2, ψ_1, ψ_0 werden definiert vermöge der Gleichungen (26), (26a), (26b); $\alpha_\nu, \beta_\mu, \delta_\sigma$ ($\nu \geqq 3, \mu \geqq 2, \sigma \geqq 1$) bedeuten dabei die Fourierkoeffizienten der Entwicklung von $Z, X, 1$. Die Möglichkeit dieser Definition folgt aus der weiter bewiesenen Eigenschaft des Nichtverschwinden von $\alpha_2, \beta_1, \delta_0$. Wir gelangen somit schließlich zu einem für die Funktionen $f(X, Z)$ vollständigen System

$$\psi_\nu(X, Z) \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots), \tag{25}$$

das im Sinne der Relation (6) orthogonal ist.

Es sollen noch einige Abkürzungen für die im folgenden gebrauchten Ausdrücke und einige Bezeichnungen angegeben werden. Es sei

$$Z = \alpha_2 \psi_2(X, Z) + \sum_{\nu=3}^{\infty} \alpha_\nu \psi_\nu(X, Z), \tag{26}$$

$$X = \beta_1 \psi_1(X, Z) + \beta_2 \psi_2(X, Z) + \sum_{\nu=3}^{\infty} \beta_\nu \psi_\nu(X, Z), \tag{26a}$$

$$1 = \delta_0 \psi_0(X, Z) + \delta_1 \psi_1(X, Z) + \delta_2 \psi_2(X, Z) + \sum_{\nu=3}^{\infty} \delta_\nu \psi_\nu(X, Z). \tag{26b}$$

Keiner der Koeffizienten $\alpha_2, \beta_1, \delta_0$ kann verschwinden. Es ist

$$\alpha_2 \neq 0, \tag{27}$$

denn es wird $\frac{\partial}{\partial Z}\left[\sum_{\nu=3}^{\infty} \alpha_\nu \psi_\nu(X, Z)\right] = 0$, während die Ableitung nach Z der linken Seite von (26) im Koordinatenanfangspunkte O den Wert 1 hat; es ist ferner

$$\beta_1 \neq 0, \tag{27a}$$

da $\frac{\partial}{\partial X}\left[\sum_{\nu=2}^{\infty} \beta_\nu \psi_\nu(X, Z)\right] = 0$ ist, während die Ableitung nach X der linken Seite von (26a) gleich 1 ist. Schließlich ist

$$\delta_0 \neq 0, \tag{27b}$$

da $\sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu \psi_\nu(0, 0) = 0$ ist. In gleicher Weise folgt auch, daß

$$\psi_0(0, 0) \neq 0, \quad \left[\frac{\partial \psi_1(X, Z)}{\partial X}\right]_{X=Z=0} \neq 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial \psi_2(X, Z)}{\partial Z}\right]_{X=Z=0} \neq 0 \tag{28}$$

ist. (26), (26a), (26b) können wir umkehren, und wir gelangen zu

$$\psi_2(X, Z) = a_2 Z + \sum_{\nu=3}^{\infty} a_\nu \psi_\nu(X, Z), \tag{26c}$$

$$\psi_1(X, Z) = b_1 X + b_2 Z + \sum_{\nu=3}^{\infty} b_\nu \psi_\nu(X, Z), \tag{26d}$$

$$\psi_0(X, Z) = c_0 + c_1 X + c_2 Z + \sum_{\nu=3}^{\infty} c_\nu \psi_\nu(X, Z), \tag{26e}$$

wobei

$$a_2 = \frac{1}{\alpha_2}, \quad b_1 = \frac{1}{\beta_1}, \quad b_2 = -\frac{\beta_2}{\alpha_2 \beta_1}, \quad c_0 = \frac{1}{\delta_0}, \quad c_1 = -\frac{\delta_1}{\delta_0 \beta_1},$$

$$c_2 = \frac{\delta_1}{\delta_0}\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{1}{\alpha_2} - \frac{\delta_2}{\delta_0}\frac{1}{\alpha_2}$$

ist. Es soll ferner bedeuten:

$$(29) \quad A = \iint_{\mathfrak{F}} do \qquad \text{und} \qquad (29a) \quad S = A - |\delta_0|^2 - |\delta_1|^2 - |\delta_2|^2.$$

Ferner sei

$$(30) \quad H(x_1, x_2) = \sum_{\nu,\mu=1}^{2} A_{\nu\mu} x_\nu \bar{x}_\mu, \qquad \text{und} \qquad (30a) \quad L(x_1, x_2) = \sum_{\nu=1}^{2} B_\nu x_\nu$$

eine Hermitesche bzw. eine Linearform, deren Koeffizienten die folgenden Werte haben:

$$(31) \quad \begin{gathered} A_{11} = |\beta_1|^2 + |\beta_2|^2, \quad A_{12} = \bar{A}_{21} = \beta_2 \bar{\alpha}_2, \quad A_{22} = |\alpha_2|^2, \\ B_1 = \beta_2 \bar{\delta}_2 + \beta_1 \bar{\delta}_1, \quad B_2 = \alpha_2 \bar{\delta}_2. \end{gathered}$$

Es sei hervorgehoben, daß *die Hermitesche Form*

$$H(x_1, x_2) = |\beta_1 x_1|^2 + |\beta_2 x_1 + \alpha_2 x_2|^2$$

nach (27), (27a), (27b) *positiv-definit ist.*

§ 2.

Satz I. *Sei* $\mathfrak{F}$ *irgendeine in* $\mathfrak{G}$ *gelegene* (*zweidimensionale*) *Fläche von der Form* (1), (1a) *und* $f(X, Z)$ *eine in* $\mathfrak{G}$ *quadratintegrierbare Funktion, die dort den Wert* γ *ausläßt, im Koordinatenanfangspunkte* O *verschwindet und die Ungleichung*

$$(32) \quad \operatorname*{Max}_{\mathfrak{F}} |f(X, Z)| \leqq M$$

erfüllt. Es gilt dann

$$(33) \quad |\gamma| \geqq \frac{1}{2S}\left\{+\sqrt{[|L(f'_X, f'_Z)| + 2AM]^2 + SH(f'_X, f'_Z)} - [|L(f'_X, f'_Z)| + AM]\right\}$$

wenn $S > 0$ ist,

$$(33a) \quad |\gamma| \geqq \frac{1}{4}\frac{H(f'_X, f'_Z)}{|L(f'_X, f'_Z)| + AM}, \quad \text{wenn } S = 0 \text{ ist,}$$

wobei

$$f'_X = \left[\frac{\partial f(X, Z)}{\partial X}\right]_{X=Z=0}, \qquad f'_Z = \left[\frac{\partial f(X, Z)}{\partial Z}\right]_{X=Z=0}$$

bedeutet. *Die Größen* A, S, $H(.,.)$, $L(.,.)$, *die durch* (29), (29a), (30), (30a) *gegeben sind, sind dabei nur von* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{F}$ (*jedoch nicht von* $f(X, Z)$) *abhängig.*

Beweis. Da $f(X, Z)$ den Wert γ ausläßt, ist $\sqrt{1 - \frac{f(X,Z)}{\gamma}}$, wie

man leicht zeigen kann, in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbar. Wir können $\sqrt{1-\frac{f(X,Z)}{\gamma}}$ in $\mathfrak{A}$ nach dem System (25) entwickeln. Es gilt also in $\mathfrak{A}$

$$\sqrt{1-\frac{f(X,Z)}{\gamma}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu\psi_\nu(X,Z), \tag{34}$$

wo

$$C_\nu=\iint_{\mathfrak{F}}\sqrt{1-\frac{f(X,Z)}{\gamma}}\,\overline{\psi_\nu(X,Z)}\,do \tag{34a}$$

ist. Unter Benutzung von (26c), (26d), (26e) gilt in $\mathfrak{A}$

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{f(X,Z)}{\gamma}}&=C_0\Big[c_0+c_1X+c_2Z+\sum_{\nu=3}^{\infty}c_\nu\psi_\nu(X,Z)\Big]\\&\quad+C_1\Big[b_1X+b_2Z+\sum_{\nu=3}^{\infty}b_\nu\psi_\nu(X,Z)\Big]\\&\quad+C_2\Big[a_2Z+\sum_{\nu=3}^{\infty}a_\nu\psi_\nu(X,Z)\Big]+\sum_{\nu=3}^{\infty}C_\nu\psi_\nu(X,Z)\\&=C_0c_0+(C_0c_1+C_1b_1)X+(C_0c_2+C_1b_2+C_2a_2)Z+\sum_{\nu=3}^{\infty}P_\nu\psi_\nu(X,Z).\end{aligned} \tag{35}$$

Sei $\mathfrak{H}$ eine Hyperkugel um den Koordinatenanfangspunkt von genügend kleinem Radius, die in $\mathfrak{A}$ liegt. Die Funktionen $\psi_\nu(X,Z)$ $(\nu=3,4,5,6,\ldots)$ lassen sich in $\mathfrak{H}$ in Diagonalpotenzreihen entwickeln. Nach den Ergebnissen des § 1 fehlen in ihnen das konstante und die linearen Glieder, d. h. diese Potenzreihen haben die Gestalt (24a). Da in $\mathfrak{H}$ sowohl (35) wie auch (24a) absolut und gleichmäßig konvergieren, können wir $\psi_\nu(X,Z)$ durch die Potenzreihen (24a) ersetzen und die Summationsreihenfolge vertauschen; wir erhalten also schließlich für das Funktionselement von $\sqrt{1-\frac{f(X,Z)}{\gamma}}$ den Ausdruck

$$C_0c_0+(C_0c_1+C_1b_1)X+(C_0c_2+C_1b_2+C_2a_2)Z+\sum_{n,m=(2,0)}^{\infty}R_{nm}X^nZ^m. \tag{36}$$

Andererseits ist aber in $\mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{f(X,Z)}{\gamma}}&=1-\frac{1}{2}\Big[\frac{f(X,Z)}{\gamma}\Big]-\frac{1}{8}\Big[\frac{f(X,Z)}{\gamma}\Big]^2+\cdots\\&=1-\frac{1}{2\gamma}f'_XX-\frac{1}{2\gamma}f'_ZZ-\cdots.\end{aligned} \tag{37}$$

Da die Entwicklung nach Orthogonalfunktionen eindeutig ist, folgt aus dem Vergleich der ersten drei Koeffizienten in (36) und (37), daß

$$C_0c_0=1, \qquad C_0c_1+C_1b_1=-\frac{f'_X}{2\gamma}, \tag{38a}$$

$$C_0c_2+C_1b_2+C_2a_2=-\frac{f'_Z}{2\gamma} \tag{38b}$$

und somit

$$C_0=\delta_0, \qquad C_1=\delta_1-\frac{f'_X}{2\gamma}\beta_1, \tag{39a}$$

$$C_2=\delta_2-\frac{f'_X}{2\gamma}\beta_2-\frac{f'_Z}{2\gamma}\alpha_2 \tag{39b}$$

ist. Die Vollständigkeitsrelation liefert weiter

$$(40)\qquad \iint_{\mathfrak{F}} \left|1-\frac{f(X,Z)}{\gamma}\right| do = \sum_{\nu=0}^{\infty} |C_\nu|^2$$

$$= |\delta_0|^2 + \left|\delta_1 - \frac{1}{2\gamma}\beta_1 f'_X\right|^2 + \left|\delta_2 - \frac{f'_X}{2\gamma}\beta_2 - \frac{f'_Z}{2\gamma}\alpha_2\right|^2 + \dots .$$

Die Anwendung von (32) und (40) ergibt

$$(41)\qquad |\delta_0|^2 + \left|\delta_1 - \frac{1}{2\gamma}\beta_1 f'_X\right|^2 + \left|\delta_2 - \frac{1}{2\gamma}(f'_X\beta_2 + f'_Z\alpha_2)\right|^2$$

$$\leqq \iint_{\mathfrak{F}} \left|1+\frac{M}{|\gamma|}\right| do = \frac{M}{|\gamma|}A + |\delta_0|^2 + |\delta_1|^2 + |\delta_2|^2 + S,\ ^{16})$$

woraus

$$(41a)\qquad \frac{1}{4|\gamma|^2}\{(|\beta_1|^2+|\beta_2|^2)|f'_X|^2 + \beta_2\bar{\alpha}_2 f'_X\bar{f}'_Z + \bar{\beta}_2\alpha_2\bar{f}'_X f'_Z + |\alpha_2|^2|f'_Z|^2\}$$

$$\leqq \frac{M}{|\gamma|}A + S + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\gamma}L(f'_X, f'_Z) + \frac{1}{\bar{\gamma}}\overline{L(f'_X, f'_Z)}\right],$$

d. h.

$$(41b)\qquad \frac{1}{4|\gamma|^2}H(f'_X, f'_Z) \leqq \frac{1}{|\gamma|}[MA + |L(f'_X, f'_Z)|] + S$$

folgt. Ist nun $S > 0$, so erhalten wir aus (41b) die Ungleichung (33),[17]) ist $S = 0$, so erhalten wir die Ungleichung (33a), w. z. b. w.

Satz II. *Es sei $f(X, Z)$ in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbar, und es sei: $f(0, 0) = 0$. Läßt $f(X, Z)$ im abgeschlossenen $\mathfrak{G}$ den Wert γ aus und auf $\mathfrak{F}$ die ganze Kreisscheibe um γ als Mittelpunkt vom Radius $\sigma|\gamma|$ $(0 < \sigma < 1)$, so ist*

$$(42)\qquad \frac{1}{4|\gamma|^2}H(f'_X, f'_Z) + \frac{1}{|\gamma|}|L(f'_X, f'_Z)| \leqq A\left(\frac{1}{\sigma}-1\right) + S.$$

Beweis. Die Funktion $\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{f(X,Z)}{\gamma}}}$ ist in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbar. Da für jedes X, Z auf $\mathfrak{F}$

$$|f(X, Z) - \gamma| \geqq \sigma|\gamma|$$

ist, ist diese Funktion auf $\mathfrak{F}$ absolut kleiner als $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\sigma|\gamma|}{\gamma}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\sigma}}$. Wiederholt

---

[16]) Unter Benutzung der Vollständigkeitsrelation ist

$$\iint_{\mathfrak{F}} do = \iint_{\mathfrak{F}} |1|^2 do = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\delta_\nu|^2.$$

[17]) Um eine untere Schranke für $|\gamma|$ zu erhalten, könnte man Funktionen verwenden, die einer anderen Orthogonalrelation als (6) unterworfen sind. Benutzt man die in den Arbeiten S, H und A eingeführten Orthogonalfunktionen, so gelangt man zu einer unteren Schranke, die kleiner ist als die in (33) abgeleitete.

man die im Satze I angewandten Überlegungen und ersetzt man $\left(1+\frac{M}{|\gamma|}\right)$ durch $\frac{1}{\sigma}$, so gelangt man zu

$$(43)\qquad |\delta_0|^2+\left|\delta_1+\frac{1}{2\gamma}\beta_1 f'_X\right|^2+\left|\delta_2+\frac{1}{2\gamma}(f'_X\beta_2+f'_Z\alpha_2)\right|^2 \leqq \left(\frac{1}{\sigma}-1\right)A+|\delta_0|^2+|\delta_1|^2+|\delta_2|^2+S,$$

woraus (42) folgt.

Bemerkung. Die Sätze I und II erlauben eine naheliegende Verallgemeinerung.

Sei $f(X, Z)$ wieder eine Funktion, die in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbar ist, in O verschwindet und die Ungleichung (32) erfüllt, und $F(X, Z)$ eine ebenfalls in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbare Funktion, die nirgends im abgeschlossenen $\mathfrak{G}$ verschwindet. Es gelte schließlich im abgeschlossenen $\mathfrak{G}$ die Ungleichung

$$(44)\qquad f(X, Z) \neq F(X, Z).$$

Da $\frac{f(X,Z)}{F(X,Z)}$ in $\mathfrak{G}$ quadratintegrierbar ist und das Funktionselement mit

$$(45)\qquad \frac{f'_X}{F}X+\frac{f'_Z}{F}Z+\ldots \qquad (F\equiv F(0,0))$$

beginnt, folgt auf dem gleichen Wege wie früher, daß

$$|F| \geqq \frac{m}{2(mS+AM)}\left\{+\sqrt{\left[|L(f'_X, f'_Z)|+H(f'_X, f'_Z)\frac{(mS+AM)}{2}\right]}-|L(f'_X, f'_Z)|\right\}$$

ist, wobei m das Minimum von $|F(X, Z)|$ auf $\mathfrak{F}$ bedeutet.

Durch eine Spezialisierung, indem man entweder für $f(X, Z)$ oder für $F(X, Z)$ lineare Ausdrücke einsetzt, erhält man aus (46) interessante Ungleichungen, auf die aber hier nicht näher eingegangen werden soll.

(Eingegangen am 12. Dezember 1930.)

Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik.

Von

Antoni Przeborski in Warschau.

Die Frage betreffend Bildung der Bewegungsgleichungen nicht freier materieller Systeme hat eine ziemlich umfangreiche Literatur. Jedoch scheint mir die bisherige Formulierung und Lösung des Problems noch nicht genügend allgemein zu sein. Ich glaube den Grund dafür in der Tatsache zu finden, daß man dieses Problem fast ausschließlich vom rein mathematischen Standpunkte aus untersuchte und dabei gänzlich — oder fast gänzlich — den mechanischen Standpunkt außer acht ließ. Seit 1912 weist darauf beständig Delassus in seinen zahlreichen schönen Aufsätzen und in seinen „Leçons sur la dynamique“ (Paris 1913) hin. Im Jahre 1921 hat Béghin in seiner sehr interessanten Dissertation: „Étude théorique des compas gyrostatiques Anschütz et Sperry“, auf demselben Standpunkte fußend, neue Bindungen, die er „Zwangsgetriebe“ (mécanismes comportant un asservissement) nannte, untersucht. Jedoch hat auch Béghin nicht die allgemeinsten Konsequenzen gezogen.

Hier habe ich die Absicht, die Aufgabe der Bildung der Bewegungsgleichungen eines nicht freien materiellen Systems in allgemeinster Gestalt zu formulieren, und ihre Lösung in Fällen, auf welche man am häufigsten in der Praxis stößt, zu geben. Ich setze immer die Existenz, Eindeutigkeit und Stetigkeit aller Funktionen, die in den Rechnungen vorkommen, voraus und beschränke mich auf Systeme, deren Nebenbedingungen sich durch Gleichungen ausdrücken lassen. Es sei ein System von n materiellen Punkten gegeben, deren Kartesische Koordinaten wir mit $x_j (j = 1, 2, \ldots, 3n)$ bezeichnen. Es seien

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots,\ f_p = 0, \qquad (p < 3n) \tag{1}$$

der analytische Ausdruck der Nebenbedingungen, die holonom oder nichtholonom sein können; im letzten Falle können (1) Differentialgleichungen erster oder zweiter Ordnung — in bezug auf die Ableitungen nicht not-

wendig linear — sein. Die Gleichungen (1) nennen wir analytische Bindungen unseres Systems.

Um die Newtonschen Bewegungsgesetze oder das d'Alembertsche Prinzip auf die Untersuchung der Bewegung unseres Systems anwenden zu können, muß man ein Postulat annehmen, nämlich das Postulat der Reaktionskräfte, das man wie folgt formulieren kann: für jedes unfreie materielle System kann man Kräfte, die Reaktionskräfte heißen, finden, so daß die Bewegung, unter der Einwirkung der gegebenen Kräfte und der Reaktionskräfte und nach Beseitigung der Bindungen genau so vor sich geht wie unter der Wirkung der gegebenen Kräfte bei Vorhandensein der Bindungen. Mit anderen Worten, führt man die Reaktionskräfte ein, so darf man das unfreie System wie ein freies behandeln.

Bezeichnet man die Projektionen der gegebenen Kräfte und der Reaktionskräfte mit X_j und R_j $(j = 1, \ldots, 3n)$, die zugehörigen Massen der Punkte mit $m_j\,(m_1, m_2, m_3, \ldots)$, so kann man die Bewegungsgleichungen des Systems in der Newtonschen Form

$$m_j x_j'' = X_j + R_j, \tag{2}$$

oder in der Gestalt des d'Alembertschen Prinzips

$$\sum_{j=1}^{3n} (m_j x_j'' - X_j - R_j)\,\alpha_j = 0, \tag{3}$$

wo die α_j *ganz beliebige Zahlen* sind, schreiben. Die α_j kann man als Projektionen beliebiger Vektoren auf die Koordinatenachsen auffassen, wie man sich durch den Übergang zu einem anderen Achsensystem überzeugt.

Die Frage ist also auf die Bestimmung der Reaktionskräfte zurückgeführt. Zu dieser Bestimmung reichen die Gleichungen, die wir besitzen, nämlich die $3n$ Bewegungsgleichungen (2) und die p analytischen Bindungen (1), nicht aus, da $6n$ Unbekannte x_j und R_j zu bestimmen sind. *Die Bewegung eines unfreien Systems kann nur dann bestimmt werden, wenn man die Eigenschaften der mechanischen Getriebe, welche die analytischen Bindungen* (1) *realisieren, kennt.* Es sei noch bemerkt, daß diese Realisation auf verschiedene Weise zustande kommen kann.

Die Eigenschaften der Getriebe dürfen nicht alle R_j bestimmen, sonst hätten wir für $3n$ unbekannte Funktionen x_j $3n + p$ Gleichungen. Durch die Eigenschaften der Getriebe sollen sich vielmehr die R_j als Funktionen von t, x_j, x_j', x_j'' und von s unbekannten Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ergeben. Die Werte dieser Parameter sollen von den aufgeprägten Kräften abhängen. Es gilt also

$$R_j = R_j(t, x_i, x_i', x_i'', \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s). \tag{4}$$

Damit unsere Aufgabe bestimmt sei, muß, wie leicht zu ersehen $s = p$ sein.

Sind R_j lineare Funktionen von λ_i, und sind (1) endliche Gleichungen, Differentialgleichungen erster Ordnung, oder schließlich Differentialgleichungen zweiter Ordnung, — linear in den zweiten Ableitungen, — so sind die Gleichungen, die zur Bestimmung der λ_i dienen, in bezug auf die λ_i linear. Diese Gleichungen sollen in bezug auf λ_i eindeutig auflösbar sein.

Bei der Bestimmung der Reaktionskräfte pflegt man die Arbeit dieser Kräfte bei irgendwelchen Verrückungen der Punkte unseres Systems, d. h. die Summe

$$\sum_{j=1}^{3n} R_j \delta x_j, \tag{5}$$

wo δx_j Projektionen der Verrückungen sind, zu untersuchen. Diese „virtuelle" Arbeit sei gegeben, also

$$\sum_{j=1}^{3n} R_j \delta x_j = \sum_{j=1}^{3n} P_j \delta x_j, \tag{6}$$

wo P_j gegebene Funktionen der t, x_j, x_j', x_j'' sind und die δx_j den $s < 3n$ Bedingungen

$$F_1(\delta x_1, \ldots, \delta x_{3n}) = 0, \quad F_2(\delta x_1, \ldots, \delta x_{3n}) = 0, \quad \ldots, \quad F_s(\delta x_1, \ldots, \delta x_{3n}) = 0 \tag{7}$$

unterworfen sind.

Nehmen wir an, daß wir aus den Gleichungen (7) s der δx_j, z. B. $\delta x_1, \ldots, \delta x_s$ durch $\nu = 3n - s$ bestimmen können. Setzt man in (6) die durch $\delta x_{s+1}, \ldots, \delta x_{3n}$ ausgedrückten Werte von $\delta x_1, \ldots, \delta x_s$ ein, so bekommt man eine Gleichung, die für beliebige $\delta x_{s+1}, \ldots, \delta x_{3n}$ erfüllt sein soll. Aus dieser letzten Bedingung erhält man Gleichungen zwischen den R_j. Ist die Zahl der unabhängigen Gleichungen dieser Art gleich $3n - p$, so kann man aus ihnen die R_j als Funktionen von p Parametern bestimmen. Dieser Fall tritt immer ein, wenn (7) p lineare, homogene voneinander unabhängige Gleichungen in bezug auf die δx_j darstellen, also wenn sie die Gestalt

$$\sum_{j=1}^{3n} A_{ij} \delta x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{8}$$

haben, unter A_{ij} gegebene Funktionen von t, x_i, x_i', x_i'' verstanden

In diesem Falle erhält man aus (6) und (8)

$$R_j = P_j + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_{ij}. \tag{9}$$

Die Bewegungsgleichungen (2) haben alsdann die Gestalt

$$m_j x_j'' = X_j + P_j + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_{ij}. \tag{10}$$

Wenn (1) endliche Gleichungen, Differentialgleichungen erster Ordnung, oder schließlich lineare in bezug auf x_j'' Differentialgleichungen zweiter Ord-

nung sind, so wird man die Funktion λ_i aus den linearen Gleichungen

$$(11)\quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \sum_{j=1}^{3n} \frac{1}{m_j} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} A_{ij} + \sum_{j=1}^{3n} \frac{1}{m_j} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} (X_j + P_j) + \omega_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

gewinnen, wobei $\xi_j = x_j$ im Falle $f_k = 0$ eine endliche Gleichung, $\xi_j = x_j'$, wenn sie eine Differentialgleichung erster Ordnung, und $\xi_j = x_j''$, wenn sie eine lineare in bezug auf x_j'' Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt, zu setzen ist; ω_k ist eine bestimmte Funktion von t, x_j, x_j'.

Ist die Determinante

$$\| \alpha_{ki} \|, \qquad \alpha_{ki} = \sum_{j=1}^{3n} \frac{1}{m_j} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} A_{ij},$$

gleich Null, so sind, wie man leicht zeigt, die Gleichungen (11) nicht voneinander unabhängig, und die Kenntnis der Arbeit der Reaktionskräfte bei den Verrückungen, die den Gleichungen (8) genügen, reicht nicht aus, um diese Kräfte zu bestimmen.

Bestehen die Getriebe, welche die analytischen Bindungen (1) realisieren, aus starren Körpern, von denen sich gewisse berühren, sind also die Reaktionskräfte nur Druck- und Reibungskräfte starrer Körper, so ist es bequem, die Arbeit der Reaktionskräfte bei den virtuellen Verrückungen zu betrachten, d. h. bei Verrückungen, die den Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} \delta x_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

genügen, wobei $\xi_j = x_j$, wenn $f_k = 0$ eine endliche, $\xi_j = x_j'$, wenn sie eine Differentialgleichung erster Ordnung, und endlich $\xi_j = x_j''$, wenn sie eine lineare in bezug auf x_j'' Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt, zu setzen ist.

Benutzt man auch Zwangsgetriebe, in welchen die Reaktionskräfte nicht nur Druck- und Reibungskräfte, sondern auch elektromagnetische Kräfte, wie im Kreiselkompaß von Anschütz-Sperry, oder Druckkräfte komprimierter Gase u. a. sind, so kann es bequemer sein, die Arbeit der Reaktionskräfte nicht allein bei den „virtuellen", sondern auch bei anderen Verrückungen zu untersuchen.

Es kommt vor, daß P_j auch noch von gewissen m weiteren Parametern $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ abhängen. Dies geschieht z. B. beim Vorhandensein der Reibung. Soll in diesem Falle die Aufgabe bestimmt sein, wenn die Verrückungen δx_j k Gleichungen von der Form (8) genügen, so muß entweder

$$m + k = p$$

sein, wobei p die Anzahl der Nebenbedingungen ist, oder, wenn

$$m + k > p$$

gilt, so müssen aus den Eigenschaften der Getriebe die fehlenden

$$m + k - p = r$$

Gleichungen zwischen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ entspringen. Bei Vorhandensein der Reibung folgen beispielsweise diese Gleichungen aus den Gesetzen der Reibung.

Ich möchte jetzt die Bewegungsgleichungen des Systems, die den Lagrangeschen Gleichungen ohne Multiplikatoren entsprechen, aufstellen, wenn die Reaktionskräfte durch ihre Arbeit (6) bei den Verrückungen, die den Gleichungen (8) genügen, gegeben sind. Nehmen wir an, daß die analytischen Bindungen (1) aus m endlichen Gleichungen,

$$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; \ldots, \; f_m = 0, \tag{12}$$

h Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$f_{m+1} = 0, \; f_{m+2} = 0, \; \ldots, \; f_{m+h} = 0, \tag{13}$$

und schließlich aus g Differentialgleichungen zweiter Ordnung,

$$f_{m+h+1} = 0, \; f_{m+h+2} = 0, \; \ldots, \; f_{m+h+g} = 0, \tag{14}$$

wo $m + h + g = p$ gibt, bestehen.

Wenn es möglich ist, unter Anwendung der Gleichungen (12) alle x_j als eindeutige Funktionen von t und $\mu = 3n - m$ Parametern $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ zu bestimmen, so erhält man

$$x_j = x_j(t, q_1, q_2, \ldots, q_\mu) \qquad (j = 1, 2, \ldots, 3n). \tag{15}$$

Setzt man diese Werte von x_j in (13) ein, so bekommt man h Differentialgleichungen erster Ordnung in bezug auf die q_k, nämlich

$$\varphi_1 = 0, \; \varphi_2 = 0, \; \ldots, \; \varphi_h = 0. \tag{16}$$

Wenn es weiter möglich ist, vermittels (16) die q_k' als eindeutige Funktionen von t, q_k und $\nu = \mu - h$ Parametern r_l auszudrücken, so erhält man

$$q_k' = \psi_k(t, q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\nu) \qquad (k = 1, \ldots, \mu). \tag{17}$$

Die Gleichungen (17) sind den Gleichungen (16) äquivalent. Aus (15) und (17) ergibt sich dann

$$x_j' = \chi_j(t, q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\nu) \tag{18}$$

und

$$x_j'' = \omega_j(t, q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\nu, r_1', \ldots, r_\nu'). \tag{19}$$

Setzt man nun die Werte (15), (18) und (19) von x_j, x_j', x_j'' in (14) ein, und bedient man sich dabei der Formeln (17), so bekommt man g Gleichungen erster Ordnung in bezug auf r_l

$$\vartheta_1 = 0, \; \vartheta_2 = 0, \; \ldots, \; \vartheta_g = 0. \tag{20}$$

Nehmen wir an, daß man auf Grund von (20) die r_l' als Funktionen von t, q_k, r_l und $\varrho = \nu - g$ Parametern $s_1, s_2, \ldots, s_\varrho$ darstellen kann, so finden wir

$$r_l' = \pi_l(t, q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\nu, s_1, \ldots, s_\varrho) \quad (l = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{21}$$

Wir sehen also, daß sich die Bestimmung der Bewegung unseres Systems auf die Bestimmung der

$$\mu + \nu + \varrho$$

Funktionen q_k, r_i, s_l reduziert. Diese Funktionen genügen den $\mu + \nu$ Differentialgleichungen erster Ordnung (17) und (21), die den Gleichungen (16) und (20) äquivalent sind. Um noch die fehlenden ϱ Gleichungen, die gerade die gesuchten Bewegungsgleichungen unseres Systems darstellen, zu finden, wenden wir das d'Alembertsche Prinzip (3) an, indem wir $\alpha_j = \delta x_j$ setzen, wobei δx_j den Gleichungen (8) genügen.

Diesen p Gleichungen fügen wir noch $3n - p$ willkürliche Gleichungen hinzu

$$\sum_{j=1}^{3n} A_{p+k,j}\,\delta x_j = \delta\sigma_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 3n - p), \tag{22}$$

unter $\delta\sigma_k$ ganz willkürliche Zahlen, unter $A_{p+k,j}$ Funktionen von t, x_j, x_j', x_j'' verstanden, so daß (8) und (22) ein System unabhängiger, in bezug auf δx_j linearer Gleichungen bilden. Wegen (15), (18), (19) und (21) können wir alle $A_{i,j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 3n)$ als Funktionen von t, q_k, r_i, s_l betrachten.

Aus (8) und (22) bekommt man

$$\delta x_j = \sum_{k=1}^{3n-p} a_{jk}\,\delta\sigma_k \qquad (j = 1, \ldots, 3n). \tag{23}$$

Wegen der Willkürlichkeit der $\delta\sigma_k$ erfüllen die Funktionen A_{ij}, a_{jk} die Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{3n} A_{ij}\,a_{jk} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, 3n - p) \tag{24}$$

identisch. Da nun die Gleichungen (8) und (22) unabhängig sind, so ist der Rang der Matrix

$$\| a_{jk} \|$$

gleich $\varrho = 3n - p$.

Setzt man jetzt in das d'Alembertsche Prinzip (3) für α_j die durch (23) definierten δx_j ein und zieht man (9) und (24) heran und beachtet die Willkürlichkeit der $\delta\sigma_k$, so ergeben sich $\varrho = 3n - p$ Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{3n} a_{jk}(m_j x_j'' - X_j - P_j) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \varrho = 3n - p), \tag{25}$$

die gerade die gesuchten Bewegungsgleichungen unseres Systems darstellen. Die Beziehungen (25) stellen wegen (15), (18), (19) und (21) in bezug auf q_k, r_i, s_l endliche Gleichungen dar. Bestimmt man s_l aus diesen Gleichungen und setzt man die erhaltenen Werte in die Gleichung (21) ein, so bekommt man $\mu + \nu$ Differentialgleichungen (17), (21) erster Ordnung zur Bestimmung der $\mu + \nu$ Funktionen q_k und r_i. Zur vollen Bestimmung dieser Funktionen genügt es, ihre Werte für irgendeinen Zeitpunkt t_0 vorzugeben.

Bestehen die analytischen Bindungen (1) nur aus endlichen Gleichungen und aus Differentialgleichungen erster Ordnung, ist also $g = 0$, so hat man nur die Formeln (15) und (17), aus denen sich (18) und (19) ergeben. Es gilt dann, die $\mu + \nu = 3n - m - h = 3n - p$ Funktionen q_k und r_i zu bestimmen. Setzt man die Werte (15), (18) und (19) in (25) ein, so erhält man $\varrho = \nu$ Differentialgleichungen erster Ordnung in bezug auf r_i. Wir haben also $\mu + \nu$ Differentialgleichungen erster Ordnung (17) und (25), die zur Bestimmung der $\mu + \nu$ unbekannten Funktionen $q_1, \ldots, q_\mu, r_1, \ldots, r_\nu$ dienen.

Nehmen wir an, daß die Bindungen „glatt“ sind, d. h. daß die Arbeit der Reaktionskräfte bei den „virtuellen“ Verrückungen

$$\delta x_j = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \delta q_k$$

gleich Null ist, daß die nichtholonomen analytischen Bindungen in bezug auf x_j lineare Differentialgleichungen erster Ordnung sind, also die Gestalt

$$\sum_{j=1}^{3n} b_{ij} x_j' + b_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

haben, und schließlich, daß δx_j noch den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{3n} b_{ij} \delta x_j = 0$$

genügen, dann bekommen wir die Gleichungen, die von Maggi gefunden worden sind, und die Levi-Civita und Amaldi die „allgemeinsten Bewegungsgleichungen für glatte Bindungen“ nennen[1]). Wie wir sehen, sind sie ein sehr spezieller Fall unserer Gleichungen (25).

Wenn wir jetzt für die Parameter r_i, die in (17) vorkommen, die Ableitungen $q_1', \ldots, q_\nu'$ nehmen, so bekommen wir statt der μ Gleichungen (17) nur $h = \mu - \nu$ Gleichungen

$$(26) \qquad q_l' = \psi_l(t, q_1, \ldots, q_\mu, q_1', \ldots, q_\nu') \qquad (l = \nu + 1, \ldots, \mu),$$

[1]) T. Levi-Civita e U. Amaldi, Lezioni di meccanica razionale 2, parte 1, p. 401.

also statt (18) und (19) die Formeln

$$x_j' = \chi_j(t, q_1, \ldots q_\mu, q_1', \ldots, q_\nu'), \tag{27}$$

$$x_j'' = \omega_j(t, q_1, \ldots, q_\mu, q_1', \ldots q_\nu', q_1'', \ldots, q_\nu''). \tag{28}$$

Setzen wir nunmehr die Werte (15), (27) und (28) von x_j, x_j', x_j'' in die Gleichungen (14) ein und nehmen wir für $s_1, s_2, \ldots, s_\varrho$ die Ableitungen $q_1'', q_2'', \ldots, q_\varrho''$, so erhalten wir statt ν Gleichungen (21) die $\nu - \varrho$ Gleichungen

$$q_i'' = \pi_i(t, q_1, \ldots, q_\mu, q_1', \ldots, q_\nu', q_1'', \ldots, q_\varrho'') \quad (i = \varrho + 1, \ldots \nu). \tag{29}$$

Für x_j'' ergibt sich dann

$$x_j'' = \bar{\omega}_j(t, q_1, \ldots, q_\mu, q_1', \ldots, q_\nu', q_1'', \ldots, q_\varrho''). \tag{30}$$

Setzt man die Werte (15), (27) und (30) von x_j, x_j', x_j'' in die Bewegungsgleichungen (25) ein, so findet man $\varrho = 3n - p$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung in bezug auf $q_1, q_2, \ldots, q_\varrho$. Wir haben jetzt ν Gleichungen (25) und (29) zweiter Ordnung in bezug auf $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ und $\mu - \nu$ Differentialgleichungen (26) erster Ordnung in bezug auf $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$. Insgesamt erhalten wir so μ Gleichungen zur Bestimmung der μ unbekannten Funktionen $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$. Um eine bestimmte Lösung zu erhalten, müssen wir noch die Anfangswerte von $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ und $q_1', q_2', \ldots, q_\nu'$ vorgeben.

Die Funktionen a_{jk}, die in unseren Bewegungsgleichungen (25) vorkommen, hängen von der Wahl der Gleichungen (22) ab. Es entsteht so die Frage, ob die Bewegungsgleichungen, die man bekommt, wenn man statt der Gleichungen (22) andere Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{3n} A^*_{p+k,j}\, \delta x_j = \delta \sigma_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 3n - p) \tag{31}$$

annimmt, den Gleichungen (25) äquivalent sind. Die Auflösung der Gleichungen (8) und (31) liefert

$$\delta x_j = \sum_{k=1}^{3n-p} a^*_{jk}\, \delta \sigma_k,$$

wo der Rang der Matrix

$$\| a^*_{jk} \|$$

gleich $\varrho = 3n - p$ ist, und die Funktionen a^*_{jk} die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{3n} A_{ij}\, a^*_{jk} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, 3n - p) \tag{32}$$

identisch erfüllen.

Da der Rang der Matrix $\| a_{jk} \|$ gleich $\varrho = 3n - p$ ist, existieren ϱ^2 Funktionen $\beta_{1k}, \beta_{2k}, \ldots, \beta_{\varrho k}$ $(k = 1, 2, \ldots, \varrho = 3n - p)$ derart, daß für alle $j = 1, 2, \ldots, 3n$ und $k = 1, 2, \ldots, \varrho$

$$a^*_{jk} = \beta_{1k} a_{j1} + \beta_{2k} a_{j2} + \ldots + \beta_{\varrho k} a_{j\varrho} \tag{33}$$

gilt. Setzt man in den Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{3n} a_{jk}^{*}(m_j x_j'' - X_j - P_j) = 0 \tag{34}$$

links die Werte (33) von a_{jk}^{*} ein, so findet man

$$\sum_{j=1}^{3n}(m_j x_j'' - X_j - P_j)\, a_{jk}^{*} = \sum_{i=1}^{3n-p} \beta_{ik} \sum_{l=1}^{3n-p} \sum_{j=1}^{3n} a_{jl}(m_j x_j'' - X_j - P_j). \tag{35}$$

Aus (35) schließen wir, daß die Gleichungen (34) aus den Gleichungen (25) folgen. Ebenso kann man beweisen, daß umgekehrt die Gleichungen (34) die Gleichungen (25) zur Folge haben.

Jetzt wollen wir noch eine Aufgabe betrachten, die sich nicht unseren bisherigen Betrachtungen unterordnet, und die in spezieller Form bei P. Appell vorkommt. Es handelt sich um den Fall, wenn die Ableitungen x_j' als Funktionen von $t, q_1, \ldots, q_\mu, q_1', \ldots, q_\mu'$ gegeben sind,

$$x_j' = \psi_j(t, q_1, \ldots, q_\mu, q_1', \ldots, q_\mu'), \tag{36}$$

und der in der Praxis ziemlich oft vorkommt. Damit alle q_k und R_j aus den $3n$ Newtonschen Gleichungen bestimmt werden können, müssen die Reaktionskräfte von $3n - \mu = s$ Parametern abhängen. Wenn also die Reaktionskräfte wiederum vermittels ihrer Arbeit bei den Verrückungen δx_j, die den unabhängigen Bedingungen der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{3n} A_{ij}\, \delta x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{37}$$

genügen, gegeben sind, wo A_{ij} gegebene Funktionen von t, q_k, q_k', q_k'' bedeuten, muß die Zahl dieser Bedingungen gleich $s = 3n - \mu$ sein.

Wie in dem oben betrachteten Falle fügen wir den Gleichungen (37) $3n - p = \mu$ Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{3n} A_{p+k,\,j}\, \delta x_j = \delta\sigma_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 3n - \mu) \tag{38}$$

hinzu, worin die $\delta\sigma_k$ willkürliche Zahlen und $A_{p+k,\,j}$ Funktionen von t, q_i, q_i', q_i'' bedeuten, so daß die Gleichungen (37) und (38) in bezug auf δx_j ein System von $3n$ unabhängigen Gleichungen bilden. Aus (37) und (38) folgt jetzt

$$\delta x_j = \sum_{k=1}^{3n-\mu} a_{jk}\, \delta\sigma_k. \tag{39}$$

Setzt man diese Werte von δx_j in das d'Alembertsche Prinzip (3) ein, erinnert man sich weiter an die Gleichung (6), in welcher die P_j gegebene Funktionen von t, q_k, q_k', q_k'' sind, und beachtet die Willkürlichkeit von $\delta\sigma_k$, so gelangt man zu den μ Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{3n} a_{jk}(m_j x_j'' - X_j - P_j) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{40}$$

die die Bewegungsgleichungen unseres Systems darstellen. Sie sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung in bezug auf q_k. Man beweist leicht — in ähnlicher Weise, wie wir das oben getan haben —, daß man von den Gleichungen (40) zu äquivalenten Gleichungen übergeht, wenn man anstatt der Gleichungen (38) irgendwelche andere, ihnen ähnliche Gleichungen nimmt.

In dem Falle, wo die Gleichungen (36) linear in dem q_k' sind, also wenn

$$x_j' = \sum_{k=1}^{\mu} b_{jk} q_k' + b_j \tag{41}$$

und die Verrückungen „virtuell", d. h.

$$\delta x_j = \sum_{k=1}^{\mu} b_{jk} \delta q_k,$$

sind, gehen die Gleichungen (40) in die Appellschen über. Aus (41) folgt dann nämlich, daß in (40)

$$a_{jk} = b_{jk} = \frac{\partial x_j''}{\partial q_k''} \tag{42}$$

gilt. Führt man also die Energie der Beschleunigungen

$$S = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} m_j x_j''^2 \tag{43}$$

ein, so erhält man leicht aus (42) und (43) für die Gleichungen (40) die Gestalt

$$\sum_{j=1}^{3n} m_j x_j'' \frac{\partial x_j''}{\partial q_k''} = \frac{\partial S}{\partial q_k''} = \sum_{j=1}^{3n} (X_j + P_j) b_{jk}, \tag{44}$$

d. h. die Gestalt der „allgemeinen" Appellschen Gleichungen.

Wäre endlich das System holonom, d. h. hätten die Gleichungen (41) die Gestalt

$$x_j' = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial x_j}{\partial t},$$

was allemal dann eintritt, wenn die b_{jk} in (41) den Bedingungen

$$\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_h} = \frac{\partial b_{jh}}{\partial q_k}, \qquad \frac{\partial b_{jk}}{\partial t} = \frac{\partial b_j}{\partial q_k}$$

für alle $j = 1, 2, \ldots, 3n$; $h, k = 1, 2, \ldots, \mu$ identisch genügen, so wären die x_j bestimmte Funktionen von $q_1, \ldots, q_\mu$. In diesem Fall haben wir

$$a_{jk} = b_{jk} = \frac{\partial x_j}{\partial q_k} = \frac{\partial x_j'}{\partial q_k'},$$

und die Gleichungen sind gerade die gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen.

Zum Schluß möchte ich noch bemerken, daß man die Methode, die ich hier benutzt habe, ohne irgendwelche Änderungen auf die Lösung folgender Aufgabe anwenden kann.

Es seien die Bewegungsgleichungen eines unfreien materiellen Systems mit irgendwelchen Bindungen K gegeben. Man soll die Bewegungsgleichungen dieses Systems finden, wenn man zu den Bindungen K noch irgendwelche neue Bindungen L hinzufügt. Dabei nimmt man an, daß das Postulat der Reaktionskräfte und die Additivität der Kräfte gilt. Unter Additivität der Kräfte verstehen wir folgendes: bestimmen die Funktionen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\mu$ und $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ zwei Systeme $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ von Kräften, die auf ein materielles System S wirken, so bestimmen dann die Funktionen $Q_1 + P_1$, $Q_2 + P_2, \ldots, Q_\mu + P_\mu$ das System von Kräften, das aus den Systemen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ besteht.

(Eingegangen am 20. März 1931.)

Some conditions for the existence of two periodic integrals of the homogeneous linear differential equation of the second order.

By

F. Underwood in Nottingham.

1. The linear differential equation of the second order

$$L(Z) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q\right) Z = 0 \tag{1}$$

has been considered by G. Mammana[1]), who investigated the possibility of its decomposition into the form

$$\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} + \beta\right) Z = 0\,. \tag{2}$$

Assuming that p and q were functions of x finite and continuous in a certain interval (a, b) of the real variable x, Mammana found that in all cases (1) could be transformed into (2), but that, while in some cases, α and β could be found as real functions of x, in general they were complex. In both cases the complete primitive was given and its form, especially in the case when α and β are complex, suggested that conditions might be found that both integrals of the fundamental system should be periodic. Some of these conditions are given below.

2. The chief results of Mammana's work which are required are as follows. —

The forms (1) and (2) are identical if

$$\alpha + \beta = p, \quad \beta' + \alpha\beta = q\,. \tag{3}$$

[1]) G. Mammana, Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari, Math. Zeitschrift **25** (1926), S. 734—748. This work is continued and extended in a more recent paper, Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari, Math. Zeitschrift **33** (1931), S. 186—231.

From (3), β must satisfy the equation of Riccati,

$$\beta' = \beta^2 - p\beta + q. \tag{4}$$

If a real integral β of (4) can be found, α is given as a real function of x by (3), and the complete primitive of (1) valid in the interval (a, b) is

$$Z = k e^{-\int_a^x \beta\, dx}\left[\int_a^x e^{\int_a^x (\beta-\alpha)\, dx} dx + h\right]. \tag{5}$$

In general, however, it is not possible to find β as a real function of x satisfying (4), so Mammana put $\alpha = v - ih$, $\beta = u + ih$, where u, v, h are real functions of x defined in the interval (a, b). Then

$$q = \beta' + \alpha\beta = u' + uv + h^2, \tag{6}$$

and $h' + h(v - u) = 0$, so

$$h = c e^{\int_a^x (u-v)\, dx} = c\varrho(x), \tag{7}$$

where c is a real constant. Now put

$$\eta(x) = -\int_a^x u\, dx, \qquad \xi(x) = \int_a^x \varrho\, dx. \tag{8}$$

Then the complete primitive takes the form

$$Z = e^{\eta}(c_1 \cos c\xi + c_2 \sin c\xi) = K e^{\eta} \sin\{c(\xi - \gamma)\}. \tag{9}$$

3. The result (9) clearly suggests the consideration of periodic integrals, and perhaps the simplest case is that in which $\eta = 0$. If then we can find a constant λ such that

$$\xi(x + \lambda) - \xi(x) = \frac{2\pi}{c},$$

the complete primitive given by (9) is periodic, and, since it contains two arbitrary constants, a fundamental system is given in which both integrals are of period λ.

Now $\eta = 0$ implies $u = 0$ and then $v = p$. Hence

$$\varrho(x) = e^{-\int_a^x p\, dx}.$$

Finally, necessary and sufficient conditions for the existence of two integrals of period λ in this case are:

It must be possible to find constants c and λ such that

(a) $\quad q = c^2\varrho^2$, where $\varrho(x) = e^{-\int_a^x p\, dx}$,

(b) $\quad \xi(x + \lambda) - \xi(x) = \frac{2\pi}{c}$, where $\xi(x) = \int_a^x \varrho\, dx$.

Evidently (b) may be written in the form

$$\int_x^{x+\lambda} \varrho\, dx = \frac{2\pi}{c}.$$

A simple example of the type considered above is

$$Z'' + \tan\frac{x}{2}\cdot Z' + (1+\cos x)^2 Z = 0. \tag{10}$$

It it easily found that

$$\varrho(x) = \frac{1+\cos x}{1+\cos a}, \qquad \xi(x) = \frac{x+\sin x - a - \sin a}{1+\cos a},$$
$$\lambda = 2\pi, \quad c = 1+\cos a,$$
$$Z = A\sin(x+\sin x - \gamma).$$

4. A second case in which the complete primitive (9) will be periodic is that in which η is of period λ and

$$\xi(x+\lambda) - \xi(x) = \frac{2\pi}{c}, \text{ as before.}$$

Necessary and sufficient conditions in this case are as follows:

It must be possible to find u and v as real functions of x finite and continuous in the interval (a, b), and constants c and λ such that

(I) $$u + v = p,$$

(II) $$u' + uv + c^2\varrho^2 = q, \quad \text{where} \quad \varrho = e^{\int_a^x (u-v)dx},$$

(III) $$\eta(x+\lambda) - \eta(x) = 0, \quad \text{where} \quad \eta(x) = -\int_a^x u\, dx,$$

(IV) $$\xi(x+\lambda) - \xi(x) = \frac{2\pi}{c}, \quad \text{where} \quad \xi(x) = \int_a^x \varrho\, dx.$$

(III) and (IV) may be written in the alternative forms

$$\int_x^{x+\lambda} u\, dx = 0,$$
$$\int_x^{x+\lambda} \varrho\, dx = \frac{2\pi}{c}.$$

Subsidiary conditions which may be deduced from the above set (but do not replace them) are as follows:

From (III), (V) $u(x+\lambda) - u(x) = 0$.

From (IV), (VI) $\varrho(x+\lambda) - \varrho(u) = 0$.

From (V) and (VI), (VII) $v(x+\lambda) - v(x) = 0$.

From (V) and (VII), (VIII) $p(x+\lambda) - p(x) = 0$.

The last of these in useful in showing that if p is of period w, $\lambda = nw$, where n is an integer that (in actual practice) is probably small, and may be unity.

An example of an equation which may be treated by the above methods is

$$Z'' + \left(2\sin x + \tan\frac{x}{2}\right)Z' + (3 + 2\cos x)\,Z = 0. \tag{11}$$

Hence $u = \sin x$, $v = \sin x + \tan\frac{x}{2}$,

$$\eta(x) = \cos x - \cos a, \qquad \varrho(x) = \frac{1+\cos x}{1+\cos a},$$

$$\xi(x) = \frac{x + \sin x - a - \sin a}{1+\cos a},$$

$$\lambda = 2\pi, \qquad c = 1 + \cos a.$$

The conditions (I) to (VIII) are satisfied and

$$Z = Ae^{\cos x}\sin(x + \sin x - \gamma).$$

5. The case in which a real integral β of the equation (4) of Riccati's form can be found does not lead readily to definite conditions for the existence of periodic integrals of (1), but merely comes back to the condition that the real integral of (4) should be periodic.

From the form of the complete primitive (5) at least one integral of period λ exists if

$$e^{-\int_a^{x+\lambda}\beta\,dx} = e^{-\int_a^{x}\beta\,dx},$$

i. e.

$$\int_a^{x+\lambda}\beta\,dx = \int_a^{x}\beta\,dx, \tag{12}$$

or

$$\int_x^{x+\lambda}\beta\,dx = 0,$$

or

$$\beta(x+\lambda) - \beta(x) = 0.^{2}) \tag{13}$$

so that the real integral of (4) (assumed to exist) must be of period λ.

If (12) is satisfied, at least one integral of the fundamental system is periodic. The second integral is then periodic if

$$\int_x^{x+\lambda}\varphi(x)\,dx = \int_a^{x}\varphi(x)\,dx, \tag{14}$$

where

$$\varphi(x) = e^{\int_a^x(\beta-\alpha)\,dx}.$$

---

[2]) It will be noted, of course, that while (13) may be deduced from (12), the converse is not necessarily true.

From (14)

$$\varphi(x+\lambda)-\varphi(x)=0, \tag{15}$$

and then

$$\alpha(x+\lambda)-\alpha(x)=0. \tag{16}$$

From (13) and (16) it follows that

$$p(x+\lambda)-p(x)=0. \tag{17}$$

Now put $\int_a^x \beta\,dx=\psi(x)$ and $\int_a^x \varphi(x)\,dx=f(x)$.

If condition (12) is not satisfied, one integral of the fundamental system is not periodic, and the other integral is of period λ only if

$$e^{-\psi(x)}\cdot f(x)=e^{-\psi(x+\lambda)}\cdot f(x+\lambda). \tag{18}$$

Except for the trivial case $\beta=0=\psi(x)$, this condition cannot be satisfied unless $\psi(x+\lambda)=\psi(x)$, which is contrary to hypothesis. Thus, in general, if (12) is not satisfied, neither of the fundamental integrals of (1) is periodic. There remains, however, one possible case, which is easily found to exist by considering some simple equations. Even though the first integral of (5), which is now written $h\,k\,e^{-\psi(x)}$, may not be periodic, it may happen that part of the second integral $k\,e^{-\psi(x)}\cdot f(x)$ is periodic, and it may be possible to take this periodic part as the first integral of a fundamental system, and to add the remaining part to the non-periodic integral $h\,k\,e^{-\psi(x)}$ to form the second integral of the fundamental system.

Thus, assuming that real functions α and β exist, the relations between (1) and (4) concerning the periodicity of their integrals may be summarised as follows:

(a) Equation (1) may have a periodic integral if (4) has a periodic integral β.

(b) If β satisfies condition (12), (1) has at least one periodic integral.

(c) If β satisfies both conditions (12) and (14)[3]), (1) has two periodic integrals.

(d) If β does not satisfy condition (12), in general (1) has no periodic integral, but an exceptional case (giving one periodic integral), may arise as explained above. Simple examples illustrating the different cases are given below.

$$Z''+(x+\cos x)\,Z'+(x\cos x-\sin x)\,Z=0. \tag{19}$$

An integral β of (4) is $\cos x$, giving $\alpha=x$. The corresponding integral of (1) is $A\,e^{-\sin x}$, and (12) is satisfied for $\lambda=2\pi$, but (14) is not satisfied.

$$(1-\cos 2x)\,Z''-3\sin 2x\cdot Z'+2(2+\cos 2x)\,Z=0. \tag{20}$$

[3]) When the integral β of (4) has been found, $\beta-\alpha=2\beta-p$, from (3).

An integral β of (4) is $-\cot x$, conditions (12) and (14) are satisfied for $\lambda = 2\pi$, and the complete primitive consisting of two periodic integrals is

$$Z = A \sin x + B \sin 2x,$$

$$Z'' + (x + \cos x) Z' + (x \cos x + 1) Z = 0. \tag{21}$$

An integral β of (4) is x, giving $\alpha = \cos x$. The corresponding integral of (1) is $A e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Conditions (12) and (14) are not satisfied and neither integral is periodic.

$$(\sin x - x \cos x) Z'' - x \sin x \cdot Z' + \sin x \cdot Z = 0. \tag{22}$$

An integral β of (4) is $-x^{-1}$, and condition (12) is not satisfied. With the notation used above in discussing the exceptional case, it is found that

$$e^{-\psi(x)} = \frac{x}{a}; \qquad f(x) = \frac{a^2}{\sin a - a \cos a}\left(\frac{\sin a}{a} - \frac{\sin x}{x}\right).$$

Thus the complete primitive takes the form

$$Z = \frac{kx}{a}\left[\frac{a^2}{\sin a - a \cos a}\left(\frac{\sin a}{a} - \frac{\sin x}{x}\right) + h\right],$$

i. e.

$$Z = Ax + B \sin x,$$

so that one integral is periodic, even though (12) is not satisfied.

6. It may be of some interest to see to what extent the methods outlined above may be applied to two well-known linear equations having simply-periodic coefficients, viz. Mathieu's Equation,

$$Z'' + (\eta - 2\theta \cos 2x) Z = 0, \tag{23}$$

and the equation

$$Z'' + \xi \sin 2x Z' + (\eta - p\xi \cos 2x) Z = 0 \tag{24}$$

which has been discussed in detail by E. L. Ince[4]).

In the former case it seems impossible to make any use of the conditions obtained above. but in the latter the method of § 5 leads readily to an integral β of (4) in the simple cases discussed by Ince, and could be used for larger values of the constant p. It must be noted, however, that while the method can be used for integral values of p, it cannot give the complete generality of Ince's results for all such values.

In the trivial case when $\eta = 0$, $p = -2$ and $2m$ is written for ξ, (4) has an integral $\beta = 2m \sin 2x$ and (24) has a corresponding integral, $Z = e^{m \cos 2x}$.

---

[4]) E. L. Ince, "A linear differential equation with periodic coefficients", Proc. London Math. Soc. (2), 23 (1924), S. 56—74.

Three simple cases giving solutions in finite form are given below:

(a) $p = 1$.

(1) $\beta = \tan x$, $Z = \cos x$, provided that $\eta - \xi - 1 = 0$,[5])

(2) $\beta = -\cot x$, $Z = \sin x$, provided that $\eta + \xi - 1 = 0$,[5])

(b) $p = 2$.

(1) $\beta = \frac{2 \sin 2x}{a + \cos 2x}$, $Z = a + \cos 2x$, where $a = 2\xi/\eta$, provided that $\eta^2 - 4\eta - 4\xi^2 = 0$,[6])

(2) $\beta = -2 \cot 2x$, $Z = \sin 2x$, provided that $\eta - 4 = 0$,[6])

(c) $p = 3$.

(1) $\beta = \frac{a \sin x + 3 \sin 3x}{a \cos x + \cos 3x}$,

$Z = a \cos x + \cos 3x$, where $a\xi = \eta - 9$, provided that $\eta^3 - 2\eta(\xi + 5) + 9 + 18\xi - 3\xi^2 = 0$,[7])

(2) $\beta = -\frac{a \cos x + 3 \cos 3x}{a \sin x + \sin 3x}$,

$Z = a \sin x + \sin 3x$, where $a\xi = \eta - 9$, provided that $\eta^3 - 2\eta(5 - \xi) + 9 - 18\xi - 3\xi^2 = 0$.[7])

---

[5]) Ibid. 4(b).
[6]) Ibid. 4(c).
[7]) Ibid. 4(d).

18th June 1931.

(Eingegangen am 1. Juli 1931.)

Lückensätze und Überkonvergenz bei zweifachen Potenzreihen*).

Von

Friedrich Lösch in Stuttgart.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit setzt sich das Ziel, den Hadamardschen Lückensatz und seine Vertiefungen, insbesondere die Ostrowskische Überkonvergenztheorie auf Potenzreihen

$$f(x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

zweier komplexen Veränderlichen zu übertragen.

Diese Übertragung gelingt leicht bei denjenigen Sätzen aus dem genannten Ideenkreis, welche sich durch Reihentransformation beweisen lassen. Zur Übertragung der übrigen Sätze erweist sich als brauchbar eine Methode, die auch sehr durchsichtige Beweise für die in Rede stehenden Sätze bei einfachen Potenzreihen liefert, und die eben durch den Übergang zu mehrfachen Potenzreihen nahegelegt wird. Sie besteht im wesentlichen darin, daß zu einer zu untersuchenden n-fachen Potenzreihe eine Potenzreihe von $(n+1)$ Veränderlichen konstruiert wird, deren Verhalten am Rande ihres Bereichs absoluter Konvergenz Rückschlüsse zuläßt auf das der ursprünglichen Reihe am Rande ihres Bereichs absoluter Konvergenz. Die Konstruktion wird dabei so durchgeführt, daß der Bereich absoluter Konvergenz der $(n+1)$-fachen Reihe unter den hier interessierenden Voraussetzungen eine Form besitzt, die nach einem leicht zu beweisenden Satz von Faber das Verhalten der Reihe am Rande desselben ohne weiteres zu beurteilen gestattet.

Die zur Behandlung des in Rede stehenden Problems auf Grund der angedeuteten Methoden erforderlichen Hilfsmittel werden im ersten Teil der

*) Die Arbeit wurde der Abteilung für allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule Stuttgart als Habilitationsschrift vorgelegt.

Arbeit zusammengestellt. § 1 enthält neben einem kurzen Bericht[1]) über die grundlegenden Eigenschaften des Bereichs absoluter Konvergenz einer Potenzreihe zweier Veränderlichen eine für das Folgende geeignete Fassung des bereits genannten Satzes von Faber[2]). In den §§ 2 und 3 werden zwei Reihentransformationen untersucht, die den Typus allgemeiner E-Transformationen[3]) haben und die im folgenden fortwährend benützt werden.

Das Ziel des zweiten Teils ist zunächst die Aufstellung eines dem Hadamardschen Lückensatz analogen Satzes bei zweifachen Potenzreihen (§ 5), sodann eine möglichst weitgehende Verschärfung dieses Satzes (§ 6). Die Grundgedanken der dabei zur Verwendung kommenden Methode werden, soweit sie neu sind, in § 4 an einfachen Potenzreihen auseinandergesetzt, da sie dort am klarsten hervortreten und überdies eine neue Verschärfung des Fabryschen Lückensatzes liefern.

Der dritte Teil ist der Ostrowskischen Überkonvergenztheorie gewidmet. In § 7 werden zunächst wieder die Verhältnisse bei Funktionen einer Veränderlichen auseinandergesetzt, insbesondere wird ein neuer, sehr einfacher Beweis für die Umkehrung des Überkonvergenzsatzes gegeben. Die §§ 8—10 endlich enthalten die Übertragung der Überkonvergenztheorie auf zweifache Potenzreihen.

1. Teil.

Vorbereitungen.

§ 1.

Grundlegende Eigenschaften des Bereichs absoluter Konvergenz zweifacher Potenzreihen. Ein Satz von Faber[4]).

Wir beschäftigen uns im folgenden vorwiegend mit einem Funktionselement

$$f(x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} \tag{1}$$

zweier komplexen Veränderlichen, als dessen Entwicklungsmittelpunkt ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Punkt $x = 0$, $y = 0$ genommen ist.

---

[1]) Vgl. dazu: G. Faber, Über die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher, Math. Annalen **61** (1905), S. 289—324.

[2]) Loc. cit.[1]), S. 323.

[3]) Vgl. dazu: F. Lösch, Eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation mit funktionentheoretischen Anwendungen, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 725—753.

[4]) Vgl. zu diesem Paragraphen: Enzykl. d. Math. Wissensch. II_3, Heft 4, S. 519—521, sowie die dort zitierte Literatur, insbesondere F. Hartogs, Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzreihen und der eindeutigen analytischen Funktionen zweier Veränderlichen, Dissertation München 1904, sowie G. Faber, loc. cit.[1]).

Da für die folgenden Untersuchungen die Fälle, daß das Element (1) stets konvergiert oder (abgesehen von $(0, 0)$) stets divergiert, ohne Interesse sind, so schließen wir dieselben ein für allemal aus.

Der Bereich absoluter Konvergenz von $f(x, y)$ wird dann charakterisiert durch eine im ersten Quadranten verlaufende Kurve

$$\Phi(r_1, r_2) = 0, \tag{2}$$

die so beschaffen ist, daß für die Koordinaten (r_1, r_2) irgend eines ihrer Punkte die Potenzreihe (1) absolut konvergiert in allen Punkten (x, y) mit $|x| < r_1$, $|y| < r_2$, dagegen in keinem Punkt (x, y) mit $|x| > r_1$, $|y| > r_2$. Die Koordinatenpaare (r_1, r_2) der Punkte der Kurve (2) heißen Paare *„assoziierter Konvergenzradien"* der Potenzreihe.

Die Kurve $\Phi(r_1, r_2) = 0$ hat für das Folgende wichtige Eigenschaften. Sie ist im ersten Quadranten definiert und verläuft dort stetig von einem Punkt $r_1 = 0$, $r_2 = R_2$ der r_2-Achse nach einem Punkt $r_1 = R_1$, $r_2 = 0$ der r_1-Achse. Sie kann zu Beginn ihres Verlaufs — vom Punkt 0, R_2 bis zu einem Punkt R_1', R_2 — der r_1-Achse, zum Schluß — von einem Punkt R_1, R_2' bis zum Punkt R_1, 0 — der r_2-Achse parallel laufen. Sind die Punkte R_1', R_2 und R_1, R_2' nicht identisch, so nimmt auf dem sie verbindenden Kurvenstück r_2 mit zunehmendem r_1 ab und umgekehrt. Daher gehört zu jedem Wert r_1 mit $0 \leqq r_1 < R_1$ genau ein Wert r_2 als assoziierter Konvergenzradius, zu $r_1 = R_1$ dagegen gehören, falls $R_2' \neq 0$ ist, die sämtlichen Werte r_2 mit $0 \leqq r_2 \leqq R_2'$ als assoziierte Radien; Entsprechendes läßt sich über die zu einem Wert r_2 gehörigen r_1 aussagen. Die Größen R_1, R_2 (die einzeln oder beide unendlich sein können) heißen die *„Maximalradien"*, die Größen R_1', R_2' (die auch Null sein können) die *„Minimalradien"* des Bereichs der absoluten Konvergenz.

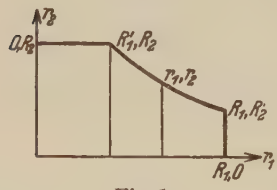


Fig. 1.

Der Zusammenhang zwischen den Paaren assoziierter Konvergenzradien und dem Koeffizientenschema der Potenzreihe ist durch die Relation

$$\overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2^{\nu}} = 1 \tag{3}$$

gegeben, die für alle von $(R_1, 0)$ und $(0, R_2)$ verschiedenen Paare endlicher assoziierter Radien r_1, r_2 und nur für sie besteht. Die Paare $(R_1, 0)$ und $(0, R_2)$ dagegen sind, falls sie endlich sind, charakterisiert durch die Relationen

$$(3') \quad \lim_{\xi\to+0} \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, R_1^{\mu} \xi^{\nu}} = 1 \text{ bzw. } \lim_{\xi\to+0} \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, \xi^{\mu} R_2^{\nu}} = 1.$$

Ist $r_1 = r_1^0$, $r_2 = r_2^0$ ein vorgegebenes Paar assoziierter Konvergenzradien, so kommt es oft darauf an, diejenigen $a_{\mu\nu}$ des Koeffizientenschemas auszusondern, welche das Zustandekommen des oberen Limes (3) bzw. (3')

bei dem speziellen Paar r_1^0, r_2^0 bewirken[5]). Diese Aussonderung erfolgt nach folgendem Gesichtspunkt:

Es sei ϑ_1, ϑ_2 irgend ein Paar nicht negativer, der Bedingung $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 1$ genügender Zahlen. Betrachtet man die Potenzreihe, die aus $f(x, y)$ entsteht, wenn man alle $a_{\mu\nu}$ gleich Null setzt mit Ausnahme derjenigen, deren Indizes den Ungleichungen

$$\vartheta_1 - \alpha \leqq \frac{\mu}{\mu+\nu} \leqq \vartheta_1 + \alpha, \quad \text{also auch} \quad \vartheta_2 - \alpha \leqq \frac{\nu}{\mu+\nu} \leqq \vartheta_2 + \alpha$$

genügen, so sind zwei Fälle denkbar:

1. Für die übriggebliebenen $a_{\mu\nu}$ bleibt die Relation (3) bzw. (3′) bestehen, wie klein auch das positive α gewählt wird. In diesem Fall heißt das Zahlenpaar ϑ_1, ϑ_2 zu dem Paar r_1^0, r_2^0 *„gehörig“* und umgekehrt r_1^0, r_2^0 von ϑ_1, ϑ_2 *„abhängig“*.

2. Es gibt zwei Zahlen $\alpha_1 > 0$ und $\alpha_2 > 0$, so daß für die übriggebliebenen $a_{\mu\nu}$

$$\overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| {r_1^0}^{\mu} {r_2^0}^{\nu}} \leqq 1 - \alpha_1$$

(bzw. die analoge aus (3′) hervorgehende Relation) gilt, falls $\alpha \leqq \alpha_2$ ist. Dann heißen ϑ_1, ϑ_2 *„nicht zu r_1^0, r_2^0 gehörig“* und umgekehrt r_1^0, r_2^0 von ϑ_1, ϑ_2 *„unabhängig“*.

Zu jedem vorgegebenen Paar r_1, r_2 assoziierter Konvergenzradien gehört mindestens ein Paar ϑ_1, ϑ_2. Gehören zu r_1, r_2 unendlich viele Paare ϑ_1, ϑ_2, so bilden dieselben eine abgeschlossene Menge. Ist $r_1 = R_1$, $R_2' \neq 0$ und $r_2 < R_2'$, so gehört nur das Paar $\vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 0$, ist $r_2 = R_2$, $R_1' \neq 0$ und $r_1 < R_1'$ nur das Paar $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = 1$ zu r_1, r_2. Ist dagegen $r_1 \neq R_1$, so gehört das Paar $\vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 0$ bestimmt nicht zu r_1, r_2; ebenso gehört das Paar $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = 1$ nicht zu r_1, r_2, wenn $r_2 \neq R_2$ ist.

Was das funktionentheoretische Verhalten des Elements $f(x, y)$ am Rande seines Bereichs absoluter Konvergenz betrifft[6]), so läßt sich zunächst allgemein sagen: Ist r_1, r_2 ein endliches Paar assoziierter Radien, so besitzt $f(x, y)$ stets mindestens eine singuläre Stelle (x_0, y_0), für welche $|x_0| \leqq r_1$, $|y_0| \leqq r_2$ ist (wobei die Kombination $|x_0| < r_1$, $|y_0| < r_2$ ausgeschlossen bleibt).

---

[5]) Vgl. loc. cit.[1]), S. 291–300. Die Übertragung auf die dort ausgeschlossenen Paare $(R_1, 0)$ und $(0, R_2)$ bietet keine Schwierigkeiten; sie ist aber für das Folgende notwendig, da die Punkte $(x, 0)$ und $(0, y)$ mit $|x| = R_1$ bzw. $|y| = R_2$ als Randpunkte des Bereichs absoluter Konvergenz des Elements $f(x, y)$ in Betracht zu ziehen sind. Aus demselben Grund werden die Paare $(R_1, 0)$ und $(0, R_2)$, entgegen dem sonst meist üblichen Sprachgebrauch, in der vorliegenden Arbeit zu den Paaren assoziierter Konvergenzradien gerechnet.

[6]) Vgl. dazu: F. Hartogs, loc. cit.[4]), S. 58–62.

a) Ist weder r_1 noch r_2 Maximalradius, so läßt sich genauer zeigen, daß es auf der Begrenzung des Bereichs $|x| < r_1$, $|y| < r_2$ stets singuläre Stellen (x_0, y_0) mit $|x_0| = r_1$, $|y_0| = r_2$ gibt und nur solche.

b) Ist endlich etwa r_1 Maximalradius, also $r_1 = R_1$ (Entsprechendes gilt für $r_2 = R_2$), und hat $f(x, y)$ die singuläre Stelle (x_0, y_0) mit $|x_0| = R_1$, $|y_0| < r_2$, so sind auch die sämtlichen Stellen (x_0, y) mit $|y| \leqq R_2'$ singulär. Es gibt mindestens einen Wert $x = x_0$ mit $|x_0| = R_1$, so daß die sämtlichen Stellen (x_0, y) mit $|y| \leqq R_2'$ singulär sind.

Eine leichte Folgerung der letztgenannten Tatsachen ist ein von Herrn Faber[7]) gefundener Satz, von dem wir künftig häufig Gebrauch machen werden. Wir sprechen ihn gleich in einer für uns besonders geeigneten Fassung aus:

Hilfssatz 1. *Ist r_1^0, r_2^0 ein Paar von Null verschiedener assoziierter Konvergenzradien von $f(x, y)$ und besteht der Teil der Kurve $\Phi(r_1, r_2) = 0$ über einem gewissen, r_1^0 als inneren oder Randpunkt enthaltenden Intervall der r_1-Achse aus einer W-Kurve*

$$r_1^{\eta_1} r_2^{\eta_2} = r_1^{0\,\eta_1} r_2^{0\,\eta_2}$$

mit irrationalem Verhältnis $\eta_1 : \eta_2$, so sind die sämtlichen Punkte (x, y) mit $|x| = r_1^0$, $|y| = r_2^0$ singuläre Punkte des Elements.

Wir schließen noch eine Bemerkung über das Verhalten von $f(x, y)$ in den eventuell vorhandenen unendlich fernen Punkten[8]) am Rande seines Bereichs absoluter Konvergenz an. Es läßt sich leicht zeigen, daß $f(x, y)$ in allen diesen Punkten singulär ist, falls es wirklich von den *beiden* Veränderlichen x und y abhängt.

Es sei etwa $R_1 = \infty$. Ist $R_2' = 0$, so ist der einzige in Frage kommende unendlich ferne Randpunkt $(\infty, 0)$ singulär als Häufungspunkt nach a) vorhandener singulärer Stellen (x_ν, y_ν) mit $|x_\nu| = r_1^{(\nu)}$, $|y_\nu| = r_2^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, wo $r_1^{(\nu)}, r_2^{(\nu)}$ eine Folge von Paaren endlicher assoziierter Radien mit $\lim_{\nu \to \infty} r_1^{(\nu)} = \infty$, $\lim_{\nu \to \infty} r_2^{(\nu)} = 0$ bedeutet.

Ist dagegen $R_1 = \infty$ und $R_2' \neq 0$, so nehme man an, es gebe einen regulären unendlich fernen Punkt $(\infty, \tilde{y})$ mit $|\tilde{y}| \leqq R_2'$, also auch einen regulären Punkt (∞, y_0) mit $|y_0| < R_2'$. Dann gibt es in der y-Ebene eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von y_0, so daß $f(x, y)$ in allen Punkten (x, y) regulär ist, wo x einen beliebigen Punkt der x-Ebene (den ∞ fernen Punkt eingeschlossen) und y einen beliebigen Punkt aus $\mathfrak{U}$ bedeutet. Wir nehmen in $\mathfrak{U}$

---

[7]) Vgl. loc. cit.[1]), S. 323.

[8]) Wir denken uns den Raum der Funktionentheorie zugrunde gelegt, am besten also x und y als Punkte je einer Riemannschen Zahlenkugel gedeutet.

eine unendliche Punktfolge $y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots$ mit $\lim_{\nu\to\infty} y_\nu = y_0$ an und betrachten die Funktionen $f(x, y_1), f(x, y_2), \ldots, f(x, y_\nu), \ldots$ der Variablen x. Sie sind alle in der vollen x-Ebene regulär und damit konstant. Aus dem Identitätssatz folgt hiernach sofort, daß $f(x, y)$ von x unabhängig, also Funktion von y allein ist. Dieser Fall hat für uns kein Interesse und wird im folgenden ausgeschlossen.

In den Paragraphen 6 und 10 werden wir gelegentlich Potenzreihen

$$f(x, y, z) = \sum_{\mu,\nu,\varrho=0}^{\infty} a_{\mu\nu\varrho} x^\mu y^\nu z^\varrho \tag{4}$$

dreier komplexen Veränderlichen in den Bereich unserer Betrachtungen ziehen. Der Bereich absoluter Konvergenz einer solchen Reihe wird durch eine Funktion

$$\Phi(r_1, r_2, r_3) = 0 \tag{5}$$

charakterisiert. Die Tripel r_1, r_2, r_3 assoziierter Konvergenzradien und nur sie genügen (soweit r_1, r_2, r_3 alle $\neq 0$ sind) der Relation

$$\overline{\lim_{\mu+\nu+\varrho\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu+\varrho]{|a_{\mu\nu\varrho}| r_1^\mu r_2^\nu r_3^\varrho} = 1. \tag{6}$$

Was die funktionentheoretischen Eigenschaften von $f(x, y, z)$ betrifft, so erwähnen wir als besonders wichtig den dem Hilfssatz 1 entsprechenden

Hilfssatz 2. *Ist r_1^0, r_2^0, r_3^0 ein Tripel von Null verschiedener assoziierter Konvergenzradien von $f(x, y, z)$ und besteht der Teil der Fläche $\Phi(r_1, r_2, r_3) = 0$ über einem gewissen, r_1^0, r_2^0 als inneren oder Randpunkt enthaltenden Bereich der r_1, r_3-Ebene aus einer W-Fläche*

$$r_1^{\eta_1} r_2^{\eta_2} r_3^{\eta_3} = r_1^{0\,\eta_1} r_2^{0\,\eta_2} r_3^{0\,\eta_3},$$

bei der mindestens eines der Verhältnisse $\eta_1 : \eta_3$, $\eta_2 : \eta_3$ irrational ist, so sind die sämtlichen Punkte x, y, z, mit $|x| = r_1^0$, $|y| = r_2^0$, $|z| = r_3^0$ singuläre Punkte des Elements $f(x, y, z)$.

§ 2.

Die Transformation $x/x\,E(u), y/y\,E(v)$.

Zur Untersuchung des Verhaltens eines Funktionselements

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^\mu \tag{7}$$

von endlichem Konvergenzradius r_1 in einem Punkt des Konvergenzkreises ist es oft zweckmäßig, das Element einer *E-Transformation* der Form

$$x/x\,E(u) \quad \text{mit} \quad E(u) = (\alpha + \beta u)\,u^k \tag{I_1}$$

(k; α, β bedeuten beliebige Zahlen, die nur die Bedingungen: k ganz positiv; $\alpha > 0$, $\beta > 0$; $\alpha + \beta = 1$ erfüllen müssen) zu unterwerfen[9]), d. h. in (7) für x den Ausdruck $xE(u)$ einzuführen, nach Potenzen von u umzuordnen und in der so entstehenden Reihe

$$F(u, x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu(x)\, u^\mu \tag{8}$$

noch $u = 1$ zu setzen. Die dadurch gewonnene Polynomreihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu(x), \tag{9}$$

in der jedes Polynom $A_\mu(x)$ eine — später genauer zu beschreibende — lineare Kombination endlich vieler Glieder der Reihe (7) ist, hat nämlich folgende Eigenschaft:

Hilfssatz 3. *Das Element $f(x)$ ist im Punkt x_0 mit $|x_0| = r_1$ dann und nur dann regulär, wenn es einen Kreis $\mathfrak{U}_{x_0}$ um x_0 und eine positive Zahl $h < 1$ gibt derart, daß für alle Punkte x aus $\mathfrak{U}_{x_0}$ gilt:*

$$\overline{\lim_{\mu \to \infty}} \sqrt[\mu]{|A_\mu(x)|} \leqq h < 1.$$

Die Reihe (9) konvergiert stets in $|x| < r_1$ und stimmt dort mit $f(x)$ überein; ist $f(x)$ in x_0 regulär, so konvergiert sie überdies normal in $\mathfrak{U}_{x_0}$ und stellt dort die analytische Fortsetzung von $f(x)$ dar.

Ein analoger Satz läßt sich, wie wir jetzt beweisen werden, für zweifache Potenzreihen

$$f(x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{10}$$

aussprechen. Unterwirft man sie der Transformation

$$x/xE(u), \qquad y/yE(v), \tag{I_2}$$

wo die Funktion E wie in (I_1) definiert sein soll, so erhält man zunächst die Reihe

$$F(u, v; x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu}(x, y)\, u^\mu v^\nu \tag{11}$$

und daraus für $u = 1$, $v = 1$ die transformierte Reihe

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu}(x, y), \tag{12}$$

---

[9]) Vgl. loc. cit.[3]). Dort (insbesondere S. 737–739) ist auch auseinandergesetzt, wie man auf eine E-Transformation geführt wird, die mit der Transformation (I_1) im wesentlichen übereinstimmt. Eine ähnliche Transformation findet sich auch schon loc. cit.[1]), S. 315.

in der jedes Polynom $A_{\mu\nu}(x, y)$ eine lineare Kombination endlich vieler Glieder der Reihe (10) ist, die später genauer beschrieben wird. Der angekündigte Satz lautet:

Hilfssatz 4. *Das Funktionselement $f(x, y)$ ist im Punkte (x_0, y_0) mit $|x_0| = r_1$, $|y_0| = r_2$, wo r_1, r_2 ein Paar endlicher assoziierter Konvergenzradien von $f(x, y)$ bedeutet, dann und nur dann regulär, wenn es zwei Kreise $\mathfrak{U}_{x_0}$ bzw. $\mathfrak{U}_{y_0}$ um x_0 bzw. y_0 und eine positive Zahl $h < 1$ gibt derart, daß für alle Punkte (x, y) aus dem Zylinderbereich $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$[10] gilt:*

$$\overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|A_{\mu\nu}(x, y)|} \leqq h < 1. \tag{13}$$

Die Reihe (12) konvergiert stets in $|x| < r_1'$, $|y| < r_2'$, wenn r_1', r_2' irgend ein Paar von Null verschiedener assoziierter Radien bedeutet, und stimmt dort mit $f(x, y)$ überein; ist $f(x, y)$ in (x_0, y_0) regulär, so konvergiert sie überdies normal in $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ und stellt dort die analytische Fortsetzung von $f(x, y)$ dar.

Beweis. 1. Durch die Funktion

$$\tilde{u} = E(u)$$

wird der Kreis $|u| \leqq 1$ auf ein abgeschlossenes Gebiet $\mathfrak{G}_1$ der $\tilde{u}$-Ebene abgebildet, das ganz in $|\tilde{u}| \leqq 1$ liegt und überdies mit $|\tilde{u}| = 1$ nur den Punkt $+1$ gemein hat. Man kann daher ein den Punkt $+1$ als Randpunkt enthaltendes abgeschlossenes Gebiet $\mathfrak{H}_1$ angeben, das alle von $+1$ verschiedenen Punkte von $\mathfrak{G}_1$ im Innern enthält und selbst, abgesehen vom Punkt $+1$, in $|\tilde{u}| < 1$ enthalten ist.

Entsprechend läßt sich in der $\tilde{v}$-Ebene zu dem durch $\tilde{v} = E(v)$ vermittelten Bild $\mathfrak{G}_2$ von $|v| \leqq 1$ ein abgeschlossenes Gebiet $\mathfrak{H}_2$ angeben.

2. Mit $\mathfrak{H}_{x_0}$ bzw. $\mathfrak{H}_{y_0}$ seien die (falls r_1 bzw. $r_2 = 0$ ist auf den Nullpunkt zusammenschrumpfenden) Gebiete der x- bzw. y-Ebene bezeichnet, in die $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_2$ vermöge der Abbildungen

$$x = x_0 \tilde{u} \quad \text{bzw.} \quad y = y_0 \tilde{v}$$

übergehen. Sind r_1, r_2 beide von Null verschieden, so folgt nach einem Satz von Hartogs[11] aus der Regularität von $f(x, y)$ in (x_0, y_0) die Regularität von $f(x, y)$ in allen Punkten (x_0, y) und (x, y_0) mit $|x| < r_1$, $|y| < r_2$. Ist $r_1 = 0$ (bzw. $r_2 = 0$), so ist $f(x, y)$ in allen Punkten $(0, y)$ mit $|y| < r_2$ (bzw. $(x, 0)$ mit $|x| < r_1$) regulär, da zu einem Radius $\varrho_2 < r_2$ ($\varrho_1 < r_1$) stets ein assoziierter Radius $\varrho_1 > 0$ ($\varrho_2 > 0$) gehört. Stets lassen sich daher zu $\mathfrak{H}_{x_0}$, $\mathfrak{H}_{y_0}$ zwei abgeschlossene Kreise $\mathfrak{B}_{x_0}$ und $\mathfrak{B}_{y_0}$ um x_0

[10]) Vgl. zu dieser Bezeichnung: W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II$_1$ (1924), S. 14–16.

[11]) Vgl. loc. cit. [4]), S. 59.

bzw. y_0 so angeben, daß $f(x, y)$ noch regulär ist für alle Punkte (x, y) aus $(\mathfrak{H}_{x_0} + \mathfrak{B}_{x_0}, \mathfrak{H}_{y_0} + \mathfrak{B}_{y_0})$.

3. Aus dem analytischen Charakter der Funktion E und der Tatsache, daß die durch

$$x = x_0 \tilde{u} \quad \text{bzw.} \quad y = y_0 \tilde{v}$$

vermittelten Bilder $\mathfrak{G}_{x_0}$ bzw. $\mathfrak{G}_{y_0}$ von $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ nur aus inneren Punkten von $\mathfrak{H}_{x_0} + \mathfrak{B}_{x_0}$ bzw. $\mathfrak{H}_{y_0} + \mathfrak{B}_{y_0}$ bestehen, erschließt man, daß auch die durch

$$x = x_0 E(u) \quad \text{bzw.} \quad y = y_0 E(v)$$

vermittelten Bilder $\mathfrak{G}'_{x_0}$ bzw. $\mathfrak{G}'_{y_0}$ von $|u| \leqq g$ bzw. $|v| \leqq g$ für genügend kleines $g > 1$ noch ganz dem Innern von $\mathfrak{H}_{x_0} + \mathfrak{B}_{x_0}$ bzw. $\mathfrak{H}_{y_0} + \mathfrak{B}_{y_0}$ angehören.

Dasselbe gilt schließlich von den durch

$$x = x_1 E(u) \quad \text{bzw.} \quad y = y_1 E(v)$$

vermittelten Bildern $\mathfrak{G}'_{x_1}$ bzw. $\mathfrak{G}'_{y_1}$ der Kreise $|u| \leqq g$ bzw. $|v| \leqq g$, wenn nur x_1 bzw. y_1 auf das Innere hinreichend kleiner Kreise $\mathfrak{U}_{x_0} \prec \mathfrak{B}_{x_0}$ bzw. $\mathfrak{U}_{y_0} \prec \mathfrak{B}_{y_0}$ um x_0 bzw. y_0 beschränkt werden.

4. Nach diesen Vorbemerkungen zeigen wir zunächst, daß die Bedingung (13) für die Regularität von $f(x, y)$ in (x_0, y_0) notwendig ist[12]). Dazu bilden wir für einen beliebigen Punkt (x_1, y_1) aus $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ die Funktion

$$f(x_1 E(u), y_1 E(v)) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} (x_1 E(u))^{\mu} (y_1 E(v))^{\nu}. \tag{14}$$

Wegen $E(0) = 0$ gibt es gewiß eine Zahl $\tilde{g} > 0$, so daß die Reihe (14) in $|u| \leqq \tilde{g}$, $|v| \leqq \tilde{g}$ gleichmäßig konvergiert. Sie darf dort nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz nach Potenzen von u und v umgeordnet werden. Die Reihe (11), genommen für $x = x_1$, $y = y_1$, stellt also die mindestens in $|u| \leqq \tilde{g}$, $|v| \leqq \tilde{g}$ konvergente Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x_1 E(u), y_1 E(v))$ an der Stelle $u = 0$, $v = 0$ dar. Nach dem Satz über mittelbare Funktionen ist aber die Funktion $f(x_1 E(u), y_1 E(v))$ auch noch in $|u| \leqq g$, $|v| \leqq g$ regulär, denn die Gebiete $\mathfrak{G}'_{x_1}$ bzw. $\mathfrak{G}'_{y_1}$ liegen im Innern von $\mathfrak{H}_{x_0} + \mathfrak{B}_{x_0}$ bzw. $\mathfrak{H}_{y_0} + \mathfrak{B}_{y_0}$. Mithin konvergiert ihre Potenzreihenentwicklung

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu}(x_1, y_1) u^{\mu} v^{\nu}$$

gewiß absolut und gleichmäßig in $|u| \leqq g$, $|v| \leqq g$ und der Cauchysche Koeffizientensatz liefert:

$$|A_{\mu\nu}(x_1, y_1)| < \frac{C}{g^{\mu+\nu}} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

wenn C das Maximum von $|f(x, y)|$ in $(\mathfrak{H}_{x_0} + \mathfrak{B}_{x_0}, \mathfrak{H}_{y_0} + \mathfrak{B}_{y_0})$ bedeutet,

[12]) Vgl. zu den hier benützten Sätzen: Osgood, loc. cit. [10]), insbes. S. 7, S. 13 und S. 18 sowie S. 41–43.

denn $f(x_1 E(u), y_1 E(v))$ nimmt für irgendein (x_1, y_1) aus $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ in $|u| \leqq g$, $|v| \leqq g$ nur Werte an, die das Element $f(x, y)$ bzw. seine analytische Fortsetzung im abgeschlossenen Bereich $(\mathfrak{H}_{x_0} + \mathfrak{B}_{x_0}, \mathfrak{H}_{y_0} + \mathfrak{B}_{y_0})$ annimmt. Da C und g für alle Punkte (x_1, y_1) aus $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ dieselben sind, so ist damit die Notwendigkeit von (13) $\left(\text{mit } h = \frac{1}{g}\right)$ gezeigt.

5. Ist umgekehrt (13) erfüllt, so konvergiert die Reihe (12) normal in $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$, stellt also dort eine analytische Funktion dar. Die Bedingung (13) ist somit als hinreichend erkannt, wenn diese Funktion in $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ die analytische Fortsetzung von $f(x, y)$ darstellt. Um letzteres nachzuweisen, bemerken wir, daß es zu $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ stets ein Paar endlicher, von Null verschiedener assoziierter Radien r_1', r_2' gibt derart, daß die Bereiche $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ und $(|x| < r_1', |y| < r_2')$ innere Punkte gemein haben. Der Beweis ist somit fertig, wenn noch gezeigt ist, daß für jedes solche Paar r_1', r_2' die Reihe (12) in $|x| < r_1'$, $|y| < r_2'$ konvergiert und mit $f(x, y)$ übereinstimmt. Ist nun aber (x_1, y_1) ein beliebiger Punkt mit $|x_1| < r_1'$, $|y_1| < r_2'$, so konvergiert die Reihe (14), die wegen $E(1) = 1$ für $u = 1$, $v = 1$ mit $f(x_1, y_1)$ übereinstimmt, gleichmäßig in $|u| \leqq g$, $|v| \leqq g$, falls $g > 1$ genügend klein gewählt ist, da dann die Gebiete $\mathfrak{G}_{x_1}'$ bzw. $\mathfrak{G}_{y_1}'$ im Innern von $|x| < r_1'$ bzw. $|y| < r_2'$ liegen. Die Reihe kann also nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz in $|u| \leqq g$, $|v| \leqq g$ nach Potenzen von u und v umgeordnet werden, und aus der entstehenden Reihe erhält man für $u = 1$, $v = 1$ gerade die Reihe (12), genommen an der Stelle $x = x_1$, $y = y_1$. Damit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.

Wir schließen einige, im folgenden häufig benützte Sätze über den Bau der Polynome $A_\mu(x)$ und $A_{\mu\nu}(x, y)$ an. Wie bereits erwähnt wurde, ist das Polynom $A_\mu(x)$ eine lineare Kombination endlich vieler Glieder der Reihe (7); wir schreiben

$$A_\mu(x) = \sum_{\varkappa=\mu'}^{\mu''} \Gamma_\mu^\varkappa a_\varkappa x^\varkappa, \tag{16}$$

wo die $\Gamma_\mu^\varkappa$ gewisse — als Glieder der Binomialentwicklungen $(\alpha + \beta)^\varkappa$ offensichtlich positive, zwischen 0 und 1 liegende — Zahlengrößen bedeuten. Dann gilt zunächst der

Hilfssatz 5. a) *Für $\mu \to \infty$ strebt auch μ', also auch $\mu'' \to \infty$.*

b) *Ist $\vartheta > 0$ beliebig vorgegeben und wählt man die willkürliche ganze Zahl $k > \frac{1}{\vartheta}$, so ist*

$$\mu'' < \mu'(1 + \vartheta).$$

Beweis. Ordnet man die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^\mu (\alpha + \beta u)^\mu u^{k\mu} \tag{17}$$

nach Potenzen von u um, so ergibt sich $A_\mu(x)$ als Koeffizient von u^μ. Soll daher das Glied $a_\varkappa x^\varkappa$ in $A_\mu(x)$ auftreten, so muß gelten

$$\varkappa(1+k) \geqq \mu \quad \text{und} \quad \varkappa k \leqq \mu,$$

d. h. aber

$$\frac{\mu}{1+k} \leqq \mu', \qquad \mu'' \leqq \frac{\mu}{k},$$

woraus sich die Behauptungen unmittelbar ergeben.

Weiterhin ist es aus rechnerischen Gründen zweckmäßig, über die Konstanten α und β geeignet zu verfügen. Wir setzen

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{2},$$

betrachten also die spezielle E-Transformation, die durch die Funktion

$$E(u) = \frac{1}{2}(1+u)\,u^k \tag{18}$$

erzeugt wird, und beweisen dafür den

Hilfssatz 6. a) *Definiert man allgemein zu einem Index μ den Index μ^* vermöge*

$$\mu^* = k\,\mu + \left[\frac{\mu}{2}\right], \tag{19}$$

so enthält das Polynom $A_{\mu^*}(x)$ das Glied $a_\mu x^\mu$ versehen mit dem Faktor $\Gamma^{\mu}_{\mu^*}$ und es gilt

$$\lim_{\mu\to\infty} \sqrt[\mu]{\Gamma^{\mu}_{\mu^*}} = 1 \quad \textit{sowie} \quad \lim_{\mu\to\infty} \sqrt[\mu^*]{\Gamma^{\mu}_{\mu^*}} = 1. \tag{20}$$

b) *Ist $\vartheta > 0$ beliebig vorgegeben und wählt man die ganze Zahl $k > \frac{1}{\vartheta}$, so enthält das Polynom $A_{\mu^*}(x)$ außer dem Glied $a_\mu x^\mu$ nur Glieder $a_\varkappa x^\varkappa$, deren Indizes die Ungleichungen*

$$\mu(1-\vartheta) \leqq \varkappa \leqq \mu(1+\vartheta)$$

erfüllen.

Beweis. a) Aus (17) ist ersichtlich, daß $a_\mu x^\mu$ in allen Polynomen $A_m(x)$ mit $k\,\mu \leqq m \leqq (k+1)\,\mu$, insbesondere also in $A_{\mu^*}(x)$, auftritt und daß es in $A_{\mu^*}(x)$ versehen ist mit dem Faktor

$$\Gamma^{\mu}_{\mu^*} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu} \binom{\mu}{\left[\frac{\mu}{2}\right]}.$$

Durch Anwendung der Stirlingschen Formel erschließt man hieraus sofort die erste der Relationen (20); die zweite folgt dann vermöge

$$k\,\mu < \mu^* < \left(k+\frac{1}{2}\right)\mu.$$

b) Tritt $a_\varkappa x^\varkappa$ in $A_{\mu^*}(x)$ auf, so ist nach dem Beweis von Hilfssatz 5:

$$\varkappa(1+k) \geqq \mu^*, \quad \text{also} \quad \varkappa(1+k) \geqq k\mu + \left[\frac{\mu}{2}\right],$$

woraus sich mühelos die erste der beiden zu beweisenden Ungleichungen ergibt; ebenso mühelos erhält man die zweite.

Entsprechendes läßt sich über den Bau der Polynome $A_{\mu\nu}(x, y)$ aussagen. Sie sind von der Form

$$A_{\mu\nu}(x, y) = \sum_{\varkappa=\mu'}^{\mu''} \sum_{\lambda=\nu'}^{\nu''} \Gamma_\mu^\varkappa \Gamma_\nu^\lambda a_{\varkappa\lambda} x^\varkappa y^\lambda,$$

und aus den für die Polynome $A_\mu(x)$ angestellten Überlegungen ergibt sich die Richtigkeit der beiden Sätze:

Hilfssatz 7. a) *Mit* $\mu \to \infty$, $\nu \to \infty$ *streben* $\mu' \to \infty$, $\nu' \to \infty$, *also auch* $\mu'' \to \infty$, $\nu'' \to \infty$.

b) *Ist* $\vartheta > 0$ *beliebig vorgegeben und wählt man* $k > \frac{1}{\vartheta}$, *so ist*

$$\mu'' \leqq \mu'(1+\vartheta), \quad \nu'' \leqq \nu'(1+\vartheta).$$

Hilfssatz 8. a) *Definiert man allgemein zu einem Indexpaar* (μ, ν) *das Indexpaar* (μ^*, ν^*) *vermöge*

$$\mu^* = k\mu + \left[\frac{\mu}{2}\right], \quad \nu^* = k\nu + \left[\frac{\nu}{2}\right], \tag{21}$$

so enthält das Polynom $A_{\mu^*\nu^*}(x, y)$ *das Glied* $a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ *versehen mit den Faktoren* $\Gamma_{\mu^*}^\mu \Gamma_{\nu^*}^\nu$ *und es gilt*

$$\lim_{\mu+\nu\to\infty} \sqrt[\mu+\nu]{\Gamma_{\mu^*}^\mu \Gamma_{\nu^*}^\nu} = 1 \quad \textit{sowie} \quad \lim_{\mu+\nu\to\infty} \sqrt[\mu^*+\nu^*]{\Gamma_{\mu^*}^\mu \Gamma_{\nu^*}^\nu} = 1.$$

b) *Ist* $\vartheta > 0$ *beliebig vorgegeben und wählt man* $k > \frac{1}{\vartheta}$, *so enthält das Polynom* $A_{\mu^*\nu^*}(x, y)$ *außer dem Glied* $a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ *nur Glieder* $a_{\varkappa\lambda} x^\varkappa y^\lambda$, *deren Indizes die Ungleichungen*

$$\mu(1-\vartheta) \leqq \varkappa \leqq \mu(1+\vartheta), \quad \nu(1-\vartheta) \leqq \lambda \leqq \nu(1+\vartheta)$$

erfüllen.

§ 3.

Die Transformationen $x/x\,E(u)$, $y/y\,v$ und $x/x\,u$, $y/y\,E(v)$.

Es erweist sich als zweckmäßig, neben der im vorigen Paragraphen behandelten E-Transformation noch zwei weitere E-Transformationen zweifacher Potenzreihen heranzuziehen, nämlich

1. die Transformation

$$x/x\,E(u), \quad y/y\,v, \tag{II a}$$

wo E wieder gemäß (18) definiert sein soll. Behalten wir auch sonst die dort benützten Bezeichnungen bei, so lautet die transformierte Reihe

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} B'_{\mu\nu}(x,y) \tag{22}$$

mit

$$B'_{\mu\nu}(x,y) = y^{\nu} \sum_{\varkappa=\mu'}^{\mu''} \Gamma_{\mu}^{\varkappa} a_{\varkappa\nu} x^{\varkappa}; \tag{23}$$

2. die Transformation

$$x/xu, \quad y/yE(v). \tag{IIb}$$

Hier lautet die transformierte Reihe

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} B''_{\mu\nu}(x,y) \tag{24}$$

mit

$$B''_{\mu\nu}(x,y) = x^{\mu} \sum_{\lambda=\nu'}^{\nu''} \Gamma_{\nu}^{\lambda} a_{\mu\lambda} y^{\lambda}. \tag{25}$$

Für die Transformationen (IIa) und (IIb) gelten dem Hilfssatz 4 entsprechende Sätze, z. B. für (IIa):

Hilfssatz 9. *Das Funktionselement $f(x,y)$ ist in den Punkten (x_0, y) mit $|x_0| = r_1$, $|y| = r_2$ (x_0 fest, y auf dem Kreis beliebig), wo r_1, r_2 ein Paar endlicher assoziierter Konvergenzradien von $f(x,y)$ bedeutet, dann und nur dann regulär, wenn es einen Kreis $\mathfrak{U}_{x_0}$ um x_0, einen den Kreis $|y| = r_2$ im Innern enthaltenden Kreis $\tilde{\mathfrak{U}}_y$ um $y = 0$ und eine positive Zahl $h < 1$ gibt derart, daß für alle Punkte (x,y) aus $(\mathfrak{U}_{x_0}, \tilde{\mathfrak{U}}_y)$ gilt:*

$$\overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|B'_{\mu\nu}(x,y)|} \leqq h < 1. \tag{26}$$

Die Reihe (23) konvergiert stets in $|x| < r_1'$, $|y| < r_2'$, wenn r_1', r_2' irgendein Paar von Null verschiedener assoziierter Radien bedeutet, und stimmt dort mit $f(x,y)$ überein; ist $f(x,y)$ in allen genannten Punkten (x_0, y) regulär, so konvergiert sie überdies normal in $(\mathfrak{U}_{x_0}, \tilde{\mathfrak{U}}_y)$ und stellt dort die analytische Fortsetzung von $f(x,y)$ dar.

Über den Bau der Polynome $B'_{\mu\nu}(x,y)$ und $B''_{\mu\nu}(x,y)$ lassen sich ähnliche Bemerkungen machen wie für die $A_{\mu\nu}(x,y)$. Wir notieren insbesondere das Analogon des Hilfssatzes 7, etwa für (IIa):

Hilfssatz 10. a) *Mit $\mu \to \infty$ strebt $\mu' \to \infty$, also auch $\mu'' \to \infty$.*

b) *Ist $\vartheta > 0$ beliebig vorgegeben und wählt man die ganze Zahl $k > \frac{1}{\vartheta}$, so ist*

$$\mu'' \leqq \mu'(1+\vartheta).$$

2. Teil.

Der Hadamardsche Lückensatz und seine Verschärfungen für zweifache Potenzreihen.

§ 4.

Eine Verschärfung des Fabryschen Lückensatzes für einfache Potenzreihen.

Der klassische *Hadamardsche Lückensatz* sichert die Nichtfortsetzbarkeit eines Funktionselements

$$(27) \qquad f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^\mu, \qquad \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|a_\mu|} = 1$$

einer Veränderlichen im Falle, daß die Indizes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\tau, \ldots$ der nichtverschwindenden Koeffizienten a_μ für ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ die Bedingung $\mu_{\tau+1} > \mu_\tau(1+\vartheta)$ erfüllen.

Die außerordentlich einschränkende Voraussetzung über die a_μ, die hier zur Sicherung der Nichtfortsetzbarkeit von $f(x)$ gemacht ist, ist im Laufe der Zeit durch weniger einschränkende ersetzt worden. Bezeichnen wir, wie üblich, als „*ϑ-Umgebung*“ eines Koeffizienten a_{μ_τ} die Gesamtheit der Koeffizienten a_μ, deren Indizes den Ungleichungen

$$\mu_\tau(1-\vartheta) \leqq \mu \leqq \mu_\tau(1+\vartheta) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

genügen, so lassen sich die nacheinander erzielten Fortschritte wie folgt formulieren:

A. Es genügt bereits, daß irgendeine Teilfolge $a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, \ldots, a_{\mu_\tau}, \ldots$ der Koeffizienten a_μ mit $\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau]{|a_{\mu_\tau}|} = 1$ existiert, so daß für ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ und jedes τ die der ϑ-Umgebung von a_{μ_τ} angehörenden Koeffizienten a_μ außer a_{μ_τ} selbst verschwinden (Hadamard[13]).

B. In der ϑ-Umgebung jedes a_{μ_τ} kann noch eine Anzahl, α_τ, nichtverschwindender Koeffizienten a_μ zugelassen werden, wenn nur $\lim_{\tau\to\infty} \frac{\alpha_\tau}{\mu_\tau} = 0$ gilt [Fabry[14]). Als Spezialfall ist hierin der „*Fabrysche Lückensatz*“[15]) enthalten].

C. Endlich läßt sich die „*zweiseitige*“ Forderung B noch zu einer „*einseitigen*“ herabdrücken. Bezeichnet nämlich $\frac{\beta_\tau}{\gamma_\tau}$ die Anzahl der nicht-

---

[13]) J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Journ. de Math. pures et appl. (4), 8 (1892), p. 101–186, insbes. p. 117.

[14]) Vgl. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl. (1929), § 19, insbes. S. 81, Satz 1.

[15]) Vgl. loc. cit. [14]), S. 83, Satz 2.

verschwindenden Koeffizienten a_μ aus der ϑ-Umgebung von a_{μ_τ} mit $\begin{matrix}\mu<\mu_\tau\\ \mu>\mu_\tau\end{matrix}$, so braucht nur $\lim_{\tau\to\infty}\frac{\beta_\tau}{\mu_\tau}=0$ *oder* $\lim_{\tau\to\infty}\frac{\gamma_\tau}{\mu_\tau}=0$ gefordert zu werden, um die Nichtfortsetzbarkeit von $f(x)$ zu sichern (Ostrowski, Pólya[16]).

Wir werden in diesem Paragraphen die Bedingung C auf sehr einfache Weise in folgender, noch etwas verschärfter Fassung beweisen:

Satz 1. *Das Funktionselement $f(x)$ ist nicht fortsetzbar, wenn es in der Folge a_μ seiner Koeffizienten eine Teilfolge*

$$a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, \ldots, a_{\mu_\tau}, \ldots \quad \textit{mit} \quad \overline{\lim_{\tau\to\infty}}\sqrt[\mu_\tau]{|a_{\mu_\tau}|}=1$$

gibt, so daß für ein ϑ mit $0<\vartheta<1$, eine beliebige Zahl $d>1$ und eine positive Folge

$$c_1, c_2, \ldots, c_\mu, \ldots \quad \textit{mit} \quad \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{c_\mu}\leqq 1$$

mindestens eine der Relationen

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\beta_\tau}{\mu_\tau}=0, \qquad \lim_{\tau\to\infty}\frac{\gamma_\tau}{\mu_\tau}=0 \tag{28}$$

erfüllt ist. Dabei bedeutet $\begin{matrix}\beta_\tau\\ \gamma_\tau\end{matrix}$ die Anzahl derjenigen Koeffizienten a_μ aus der ϑ-Umgebung von a_{μ_τ} mit Indizes $\begin{matrix}\mu<\mu_\tau\\ \mu>\mu_\tau\end{matrix}$, welche nicht der Bedingung

$$|a_\mu|\leqq\frac{c_\mu}{d^{|\mu-\mu_\tau|}} \tag{29}$$

genügen.

Vorbemerkung. Die Bedingung C gestattet noch eine naheliegende Abänderung. Um die Nichtfortsetzbarkeit von $f(x)$ zu sichern, genügt es nämlich, zu verlangen, daß die in den ϑ-Umgebungen der a_{μ_τ} stehenden Koeffizienten a_μ — abgesehen von den nach C zulässigen Ausnahmekoeffizienten — *„unwesentlich"* sind, d. h. daß die mit ihnen gebildete Potenzreihe

$$\tilde{f}(x)=\sum{}' a_\mu x^\mu$$

einen größeren Konvergenzradius besitzt als $f(x)$. In der Tat haben ja dann $f(x)$ und $f(x)-\tilde{f}(x)$ auf dem Konvergenzkreis dieselben Singularitäten, und $f(x)-\tilde{f}(x)$ erfüllt die Bedingung C. $f(x)$ braucht also keine eigentlichen Lücken aufzuweisen, es muß nur insofern eine *„Lückenreihe"* sein, als es gewisse Serien *„unwesentlicher"* Koeffizienten aufweisen soll.

In diesem Sinn ist auch eine Potenzreihe, die den Bedingungen des Satzes 1 genügt, eine *„Lückenreihe"*. Wählt man nämlich irgendein $\tilde{\vartheta}$ mit

---

[16]) G. Pólya, Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe, Math. Annalen 99 (1928), S. 687–706, insbes. Fußnote [18]) auf S. 703. Die Bedingung ergibt sich auch unmittelbar aus Ergebnissen von A. Ostrowski loc. cit. [27]) über Potenzreihen mit überkonvergenten Abschnittsfolgen.

$0 < \tilde{\vartheta} < \vartheta$, so bilden diejenigen Glieder aus den ϑ-Umgebungen der a_{μ_τ}, welche außerhalb der $\tilde{\vartheta}$-Umgebungen der a_{μ_τ} stehen — abgesehen von den evtl. vorhandenen $\beta_\tau + \gamma_\tau$ Ausnahmegliedern — vermöge (29) eine Potenzreihe von größerem Konvergenzradius als $f(x)$.

Der Unterschied zwischen der Bedingung C — in dem eben geschilderten Sinn aufgefaßt — und der Bedingung des Satzes 1 besteht grob gesagt darin, daß Satz 1 in den ϑ-Umgebungen der a_{μ_τ} „*mehr*" wesentliche Koeffizienten zuläßt als die Bedingung C. Wie das zu verstehen ist, zeigt das Beispiel

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^\mu$$

mit

$$a_\mu = \frac{1}{2^{\theta 2^{n-1}}}, \text{ falls } \mu \text{ von der Form } 2^n + \theta 2^{n-1} \quad \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 \leqq \theta \leqq 1 \end{pmatrix}$$

ist, dagegen

$$a_\mu = 1 \text{ für alle übrigen } \mu.$$

Daß $f(x)$ die Voraussetzung von Satz 1 erfüllt, wenn als Teilfolge $a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, \ldots$ die Teilfolge $a_1, a_2, a_{2^2}, \ldots$ und $\vartheta = \frac{1}{4}$, $c_\mu = 1$, $d = 2$, $\gamma_\tau = 0$ gewählt wird, ist unmittelbar ersichtlich. Dagegen enthalten die ϑ-Umgebungen der a_{2^τ} „*mehr*" wesentliche Koeffizienten, als Bedingung C zuläßt. Ist in der Tat (γ_τ) *irgendeine* Folge positiver ganzer Zahlen mit $\frac{\gamma_\tau}{2^\tau} \to 0$, so enthalten die ϑ-Umgebungen der a_{μ_τ} rechts von a_{μ_τ} sogar „*mehr*" als $2\gamma_\tau$ wesentliche Koeffizienten, denn wie man leicht nachprüft, ist

$$\lim_{\mu \to \infty} \sqrt[\mu]{|a_\mu|} = 1,$$

wenn μ alle ganzen Zahlen der Form $2^n + \theta' 2\gamma_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; 0 \leqq \theta' \leqq 1)$ durchläuft.

Beweis. Beim Beweis des Satzes 1 darf angenommen werden, daß die ϑ-Umgebungen der a_{μ_τ} nicht übereinander greifen und daß genauer $\lim_{\tau \to \infty} \sqrt[\mu_\tau]{|a_{\mu_\tau}|} = 1$ gilt, denn wäre dies nicht der Fall, so ließe es sich durch Übergang zu einer Teilfolge der a_{μ_τ} erreichen.

1. Wir führen den Beweis zunächst unter der Annahme

$$\gamma_\tau = 0 \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ebenso wäre im Fall $\beta_\tau = 0$ $(\tau = 0, 1, 2, \ldots)$ zu verfahren.

Wendet man auf $f(x)$ die Transformation (I_1) mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ und $k > \frac{1}{\vartheta}$ an, so enthält das Polynom $A_{\mu_\tau^*}(x)$ nach Hilfssatz 6 aus $f(x)$ nur das Glied $a_{\mu_\tau} x^{\mu_\tau}$ (versehen mit dem Faktor $\Gamma_{\mu_\tau^*}^{\mu_\tau}$) und außerdem Glieder $a_\mu x^\mu$ aus der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau} x^{\mu_\tau}$. Mit Hilfe dieser

Polynome $A_{\mu_\tau^*}(x)$ $(\tau = 0, 1, 2, \ldots)$ ordnen wir $f(x)$ eine Funktion $F(x, y)$ zweier komplexer Veränderlichen zu, indem wir mit einer beliebigen Irrationalzahl η zwischen 0 und 1 die Polynomreihe

$$(30) \qquad y^{[\eta\mu_0]+1} A_{\mu_0^*}(x) + y^{[\eta\mu_1]+1} A_{\mu_1^*}(x) + \ldots + y^{[\eta\mu_\tau]+1} A_{\mu_\tau^*}(x) + \ldots$$

bilden und die Polynome dieser Reihe in ihre einzelnen Glieder zerlegen. Von der auf diese Weise entstehenden Potenzreihe

$$(31) \qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

behaupten wir nämlich, daß sie mindestens in $|x| < 1$, $|y| < 1$ absolut konvergiert, also eine mindestens in $|x| < 1$, $|y| < 1$ reguläre Funktion $F(x, y)$ definiert. In der Tat ist für jedes μ

$$|b_{\mu\nu}| \leqq |a_\mu| \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

denn entweder ist $b_{\mu\nu} = 0$, oder es ist $b_{\mu\nu}$ gleich a_μ mal einem — zwischen 0 und 1 liegenden — Faktor Γ, und daher folgt aus

$$(32) \qquad \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|a_\mu|} = 1 \quad \text{jedenfalls} \quad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|b_{\mu\nu}|} \leqq 1.$$

Mithin konvergiert auch die Polynomreihe (30) für $|x| < 1$, $|y| < 1$ und stellt dort ebenfalls $F(x, y)$ dar.

a) Von der Funktion $F(x, y)$ läßt sich mühelos nachweisen, daß sie in sämtlichen Punkten (x, y) mit $|x| = 1$, $|y| = 1$ singulär ist. Dazu genügt es nach Hilfssatz 1, zu zeigen, daß die Potenzreihe (31) das Paar assoziierter Radien $r_1 = 1$, $r_2 = 1$ hat und daß die den Bereich absoluter Konvergenz der Reihe (31) charakterisierende Gleichung $\Phi(r_1, r_2) = 0$ über einem gewissen Intervall $1 \leqq r_1 \leqq 1 + \zeta_0$ die Form

$$r_1 r_2^\eta = 1$$

hat, mit anderen Worten, daß es ein $\zeta_0 > 0$ gibt, so daß für $0 \leqq \zeta \leqq \zeta_0$

$$r_1 = 1 + \zeta, \qquad r_2 = (1 + \zeta)^{-\frac{1}{\eta}}$$

assoziierte Radien sind, also

$$(33) \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|b_{\mu\nu}|(1+\zeta)^{\mu-\frac{1}{\eta}\nu}} = 1$$

ist. Dies folgt so:

Einerseits haben die Koeffizienten $b_{\mu_\tau,[\eta\mu_\tau]+1}$ die Werte $\Gamma_{\mu_\tau^*}^{\mu_\tau} a_{\mu_\tau}$ und daher ist nach Hilfssatz 6a für jedes $\zeta \geqq 0$

$$(34) \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|b_{\mu\nu}|(1+\zeta)^{\mu-\frac{1}{\eta}\nu}} \geqq \lim_{\tau\to\infty} \sqrt[\mu_\tau+[\eta\mu_\tau]+1]{\Gamma_{\mu_\tau^*}^{\mu_\tau} |a_{\mu_\tau}| (1+\zeta)^{\mu_\tau - \frac{1}{\eta}([\eta\mu_\tau]+1)}} = 1$$

Andererseits folgt aus (32) für die Gesamtheit der Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ mit $\mu \leqq \frac{1}{\eta}\nu$ bei jedem $\zeta \geqq 0$ sofort

$$(35\,a) \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|b_{\mu\nu}|(1+\zeta)^{\mu-\frac{1}{\eta}\nu}} \leqq \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|b_{\mu\nu}|} \leqq 1.$$

Die Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ mit $\mu > \frac{1}{\eta}\nu$ haben, soweit sie von Null verschieden sind, einen zweiten Index ν der Form $[\eta\mu_\tau]+1$. Ein solches $b_{\mu,[\eta\mu_\tau]+1}$ stimmt bis auf einen Faktor Γ überein mit einem a_μ aus der ϑ-Umgebung von a_{μ_τ}, das die Relation (29) erfüllt, so daß gilt

$$|b_{\mu,[\eta\mu_\tau]+1}| \leqq \frac{c_\mu}{d^{\mu-\mu_\tau}}.$$

Daher ist auch für die Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ mit $\mu > \frac{1}{\eta}\nu$

$$(35\,b) \quad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|b_{\mu\nu}|(1+\zeta)^{\mu-\frac{1}{\eta}\nu}} \leqq \overline{\lim_{\mu+[\eta\mu_\tau]+1\to\infty}} \sqrt[\mu+[\eta\mu_\tau]+1]{c_\mu \frac{(1+\zeta)^{\mu-\frac{1}{\eta}([\eta\mu_\tau]+1)}}{d^{\mu-\mu_\tau}}} \leqq 1,$$

falls $0 \leqq \zeta \leqq \zeta_0$ und $1+\zeta_0 < d$ gewählt wird.

Aus (34) und (35) folgt die Behauptung (33).

b) Wäre nun andrerseits $f(x)$ in einem Punkt x_0 mit $|x_0| = 1$ regulär, so gäbe es nach Hilfssatz 3 eine Umgebung $\mathfrak{U}_{x_0}$ von x_0 und ein $h < 1$, so daß für alle Punkte x aus $\mathfrak{U}_{x_0}$

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau^*]{|A_{\mu_\tau^*}(x)|} \leqq h$$

wäre, die Reihe (30) also für alle Punkte (x, y) mit x aus $\mathfrak{U}_{x_0}$ und $|y| \leqq h'$ $\left(1 < h' < \frac{1}{h}\right)$ gleichmäßig konvergieren, somit eine in dem genannten Bereich reguläre Funktion darstellen würde. Da diese Funktion in $|x| < 1$, $|y| < 1$ mit $F(x, y)$ übereinstimmt, so wäre $F(x, y)$ z. B. im Punkt $(x_0, 1)$ regulär, was im Widerspruch steht zu der unter a) bewiesenen Tatsache, daß $F(x, y)$ in allen Punkten (x, y) mit $|x| = 1$, $|y| = 1$ singulär ist. $f(x)$ kann also auf $|x| = 1$ keinen regulären Punkt besitzen.

2. Der Fall, daß γ_τ nicht für jedes τ verschwindet, aber doch

$$(36) \qquad \lim_{\tau\to\infty} \frac{\gamma_\tau}{\mu_\tau} = 0$$

ist, läßt sich mit Hilfe eines bekannten, von Herrn Faber stammenden Kunstgriffs[17]) auf den soeben behandelten Fall zurückführen. (Analoges

[17]) Vgl. dazu etwa: L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 2. Aufl. (1931), S. 303–307.

gilt für den Fall $\lim_{\tau\to\infty}\frac{\beta_\tau}{\mu_\tau}=0$.) Bezeichnet man diejenigen Koeffizienten a_μ aus den Intervallen $\mu_\tau<\mu\leqq\mu_\tau(1+\vartheta)$ $(\tau=0,1,2,\ldots)$, welche die Relation (29) nicht erfüllen, in ihrer Reihenfolge mit

$$a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots, a_{p_n}, \ldots,$$

so ist

$$g(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{p_n^2}\right)$$

eine ganze Funktion, die höchstens dem Minimaltypus der Ordnung Eins angehört. Nach dem Satz von Wigert und dem Hadamardschen Multiplikationssatz hat daher

$$f_0(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty}a_\mu g(\mu)x^\mu$$

auf $|x|=1$ keine andern Singularitäten als $f(x)$. Andrerseits genügt $f_0(x)$ den Voraussetzungen des Satzes 1 mit $\gamma_\tau=0$, wenn dort nur die Folge c_μ ersetzt wird durch die Folge $c_\mu|g(\mu)|$, die wegen

$$|g(\mu)|<e^{\varepsilon\mu} \text{ für jedes } \varepsilon>0 \text{ und hinreichend große } \mu$$

ebenfalls die Relation

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{c_\mu|g(\mu)|}\leqq 1$$

erfüllt.

§ 5.

Das Analogon des Hadamardschen Lückensatzes für zweifache Potenzreihen.

Als Übertragung des klassischen *Hadamardschen Lückensatzes* auf zweifache Potenzreihen läßt sich der folgende von Herrn Faber[18]) stammende Satz ansprechen:

„Weist das Koeffizientenschema der Potenzreihe

$$f(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}a_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$$

in jeder Diagonale höchstens einen von Null verschiedenen Koeffizienten auf und hat die Reihe bei Anordnung nach Diagonalen die Form

$$f(x,y)=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}a_{n_\varkappa}x^\mu y^\nu \ (\mu+\nu=n_\varkappa) \quad \textit{mit} \quad \varliminf_{\varkappa\to\infty}\frac{n_{\varkappa+1}-n_\varkappa}{n_\varkappa}\geqq\vartheta>0,$$

so sind alle Punkte (x,y) mit $|x|=r_1$ $|y|=r_2$, wo r_1, r_2 ein beliebiges Paar assoziierter Radien bedeutet, singuläre Punkte des Elements $f(x,y)$.“

---

[18]) Vgl. loc. cit. [1]), S. 315.

Dieser Satz kann als Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes aufgefaßt werden. Führt man nämlich die Bezeichnung

$$\Delta_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) = \sum_{\substack{\mu,\nu \\ \alpha\mu+\beta\nu=\lambda}} a_{\mu\nu} r_1^\mu r_2^\nu e^{\mu i\varphi_1} e^{\nu i\varphi_2} \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta \text{ ganz, positiv} \\ \lambda \text{ ganz, } \geqq 0 \end{pmatrix}$$

ein (die Summe faßt alle Glieder $a_{\mu\nu} r_1^\mu r_2^\nu e^{\mu i\varphi_1} e^{\nu i\varphi_2}$ zusammen, für die $a_{\mu\nu}$ im Koeffizientenschema auf der Geraden $\alpha\mu + \beta\nu = \lambda$ liegt), so läßt sich leicht nachweisen:

Satz 2. *Ist r_1, r_2 ein Paar endlicher, von Null verschiedener assoziierter Radien von $f(x, y)$ und ist für irgendein Paar ganzer positiver Zahlen α, β*

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \sqrt[\lambda]{|\Delta_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})|} = 1,$$

genügt weiter die Folge der $\Delta_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ irgend einer Bedingung, welche die Nichtfortsetzbarkeit der einfachen Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Delta_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) z^\lambda$$

sichert, so ist $f(x, y)$ in allen Punkten $(r_1 e^{i(\varphi_1+\alpha\psi)}, r_2 e^{i(\varphi_2+\beta\psi)})$ mit $0 \leqq \psi < 2\pi$ singulär.

Beweis. Zum Beweise führe man in $f(x, y)$

$$x = r_1 e^{i(\varphi_1+\alpha\psi)} z^\alpha, \qquad y = r_2 e^{i(\varphi_2+\beta\psi)} z^\beta$$

ein, bilde also die Funktion einer Variablen

$$F_1(z) = f(r_1 e^{i(\varphi_1+\alpha\psi)} z^\alpha,\ r_2 e^{i(\varphi_2+\beta\psi)} z^\beta).$$

Als mittelbare Funktion ist $F_1(z)$ wegen der Regularität von $f(x, y)$ in $|x| < r_1$, $|y| < r_2$ gewiß in $|z| < 1$ regulär, und ihre Potenzreihenentwicklung mit dem Zentrum 0 ist

$$F_1(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Delta_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) e^{i\psi\lambda} z^\lambda.$$

Wäre $f(x, y)$ noch in $(r_1 e^{i(\varphi_1+\alpha\psi)}, r_2 e^{i(\varphi_2+\beta\psi)})$ regulär, so wäre $F_1(z)$ noch in $z = 1$ regulär, entgegen der Voraussetzung, daß $F(z)$ nicht fortsetzbar ist.

Bemerkung 1. Im Falle des *Faberschen Satzes* sind offensichtlich die Voraussetzungen des Satzes 2 mit $\alpha = \beta = 1$ für jeden Punkt $(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})$ mit $r_1, r_2 \neq 0$ erfüllt, wenn man als Bedingung, welche die Nichtfortsetzbarkeit von $F(z)$ sichert, die klassische Hadamardsche Lückenbedingung wählt. Die Punkte $(R_1 e^{i\varphi_1}, 0)$ und $(0, R_2 e^{i\varphi_2})$ sind singulär als Häufungsstellen singulärer Punkte $(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})$ mit $r_1, r_2 \neq 0$.

Bemerkung 2. In ähnlicher Weise lassen sich Bedingungen, welche die Singularität einer einfachen Potenzreihe in einem bestimmten Punkt

am Rande des Konvergenzbereichs sichern, auf zweifache Potenzreihen übertragen.

Weiter läßt sich der *Satz von Pólya*, nach dem aus einer einfachen Potenzreihe $f(x)$ allein durch Multiplikation ihrer Koeffizienten a_μ mit geeigneten Faktoren ε_μ, wo jedes $\varepsilon_\mu = \pm 1$ ist, eine nicht fortsetzbare Reihe gebildet werden kann, durch Kombination unserer Methode mit der von Herrn Pólya [19]) beim Beweis seines Satzes für einfache Reihen benützten Häufungsmethode auf zweifache Potenzreihen übertragen. Daraus folgt dann insbesondere, daß es zu jeder Gleichung $\Phi(r_1, r_2) = 0$, die den Bereich absoluter Konvergenz einer zweifachen Potenzreihe charakterisiert, auch nichtfortsetzbare Potenzreihen gibt, deren Bereich absoluter Konvergenz durch $\Phi(r_1, r_2) = 0$ charakterisiert wird [20]).

Als erste Verschärfung des Satzes 2 beweisen wir eine hinreichende Bedingung für die Nichtfortsetzbarkeit von $f(x, y)$, welche der Bedingung A des § 4 entspricht. Bezeichnet man als „*ϑ-Umgebung*“ eines Koeffizienten $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ die Gesamtheit derjenigen $a_{\mu\nu}$, deren Indizes den Relationen

$$\mu_\tau(1-\vartheta) \leqq \mu \leqq \mu_\tau(1+\vartheta), \qquad \nu_\tau(1-\vartheta) \leqq \nu \leqq \nu_\tau(1+\vartheta)$$

(mit $0 < \vartheta < 1$) genügen, so gilt:

Satz 3. *In dem Schema der Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ von $f(x, y)$ existiere eine Folge*

$$a_{\mu_\tau \nu_\tau} \ (\tau = 0, 1, 2, \ldots) \ \textit{mit} \ \overline{\lim_{\tau \to \infty}} \sqrt[\mu_\tau + \nu_\tau]{|a_{\mu_\tau \nu_\tau}| r_1^{\mu_\tau} r_2^{\nu_\tau}} = 1$$

(r_1, r_2 endliches Paar assoziierter Radien, beide von Null verschieden), sowie ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$, so daß für jedes τ alle der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ angehörigen Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ außer $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ selbst verschwinden.

Dann ist $f(x, y)$ in allen Punkten (x, y) mit $|x| = r_1$, $|y| = r_2$ singulär. Ist r_1 Maximalradius ($r_1 = R_1$), ferner $R_2' \neq 0$ und $r_2 < R_2'$, so sind sogar alle Punkte (x, y) mit $|x| = R_1$, $|y| \leqq R_2'$, ist dagegen $r_2 = R_2$, $R_1' \neq 0$ und $r_1 < R_1'$, so sind alle Punkte (x, y) mit $|x| \leqq R_1'$, $|y| = R_2$ singuläre Stellen des Elements $f(x, y)$.

Beweis. Zum Beweis wende man auf $f(x, y)$ die Transformation (I_2) mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ und $k > \frac{1}{\vartheta}$ an. Da nach Voraussetzung in der ϑ-Umgebung jedes $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ alle Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ außer $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ selbst verschwinden, so bestehen die Polynome $A_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x, y)$ je aus einem einzigen Glied (vgl. Hilfssatz 8b):

$$A_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x, y) = \Gamma_{\mu_\tau^*}^{\mu_\tau} \Gamma_{\nu_\tau^*}^{\nu_\tau} a_{\mu_\tau \nu_\tau} x^{\mu_\tau} y^{\nu_\tau}.$$

---

[19]) A. Hurwitz und G. Pólya, Zwei Beweise eines von Herrn Fatou vermuteten Satzes, Acta Mathematica **40** (1916), S. 179–183.

[20]) Vgl. dazu: G. Faber loc. cit. [1]), S. 315–318.

Bezeichnet (x_0, y_0) einen beliebigen Punkt mit $|x_0| = r_1$, $|y_0| = r_2$, so ist nach Hilfssatz 8a und weil mit Rücksicht auf (21) aus

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau+\nu_\tau]{|a_{\mu_\tau\nu_\tau}|\, r_1^{\mu_\tau} r_2^{\nu_\tau}} = 1 \quad \text{auch} \quad \overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau^*+\nu_\tau^*]{|a_{\mu_\tau\nu_\tau}|\, r_1^{\mu_\tau} r_2^{\nu_\tau}} = 1$$

folgt:

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau^*+\nu_\tau^*]{|A_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x_0, y_0)|} = 1.$$

Nach Hilfssatz 4 ist also $f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) singulär.

Ist $r_1 = R_1$, $R_2' \neq 0$ und $r_2 < R_2'$, so gehört nach § 1, S. 205 zu dem Paar assoziierter Radien r_1, r_2 nur das Zahlenpaar $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 0$, d. h. es muß notwendig

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\nu_\tau}{\mu_\tau} = 0$$

sein, und daher gilt auch für das Paar assoziierter Radien $r_1, \tilde{r}_2$ mit $0 < \tilde{r}_2 < r_2$

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau+\nu_\tau]{|a_{\mu_\tau\nu_\tau}|\, r_1^{\mu_\tau} \tilde{r}_2^{\nu_\tau}} = 1.$$

Ist aber dann $(x_0, \tilde{y}_0)$ ein beliebiger Punkt mit $|x_0| = r_1$, $|\tilde{y}_0| = \tilde{r}_2$, so beweist man genau wie eben, daß er ein singulärer Punkt von $f(x, y)$ ist. Da $|\tilde{y}_0| < r_2$, so folgt endlich nach § 1, S. 206, Fall b), daß sämtliche Punkte (x_0, y) mit $|y| \leqq R_2'$ singulär sind.

Entsprechend verfährt man im Fall $r_2 = R_2$, $R_1' \neq 0$, $r_1 < R_1'$.

Bemerkung 1. Ist die Bedingung des Satzes 3 für *jedes* endliche Paar assoziierter Radien r_1, r_2 mit $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$ erfüllt, so ist $f(x, y)$ nicht fortsetzbar.

Dies folgt sofort aus Satz 3, wenn man noch beachtet, daß die unendlich fernen Punkte singulär sind (vgl. § 1, S. 206) und daß die Punkte (x, y) mit $|x| = R_1$, $y = 0$ oder $x = 0$, $|y| = R_2$ singulär sind als Häufungsstellen singulärer Punkte (x, y) mit $|x| = r_1 \neq 0$, $|y| = r_2 \neq 0$.

Bemerkung 2. Nach der hier benützten Methode läßt sich auch der folgende Satz mühelos beweisen:

„In dem Schema der Koeffizienten $a_{\mu\nu} = |a_{\mu\nu}|\, e^{i\varphi_{\mu\nu}}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ *existiere eine Folge* $a_{\mu_\tau\nu_\tau}$ $(\tau = 0, 1, 2, \ldots)$ *mit*

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau+\nu_\tau]{|a_{\mu_\tau\nu_\tau}|\, r_1^{\mu_\tau} r_2^{\nu_\tau}} = 1$$

$\left(r_1, r_2 \text{ endliches Paar assoziierter Radien mit } \frac{r_1}{r_2} \neq 0\right)$ *und dazu eine Folge von Winkeln* ψ_τ $(\tau = 0, 1, 2, \ldots)$ *sowie ein* ϑ *mit* $0 < \vartheta < 1$, *so daß*

a) $\cos(\varphi_{\mu_\tau\nu_\tau} - \psi_\tau) \geqq \delta_\tau > 0$ *und* $\lim_{\tau\to\infty} \sqrt[\mu_\tau+\nu_\tau]{\delta_\tau} = 1$ *ist,*

b) *für jedes* τ *die der vollen* ϑ*-Umgebung von* $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ *angehörigen, von* $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ *verschiedenen Koeffizienten* $a_{\mu\nu}$ *die Bedingung* $\cos(\varphi_{\mu\nu} - \psi_\tau) \geqq 0$ *erfüllen.*

Dann hat $f(x, y)$ *die singuläre Stelle* (r_1, r_2). *Ist* $r_1 = R_1$, $R_2' \neq 0$ *und* $r_2 < R_2'$, *so sind sogar alle Punkte* (r_1, y) *mit* $|y| \leqq R_2'$, *ist* $r_2 = R_2$, $R_1' \neq 0$ *und* $r_1 < R_1'$, *so sind alle Punkte* (x, r_2) *mit* $|x| \leqq R_1'$ *singuläre Stellen von* $f(x, y)$."

Der Beweis ist wie bei Satz 3 zu führen, man hat nur zu beachten, daß jetzt

$$A_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x, y) = e^{i\psi_\tau} \sum_{\varkappa=\mu_\tau^{*\prime}}^{\mu_\tau^{*\prime\prime}} \sum_{\lambda=\nu_\tau^{*\prime}}^{\nu_\tau^{*\prime\prime}} \Gamma^{\varkappa}_{\mu_\tau^*} \Gamma^{\lambda}_{\nu_\tau^*} |a_{\varkappa\lambda}| r_1^{\varkappa} r_2^{\lambda} e^{i(\varphi_{\varkappa\lambda} - \psi_\tau)}$$

ist, daß hier nach Voraussetzung b) alle Summanden nichtnegativen Realteil haben und daß insbesondere der Summand

$$\Gamma^{\mu_\tau}_{\mu_\tau^*} \Gamma^{\nu_\tau}_{\nu_\tau^*} |a_{\mu_\tau \nu_\tau}| r_1^{\mu_\tau} r_2^{\nu_\tau} e^{i(\varphi_{\mu_\tau \nu_\tau} - \psi_\tau)}$$

auftritt, dessen Realteil nach Voraussetzung a) mindestens gleich

$$\Gamma^{\mu_\tau}_{\mu_\tau^*} \Gamma^{\nu_\tau}_{\nu_\tau^*} |a_{\mu_\tau \nu_\tau}| r_1^{\mu_\tau} r_2^{\nu_\tau} \delta_\tau$$

ist.

Man kann schon unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen als denjenigen des Satzes 3 Aussagen über die Lage der Singularitäten von $f(x, y)$ am Rande des Bereichs absoluter Konvergenz machen, die dafür allerdings auch weniger eingehend sind. Bezeichnet man als *„horizontale* ϑ*-Umgebung"* eines Koeffizienten $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ die Gesamtheit derjenigen $a_{\mu\nu}$, deren Indizes den Relationen

$$\mu_\tau(1 - \vartheta) \leqq \mu \leqq \mu_\tau(1 + \vartheta) \quad \text{und} \quad \nu = \nu_\tau$$

genügen (wie immer $0 < \vartheta < 1$), so kann man z. B. folgenden Satz aussprechen:

Satz 4. *In dem Schema der Koeffizienten* $a_{\mu\nu}$ *von* $f(x, y)$ *existiere eine Folge*

$$a_{\mu_\tau \nu_\tau} \ (\tau = 0, 1, 2, \ldots) \quad \textit{mit} \quad \lim_{\tau \to \infty} \sqrt[\mu_\tau + \nu_\tau]{|a_{\mu_\tau \nu_\tau}| r_1^{\mu_\tau} r_2^{\nu_\tau}} = 1$$

$\left(r_1, r_2 \text{ endliches Paar assoziierter Radien mit } \frac{r_1}{r_2} \neq 0\right)$, *sowie ein* ϑ *mit* $0 < \vartheta < 1$, *so daß für jedes* τ *alle der horizontalen* ϑ*-Umgebung von* $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ *angehörigen Koeffizienten* $a_{\mu\nu}$ *außer* $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ *selbst verschwinden.*

Dann hat $f(x, y)$ *zu jedem* x_0 *mit* $|x_0| = r_1$ *mindestens eine singuläre Stelle* (x, y) *mit* $x = x_0$, $|y| = r_2$. *Ist* $r_1 = R_1$, $R_2' \neq 0$ *und* $r_2 < R_2'$, *so sind sogar alle Punkte* (x, y) *mit* $|x| = R_1$, $|y| \leqq R_2'$ *singuläre Stellen von* $f(x, y)$.

Beweis. Zum Beweis wende man auf $f(x, y)$ die Transformation (IIa) mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ und $k > \frac{1}{\vartheta}$ an. Dann bestehen die Polynome $B'_{\mu_\tau^* \nu_\tau}(x, y)$ je aus einem einzigen Glied:

$$B'_{\mu_\tau^* \nu_\tau}(x, y) = \Gamma_{\mu_\tau^*}^{\mu_\tau} a_{\mu_\tau \nu_\tau} x^{\mu_\tau} y^{\nu_\tau}.$$

Ist daher (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt mit $|x_0| = r_1$, $|y_0| = r_2$, so gilt

$$\overline{\lim_{\tau \to \infty}} \sqrt[\mu_\tau^* + \nu_\tau]{|B'_{\mu_\tau^* \nu_\tau}(x_0, y_0)|} = 1.$$

Nach Hilfssatz 9 besitzt also $f(x, y)$ mindestens eine singuläre Stelle (x_0, y) mit $|y| = r_2$.

Ist $r_1 = R_1$, $R_2' \neq 0$ und $r_2 < R_2'$, so gehört nach § 1, S. 205 zu dem Paar assoziierter Radien r_1, r_2 nur das Zahlenpaar $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 0$, und daher gilt auch für ein Paar assoziierter Radien $r_1, \tilde{r}_2$ mit $0 < \tilde{r}_2 < r_2$

$$\overline{\lim_{\tau \to \infty}} \sqrt[\mu_\tau + \nu_\tau]{|a_{\mu_\tau \nu_\tau}| r_1^{\mu_\tau} \tilde{r}_2^{\nu_\tau}} = 1.$$

Genau wie oben zeigt man jetzt, daß es zu jedem x_0 mit $|x_0| = r_1$ mindestens einen singulären Punkt der Form (x_0, y) mit $|y| = \tilde{r}_2 < r_2$ gibt, woraus nach § 1, S. 206, Fall b) folgt, daß alle Punkte (x_0, y) mit $|y| \leqq R_2'$ singuläre Stellen von $f(x, y)$ sind.

Die Fälle $r_1 = 0$ bzw. $r_2 = 0$. Die Sätze dieses Paragraphen lassen sich auch auf den Fall, daß r_1 oder r_2 gleich Null ist, übertragen, nur sind die Voraussetzungen in naheliegender Weise abzuändern. Z. B. hat bei Satz 3 und Satz 4 an die Stelle der Voraussetzung

$$\overline{\lim_{\tau \to \infty}} \sqrt[\mu_\tau + \nu_\tau]{|a_{\mu_\tau \nu_\tau}| r_1^{\mu_\tau} r_2^{\nu_\tau}} = 1,$$

falls etwa $r_2 = 0$ ist, die Voraussetzung

$$\lim_{\zeta \to +0} \overline{\lim_{\tau \to \infty}} \sqrt[\mu_\tau + \nu_\tau]{|a_{\mu_\tau \nu_\tau}| r_1^{\mu_\tau} \zeta^{\nu_\tau}} = 1$$

zu treten.

§ 6.

Ein schärferer Lückensatz.

Nach den elementaren Bemerkungen des vorigen Paragraphen wenden wir uns jetzt dazu, für zweifache Potenzreihen einen Lückensatz zu beweisen, der dem in § 4 bewiesenen Satz über einfache Reihen entspricht.

Um den Satz bequem aussprechen zu können, bezeichnen wir als „*Δ-Teil*“ der ϑ-Umgebung eines Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ die Gesamtheit der-

jenigen Koeffizienten aus der ϑ-Umgebung von $a_{\mu\nu}$, deren Indizes so beschaffen sind, daß die sie im Koeffizientenschema repräsentierenden Gitterpunkte dem Innern eines Winkels von der Größe Δ angehören, dessen Spitze in dem $a_{\mu\nu}$ repräsentierenden Gitterpunkt liegt. Wir beweisen dann zunächst:

Satz 5. *Ist (r_1^0, r_2^0) ein Paar endlicher, von Null verschiedener assoziierter Konvergenzradien von $f(x,y)$, so ist $f(x,y)$ in allen Punkten (x,y) mit $|x| = r_1^0$, $|y| = r_2^0$ singulär, falls es zu einem ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ und einem $\Delta > \pi$ eine Folge von Koeffizienten*

$$a_{\mu_\tau \nu_\tau} \qquad \begin{pmatrix} \tau = 0, 1, 2, \ldots, \\ \mu_\tau, \nu_\tau \text{ mit wachsendem } \tau \text{ nicht abnehmend} \end{pmatrix}$$

gibt, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. *Es ist*

$$\overline{\lim_{\tau \to \infty}} \sqrt[\mu_\tau + \nu_\tau]{|a_{\mu_\tau \nu_\tau}| r_1^{0\mu_\tau} r_2^{0\nu_\tau}} = 1.$$

2. *Für jedes τ genügen die Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ mindestens eines Δ-Teils der ϑ-Umgebung des Koeffizienten $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ der Ungleichung*

$$|a_{\mu\nu}| < \frac{c_{\mu\nu}}{d^{|\mu - \mu_\tau| + |\nu - \nu_\tau|}}, \tag{37}$$

wo die $c_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine beliebige positive Folge mit

$$\overline{\lim_{\mu+\nu \to \infty}} \sqrt[\mu+\nu]{c_{\mu\nu} r_1^{0\mu} r_2^{0\nu}} \leqq 1 \tag{38}$$

und d eine beliebige Zahl > 1 bedeuten.

Beweis. 1. Wir führen den Beweis unter folgenden, keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutenden Annahmen:

a) Die ϑ-Umgebungen der Koeffizienten $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ greifen nicht übereinander, und es gilt genauer

$$\lim_{\tau \to \infty} \sqrt[\mu_\tau + \nu_\tau]{|a_{\mu_\tau \nu_\tau}| r_1^{0\mu_\tau} r_2^{0\nu_\tau}} = 1.$$

(Wäre dies nicht erfüllt, so ließe es sich durch Übergang zu einer Teilfolge der $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ erreichen.)

b) Für die Folge $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\mu_\tau}{\mu_\tau + \nu_\tau} \quad \text{und damit} \quad \lim_{\tau \to \infty} \frac{\nu_\tau}{\mu_\tau + \nu_\tau}. \tag{39}$$

(Wäre dies nicht von vornherein der Fall, so ließe es sich wieder durch Übergang zu einer Teilfolge der $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ erreichen, da die Folge $\frac{\mu_\tau}{\mu_\tau + \nu_\tau}$ $(\tau = 0, 1, 2, \ldots)$ mindestens eine Häufungsstelle besitzt.)

c) Die in dem Satz genannten Δ-Teile der ϑ-Umgebungen der Koeffizienten $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ sind „*gleichgerichtet*", d. h. die Schenkel der sie begrenzenden Winkel von der Größe Δ sind parallel. (Auch das ließe sich, wenn es nicht der Fall wäre, durch Übergang zu einer Teilfolge der $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ erreichen. Da nämlich die Richtungen der Winkelschenkel, welche die in Rede stehenden Δ-Teile der ϑ-Umgebungen der $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ begrenzen, mindestens eine Häufungsstelle besitzen, so existiert zu jedem $\tilde{\Delta}$ mit $\pi < \tilde{\Delta} < \Delta$ eine Teilfolge der $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ so, daß gleichgerichtete $\tilde{\Delta}$-Teile ihrer ϑ-Umgebungen den im Satz genannten Δ-Teilen ihrer ϑ-Umgebungen angehören.)

2. Der Beweis kann nun ganz ähnlich wie der des Satzes 1 geführt werden. Wir wenden auf $f(x, y)$ die Transformation (I_2) mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $k > \frac{1}{\vartheta}$ an und ordnen mit Hilfe der Polynome $A_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x, y)$ — die jeweils nur das Glied $a_{\mu_\tau \nu_\tau} x^{\mu_\tau} y^{\nu_\tau}$ $\left(\text{versehen mit dem Faktor } \Gamma_{\mu_\tau^*}^{\mu_\tau} \Gamma_{\nu_\tau^*}^{\nu_\tau}\right)$ sowie Glieder aus seiner ϑ-Umgebung enthalten — der Funktion $f(x, y)$ eine Funktion $F(x, y, z)$ dreier komplexer Veränderlichen zu. Wir bilden dazu die Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} A_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x, y) z^{\varrho_\tau} \tag{40}$$

mit Exponenten ϱ_τ, die so beschaffen sind, daß die Grenzwerte

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\mu_\tau}{\varrho_\tau} = \eta_1, \qquad \lim_{\tau \to \infty} \frac{\nu_\tau}{\varrho_\tau} = \eta_2 \tag{41}$$

existieren und mindestens eine der Zahlen η_1, η_2 irrational ist. Die Polynome der Reihe (40) zerlegen wir in ihre einzelnen Glieder und erhalten so eine Potenzreihe

$$\sum_{\mu, \nu, \varrho=0}^{\infty} b_{\mu \nu \varrho} x^{\mu} y^{\nu} z^{\varrho}, \tag{42}$$

von der wir zunächst behaupten, daß sie mindestens in $|x| < r_1^0$, $|y| < r_2^0$, $|z| < 1$ absolut konvergiert, also eine mindestens in $|x| < r_1^0$, $|y| < r_2^0$, $|z| < 1$ reguläre Funktion $F(x, y, z)$ definiert. In der Tat ist für jedes Indexpaar μ, ν

$$|b_{\mu \nu \varrho}| \leqq |a_{\mu \nu}| \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots),$$

denn entweder ist $b_{\mu \nu \varrho} = 0$ oder es stimmt bis auf Faktoren Γ mit $a_{\mu \nu}$ überein; also folgt aus

$$\overline{\lim_{\mu+\nu \to \infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu \nu}| r_1^{0\mu} r_2^{0\nu}} = 1 \text{ gewiß } \overline{\lim_{\mu+\nu+\varrho \to \infty}} \sqrt[\mu+\nu+\varrho]{|b_{\mu \nu \varrho}| r_1^{0\mu} r_2^{0\nu}} \leqq 1. \tag{43}$$

Auch die Polynomreihe (40) konvergiert mithin in $|x| < r_1^0$, $|y| < r_2^0$, $|z| < 1$ und stellt dort $F(x, y, z)$ dar.

a) Ähnlich wie beim Beweis des Satzes 1 werden wir nun zeigen, daß $F(x, y, z)$ in allen Punkten $(x_0, y_0, 1)$ mit $|x_0| = r_1^0$, $|y_0| = r_2^0$ singulär

ist. Dazu genügt es nach Hilfssatz 2, zu zeigen, daß $r_1^0, r_2^0, 1$ ein Tripel assoziierter Radien der Reihe (42) ist und daß die den Bereich absoluter Konvergenz der Reihe (42) charakterisierende Gleichung $\Phi(r_1, r_2, r_3) = 0$ über einem gewissen, (r_1^0, r_2^0) als Randpunkt enthaltenden Bereich der r_1, r_2-Ebene die Form

$$r_1^{\eta_1} r_2^{\eta_2} r_3 = r_1^{0\eta_1} r_2^{0\eta_2}$$

hat. Um diesen Nachweis zu führen, unterscheiden wir vier Fälle, je nachdem die im Satz genannten, nach 1c) gleichgerichteten Δ-Teile der ϑ-Umgebungen der $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ so gerichtet sind, daß der Δ-Teil der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ alle Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ aus der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ mit

$$\begin{matrix}\mu \leqq \mu_\tau \\ \nu \leqq \nu_\tau\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}\mu \leqq \mu_\tau \\ \nu \geqq \nu_\tau\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}\mu \geqq \mu_\tau \\ \nu \geqq \nu_\tau\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}\mu \geqq \mu_\tau \\ \nu \leqq \nu_\tau\end{matrix}$$

in seinem Innern enthält, abgesehen von dem am Rand des Δ-Teils gelegenen Koeffizienten $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$. Wir führen den Beweis für den zweiten Fall — die andern Fälle lassen sich völlig analog behandeln —, indem wir zeigen, daß unter passenden Voraussetzungen über die positiven Größen ζ_1, ζ_2

$$r_1 = r_1^0(1-\zeta_1), \quad r_2 = r_2^0(1+\zeta_2), \quad r_3 = (1-\zeta_1)^{-\eta_1}(1+\zeta_2)^{-\eta_2}$$

assoziierte Radien von (42) sind, also

$$(44) \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu+\varrho\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu+\varrho]{|b_{\mu\nu\varrho}|\, r_1^{0\mu} r_2^{0\nu} (1-\zeta_1)^{\mu-\eta_1\varrho}(1+\zeta_2)^{\nu-\eta_2\varrho}} = 1$$

ist.

Um eine Abschätzung dieses $\overline{\lim}$ nach unten zu bekommen, verwenden wir, daß

$$b_{\mu_\tau\nu_\tau\varrho_\tau} = \Gamma^{\mu_\tau}_{\mu_\tau^*} \Gamma^{\nu_\tau}_{\nu_\tau^*} a_{\mu_\tau\nu_\tau}$$

und daher nach Hilfssatz 8a und (41)

$$(45) \qquad \overline{\lim_{\mu+\nu+\varrho\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu+\varrho]{|b_{\mu\nu\varrho}|\, r_1^{0\mu} r_2^{0\nu} (1-\zeta_1)^{\mu-\eta_1\varrho}(1+\zeta_2)^{\nu-\eta_2\varrho}}$$

$$\geqq \lim_{\tau\to\infty} \sqrt[\mu_\tau+\nu_\tau+\varrho_\tau]{\Gamma^{\mu_\tau}_{\mu_\tau^*} \Gamma^{\nu_\tau}_{\nu_\tau^*} |a_{\mu_\tau\nu_\tau}|\, r_1^{0\mu_\tau} r_2^{0\nu_\tau} (1-\zeta_1)^{\mu_\tau-\eta_1\varrho_\tau}(1+\zeta_2)^{\nu_\tau-\eta_2\varrho_\tau}} = 1$$

ist.

Zur Abschätzung nach oben denken wir uns zwei Winkel ψ_1, ψ_2 mit $0 < \psi_1 < \psi_2 < \frac{\pi}{2}$ so bestimmt, daß die im Schema der $a_{\mu\nu}$ gezogenen Geraden durch einen ein $a_{\mu_\tau\nu_\tau}$ repräsentierenden Gitterpunkt, welche mit der ν-Richtung die Winkel ψ_1 bzw. ψ_2 einschließen, soweit sie in der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau\nu_\tau}$ verlaufen, abgesehen von $a_{\mu_\tau\nu_\tau}$ nur innere Punkte des Winkelraums (von der Öffnung Δ) enthalten, welcher den im Satz ge-

nannten Δ-Teil der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ definiert. Die Indizes der nicht diesem Δ-Teil angehörigen Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ aus der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ erfüllen die Ungleichungen

(46a) $\mu - \mu_\tau > \operatorname{tg}\psi_1(\nu - \nu_\tau)$,

(46b) $\mu - \mu_\tau > \operatorname{tg}\psi_2(\nu - \nu_\tau)$.

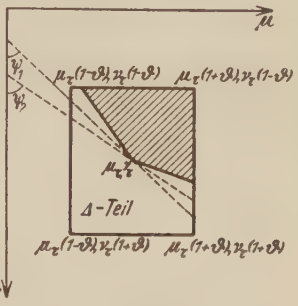


Fig. 2.

Von den Koeffizienten $b_{\mu\nu\varrho}$ verschwinden alle diejenigen, welche als dritten Index ϱ nicht ein ϱ_τ haben. Die von Null verschiedenen Koeffizienten $b_{\mu\nu\varrho_\tau}$ zerlegen wir zur Abschätzung in drei Klassen:

α) Die erste Klasse enthalte diejenigen $b_{\mu\nu\varrho_\tau}$, welche aus den im Δ-Teil der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ stehenden $a_{\mu\nu}$ (durch Multiplikation mit Faktoren Γ) hervorgehen. Für sie gilt nach (37)

$$\text{(47a)}\qquad \overline{\lim_{\mu+\nu+\varrho_\tau\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu+\varrho_\tau]{|b_{\mu\nu\varrho_\tau}|\, r_1^{0\mu} r_2^{0\nu} (1-\zeta_1)^{\mu-\eta_1\varrho_\tau} (1+\zeta_2)^{\nu-\eta_2\varrho_\tau}}$$

$$\leqq \overline{\lim_{\mu+\nu+\varrho_\tau\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu+\varrho_\tau]{c_{\mu\nu} r_1^{0\mu} r_2^{0\nu} \frac{(1-\zeta_1)^{\mu-\eta_1\varrho_\tau}}{d^{|\mu-\mu_\tau|}} \frac{(1+\zeta_2)^{\nu-\eta_2\varrho_\tau}}{d^{|\nu-\nu_\tau|}}} \leqq 1,$$

falls $1+\zeta_2 < d$ und $\frac{1}{1-\zeta_1} < d$ gewählt wird.

β) Für den Teil der übrigen $b_{\mu\nu\varrho_\tau}$ mit $\nu - \nu_\tau \leqq 0$ gilt

$$\overline{\lim_{\mu+\nu+\varrho_\tau\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu+\varrho_\tau]{|b_{\mu\nu\varrho_\tau}|\, r_1^{0\mu} r_2^{0\nu} (1-\zeta_1)^{\mu-\eta_1\varrho_\tau} (1+\zeta_2)^{\nu-\eta_2\varrho_\tau}}$$

$$\leqq \overline{\lim_{\mu+\nu+\varrho_\tau\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu+\varrho_\tau]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{0\mu} r_2^{0\nu} (1-\zeta_1)^{\mu-\mu_\tau} (1+\zeta_2)^{\nu-\nu_\tau} (1-\zeta_1)^{\mu_\tau-\eta_1\varrho_\tau} (1+\zeta_2)^{\nu_\tau-\eta_2\varrho_\tau}}$$

und dies ist höchstens gleich Eins, falls $(1-\zeta_1)^{\operatorname{tg}\psi_1}(1+\zeta_2) > 1$ ist, weil für die in Frage kommenden $b_{\mu\nu\varrho_\tau}$ Ungleichung (46a) gilt, also

$$(1-\zeta_1)^{\mu-\mu_\tau}(1+\zeta_2)^{\nu-\nu_\tau} < (1-\zeta_1)^{\operatorname{tg}\psi_1(\nu-\nu_\tau)}(1+\zeta_2)^{\nu-\nu_\tau}$$

ist und weil nach (41)

$$\frac{\mu_\tau - \eta_1\varrho_\tau}{\varrho_\tau} \to 0 \quad \text{und} \quad \frac{\nu_\tau - \eta_2\varrho_\tau}{\varrho_\tau} \to 0$$

strebt.

γ) Ebenso zeigt man, daß für die nicht der ersten Klasse angehörigen $b_{\mu\nu\varrho_\tau}$ mit $\nu - \nu_\tau \geqq 0$

$$\text{(47c)}\qquad \overline{\lim_{\mu+\nu+\varrho_\tau\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu+\varrho_\tau]{|b_{\mu\nu\varrho_\tau}|\, r_1^{0\mu} r_2^{0\nu} (1-\zeta_1)^{\mu-\eta_1\varrho_\tau} (1+\zeta_2)^{\nu-\eta_2\varrho_\tau}} \leqq 1$$

gilt, falls $(1-\zeta_1)^{\operatorname{tg}\psi_2}(1+\zeta_2) < 1$ ist.

Aus (45) und (47) ergibt sich die Behauptung (44) mindestens für alle nichtnegativen ζ_1, ζ_2, welche die Ungleichungen

$$\frac{1}{1-\zeta_1} < d, \quad 1+\zeta_2 < d, \quad (1-\zeta_1)^{\operatorname{tg}\psi_1}(1+\zeta_2) > 1, \quad (1-\zeta_1)^{\operatorname{tg}\psi_2}(1+\zeta_2) < 1$$

erfüllen, und durch diese Ungleichungen wird wirklich ein (r_1^0, r_2^0) als Randpunkt enthaltender Bereich der r_1, r_2-Ebene definiert.

b) Wäre nun andrerseits $f(x, y)$ in einem Punkt (x_0, y_0) mit $|x_0| = r_1^0$, $|y_0| = r_2^0$ regulär, so gäbe es nach Hilfssatz 4 eine Umgebung $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ von (x_0, y_0) und ein $h < 1$, so daß für alle Punkte (x, y) aus $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$

$$\overline{\lim_{\tau \to \infty}} \sqrt[\mu_\tau^* + \nu_\tau^*]{|A_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x, y)|} \leqq h \tag{48}$$

wäre, die Reihe (40) also für alle Punkte (x, y, z) mit x aus $\mathfrak{U}_{x_0}$, y aus $\mathfrak{U}_{y_0}$ und $|z| \leqq h'\left(1 < h' < \frac{1}{h^{\eta_1+\eta_2}}\right)$ gleichmäßig konvergieren, somit eine in dem genannten Bereich reguläre Funktion darstellen würde. Da diese Funktion in $|x| < r_1^0, |y| < r_2^0, |z| < 1$ mit $F(x, y, z)$ übereinstimmt, so wäre $F(x, y, z)$ z. B. im Punkt $(x_0, y_0, 1)$ regulär, was im Widerspruch steht zu der unter a) bewiesenen Tatsache, daß $F(x, y, z)$ in allen Punkten $(x, y, 1)$ mit $|x| = r_1^0$, $|y| = r_2^0$ singulär ist. $f(x, y)$ kann also auf $|x| = r_1^0$, $|y| = r_2^0$ keinen regulären Punkt besitzen.

Bemerkung. Der Beweis versagt für $\Delta \leqq \pi$. Tatsächlich ist der Satz auch schon für $\Delta = \pi$ falsch, was z. B. daraus hervorgeht, daß die Voraussetzungen des Satzes mit $\Delta = \pi$ stets erfüllt sind, wenn $f(x, y)$ von der Form $y^n g(x)$ ist, denn dann verschwinden ja alle Koeffizienten von $f(x, y)$, die im Schema unter der n-ten Horizontalen stehen.

Der soeben bewiesene Satz läßt sich, ähnlich wie sein Analogon bei einfachen Potenzreihen, noch insofern verschärfen, als in den im Satz genannten Δ-Teilen der ϑ-Umgebungen der $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ gewisse Ausnahmekoeffizienten zugelassen werden können, welche die Ungleichung (37) nicht erfüllen. Die in § 4 skizzierte Fabersche Methode zeigt bei passender Übertragung auf Doppelreihen sofort, daß in der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ eine Anzahl α_τ solcher Ausnahmekoeffizienten zugelassen werden kann, wenn nur

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\alpha_\tau}{\mu_\tau + \nu_\tau} = 0$$

ist. Sie zeigt darüber hinaus, daß die Behauptung des Satzes 5 noch aufrechterhalten werden kann, wenn sich die sämtlichen, Ausnahmekoeffizienten aus den ϑ-Umgeburgen der $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ darstellenden Gitterpunkte des Koeffizientenschemas auf einer Schar von Geraden

$$a\mu + b\nu = p_n \qquad (n = 1, 2, \ldots; p_n \text{ ganz}), \tag{49}$$

mit ganzen, nicht negativen Koeffizienten a, b anordnen lassen, so, daß für die Anzahl β_τ derjenigen Geraden (49), welche Ausnahmekoeffizienten aus der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ enthalten, die Limesrelation

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\beta_\tau}{\mu_\tau + \nu_\tau} = 0 \tag{50a}$$

erfüllt ist. Aus dieser Limesrelation folgt nämlich, falls a und b nicht negativ sind,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{p_n} = 0, \tag{50b}$$

und hieraus läßt sich erschließen, daß das mit Hilfe der ganzen Funktion

$$g(z_1, z_2) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(a z_1 + b z_2)^2}{p_n^2}\right)$$

gebildete Funktionselement

$$f_0(x, y) = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} g(\mu, \nu)\, a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

auf $|x| = r_1^0$, $|y| = r_2^0$ keine andern singulären Stellen aufweist als $f(x, y)$, während es andrerseits die Voraussetzungen des Satzes 5 erfüllt.

Wie man sofort vermuten wird, bleibt die Behauptung auch richtig, wenn einer der Koeffizienten a, b negativ ist, doch versagt dann die eben skizzierte Beweismethode, weil sich der Schluß von (50a) auf (50b) nicht mehr aufrechterhalten läßt. Um dies zu beleuchten, sei etwa $\mu_\tau = 2^\tau$, $\nu_\tau = 2^\tau$, $\vartheta < \frac{1}{2}$; die Ausnahmekoeffizienten $a_{\mu\nu}$ in der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ mögen sich anordnen lassen auf den $\beta_\tau = \tau$ Geraden

$$(\mu - \mu_\tau) - (\nu - \nu_\tau) = \text{Konst.} \quad \text{mit} \quad 1 \leqq \text{Konst.} \leqq \tau. \tag{51}$$

Für die Anzahl β_τ gilt dann offensichtlich (50a), trotzdem enthält möglicherweise jede Gerade (51) mit $1 \leqq \text{Konst.} < \infty$ Ausnahmekoeffizienten aus den ϑ-Umgebungen unendlich vieler $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$, so daß (50b) gewiß nicht zutrifft.

Stärker als die Fabersche Methode erweist sich aus dem eben geschilderten Grund bei zweifachen Potenzreihen die ursprünglich von Fabry[21]) zum Beweis seines Lückensatzes angewandte Methode, denn sie knüpft unmittelbar an die Limesrelation (50a) an. Mit ihrer Hilfe beweisen wir den sehr allgemeinen

Satz 6. *Die Behauptung des Satzes* 5 *gilt auch dann noch, wenn in den genannten Δ-Teilen der ϑ-Umgebungen der Koeffizienten $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ gewisse Ausnahmekoeffizienten auftreten, welche die Ungleichung* (37) *nicht erfüllen. Es müssen sich nur im Koeffizientenschema diejenigen Gitterpunkte, welche die im Δ-Teil der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ stehenden Aus-*

[21]) E. Fabry, Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers, Acta Mathematica 22 (1899), S. 65–87.

nahmekoeffizienten repräsentieren, auf einer Anzahl α_τ paralleler Geraden

$$a_\tau(\mu-\mu_\tau)+b_\tau(\nu-\nu_\tau)=Konst. \qquad (a_\tau, b_\tau \text{ ganz, nicht beide} = 0) \tag{52}$$

anordnen lassen (oder auf einer endlichen, von τ unabhängigen Anzahl von derartigen Scharen paralleler Geraden)[22]*, welche folgende Bedingungen erfüllen:*

1. *Ihre Anzahl α_τ genügt der Beziehung*

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\alpha_\tau}{\mu_\tau+\nu_\tau}=0. \tag{53}$$

2. *Die Gerade*

$$a_\tau(\mu-\mu_\tau)+b_\tau(\nu-\nu_\tau)=0 \tag{54}$$

enthält höchstens α'_τ Ausnahmekoeffizienten, und es gilt

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\alpha'_\tau}{\mu_\tau+\nu_\tau}=0. \tag{55}$$

Beweis. 1. Wie zu Beginn des Beweises von Satz 5 dargelegt wurde, können wir annehmen, daß die ϑ-Umgebungen der $a_{\mu_\tau\nu_\tau}$ nicht übereinandergreifen, daß ihre in Rede stehenden Δ-Teile gleichgerichtet sind, daß

$$\lim_{\tau\to\infty}\sqrt[\mu_\tau+\nu_\tau]{|a_{\mu_\tau\nu_\tau}|\,r_1^{0\,\mu_\tau}r_2^{0\,\nu_\tau}}=1$$

ist und daß der Grenzwert

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\mu_\tau}{\mu_\tau+\nu_\tau}, \quad \text{also auch} \quad \lim_{\tau\to\infty}\frac{\nu_\tau}{\mu_\tau+\nu_\tau} \tag{56}$$

existiert.

Sind die $|a_\tau|$ und $|b_\tau|$ beschränkt, was darauf hinausläuft, daß eine Folge $a_{\mu_\tau\nu_\tau}$ der vorausgesetzten Art existiert, für die sämtliche Geradenscharen (52) für $\tau=0,1,2,\ldots$ parallel sind, so ist der Beweis ohne weiteres durchführbar. Setzt man jedoch die $|a_\tau|$, $|b_\tau|$ nicht als beschränkt voraus, so bedarf er der folgenden Vorbereitung:

Da die Koeffizienten a_τ, b_τ mindestens einer der Relationen $|a_\tau|\geqq|b_\tau|$ oder $|a_\tau|\leqq|b_\tau|$ unendlich oft genügen, so können wir annehmen, eine davon, etwa die erstere

$$|a_\tau|\geqq|b_\tau| \tag{57}$$

— die gegenteilige Annahme würde zu einem völlig analogen Beweis führen —, sei stets erfüllt, und es existiere

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{b_\tau}{a_\tau}=s_0 \qquad (-1\leqq s_0\leqq 1), \tag{58}$$

denn beides läßt sich, wenn es nicht von vornherein erfüllt ist, durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge der $a_{\mu_\tau\nu_\tau}$ erreichen.

---

[22]) Wir beweisen den Satz für eine einzige Schar, es ist jedoch ohne weiteres ersichtlich, wie der Beweis zu führen ist, wenn die Ausnahmekoeffizienten auf endlich vielen Scharen angeordnet sind.

Der Beweis wird dadurch erschwert, daß man nicht weiß, in welcher Weise $|a_\tau|$ — im Vergleich zu $\mu_\tau + \nu_\tau$ und α_τ — anwächst. Um die später erforderlichen Abschätzungen trotzdem durchführen zu können, zeigen wir unter Ausnutzung der Limesrelation (58), daß, falls sich die Ausnahmekoeffizienten aus der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ auf dem Geradensystem (52) anordnen lassen, sie sich auch anordnen lassen auf höchstens vier Geradensystemen von speziellerem Typus. Sie seien bezeichnet mit

$$a_{\sigma,\tau}(\mu - \mu_\tau) + b_{\sigma,\tau}(\nu - \nu_\tau) = \text{Konst.} \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4), \tag{59}$$

und zwar sollen sämtliche Geraden des σ-ten Systems erhalten werden, wenn die Konstante die ganzzahligen, von Null verschiedenen Werte

$$-k_{\sigma,\tau}^{(\alpha_{\sigma,\tau})}, \ldots, -k_{\sigma,\tau}^{(2)}, -k_{\sigma,\tau}^{(1)}, k_{\sigma,\tau}^{(1)}, k_{\sigma,\tau}^{(2)}, \ldots, k_{\sigma,\tau}^{(\alpha_{\sigma,\tau})} \qquad (k_{\sigma,\tau}^{(p)} > 0) \tag{60}$$

durchläuft. Diese Systeme weisen dabei folgende speziellen Eigenschaften auf:

1. *System.* Es ist für jedes τ

$$|b_{1,\tau}| \leqq |a_{1,\tau}| \quad \text{und} \quad \alpha_{1,\tau}|a_{1,\tau}| < k_{1,\tau}^{(p)} \quad (p = 1, 2, \ldots, \alpha_{1,\tau}). \tag{61}$$

2. *System.* Es ist für jedes τ

$$|b_{2,\tau}| \leqq |a_{2,\tau}| \quad \text{und} \quad |a_{2,\tau}| < K\frac{\mu_\tau + \nu_\tau}{\alpha_{2,\tau}}, \tag{62}$$

wo K eine Konstante bedeutet.

3. *System.* Es ist für jedes τ

$$a_{3,\tau} = 1, \quad b_{3,\tau} = 0. \tag{63}$$

4. *System.* Es ist für jedes τ

$$a_{4,\tau} = 0, \quad b_{4,\tau} = 1. \tag{64}$$

Ferner gilt für alle vier Systeme

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\alpha_{\sigma,\tau}}{\mu_\tau + \nu_\tau} = 0 \tag{65}$$

und

$$k_{\sigma,\tau}^{(\iota)} \leqq K_{\sigma,\tau} \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, \alpha_{\sigma,\tau}), \tag{66}$$

wo

$$K_{\sigma,\tau} = (\mu_\tau + \nu_\tau)\,\text{Max}\,(|a_{\sigma,\tau}|, |b_{\sigma,\tau}|) \tag{67}$$

gesetzt ist.

Um die Richtigkeit unserer Behauptung darzutun, bemerken wir zunächst, daß für jedes τ bei den Geraden (52)

$$|\text{Konst.}| \leqq K_\tau = \vartheta(|a_\tau|\mu_\tau + |b_\tau|\nu_\tau)$$

ist, denn eine Gerade der Form (52) mit $|\text{Konst.}| > K_\tau$ kann keine Ausnahmekoeffizienten aus der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ enthalten, da sie im Koeffizientenschema ganz außerhalb des die ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ repräsentierenden Rechtecks verläuft. Aus demselben Grund sind die vorausgesetzten Ungleichungen (66) selbstverständlich. Weiterhin gehen wir so vor:

a) Man nehme zu den höchstens α_τ Geraden des Systems (52) von der Form

$$a_\tau(\mu - \mu_\tau) + b_\tau(\nu - \nu_\tau) = \text{Konst.} \quad \text{mit} \quad \alpha_\tau |a_\tau| < |\text{Konst.}| \leqq K_\tau$$

hinzu die Geraden, welche dazu spiegelbildlich in bezug auf die Gerade

$$a_\tau(\mu - \mu_\tau) + b_\tau(\nu - \nu_\tau) = 0$$

liegen, soweit sie nicht schon dem System (52) angehören. Die Gesamtheit dieser höchstens $2\alpha_\tau$ Geraden bildet ein System von dem Typus des 1. Systems (59).

b) Weiter zeigen wir mit Hilfe von (58), daß sich die Ausnahmekoeffizienten, welche auf den Geraden (52) mit $|\text{Konst.}| \leqq \alpha_\tau |a_\tau|$ liegen, im wesentlichen auch auf einem Geradensystem vom Typus des 2. Systems (59) anordnen lassen. Dazu sei $\frac{d_\tau}{c_\tau}$ ($\tau = 0, 1, 2, \ldots$; d_τ, c_τ ganz, $|d_\tau| \leqq |c_\tau|$) eine Folge rationaler, gegen s_0 konvergierender Zahlen, für die zudem bei jedem τ

$$\left| s_0 - \frac{d_\tau}{c_\tau} \right| < \frac{1}{c_\tau^2} \tag{68}$$

gilt. (Ist s_0 irrational, so gibt es stets solche Folgen; ist dagegen s_0 rational, so wähle man einfach $\frac{d_\tau}{c_\tau} = s_0$ für jedes τ.) Dabei darf — falls es nicht erfüllt wäre, ließe es sich durch Übergang zu einer Teilfolge der $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ erzwingen — angenommen werden, daß neben (68) auch

$$\left| s_0 - \frac{b_\tau}{a_\tau} \right| < \frac{1}{c_\tau^2}, \quad \text{also} \quad \left| \frac{b_\tau}{a_\tau} - \frac{d_\tau}{c_\tau} \right| < \frac{2}{c_\tau^2} \tag{69a}$$

und

$$\alpha_\tau < \frac{\mu_\tau + \nu_\tau}{c_\tau^2} \tag{69b}$$

gilt. Man kann dann zeigen, daß sämtliche Gitterpunkte aus der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$, welche auf den Geraden (52) mit $|\text{Konst.}| \leqq \alpha_\tau |a_\tau|$ liegen, auch auf den Geraden

$$c_\tau(\mu - \mu_\tau) + d_\tau(\nu - \nu_\tau) = \text{Konst.} \qquad (\text{Konst. ganz}) \tag{70a}$$

mit

$$|\text{Konst.}| \leqq \gamma_\tau = |c_\tau| \left| \frac{b_\tau}{a_\tau} - \frac{d_\tau}{c_\tau} \right| \vartheta \nu_\tau + |c_\tau| \alpha_\tau \tag{70b}$$

liegen[23]). Dabei gilt, wie man mit Hilfe der Ungleichungen (69) sieht,

$$\gamma_\tau < 3 \frac{\mu_\tau + \nu_\tau}{|c_\tau|}$$

---

[23]) Man sieht dies leicht ein, indem man die Schnittpunkte der Geraden

$$a_\tau(\mu - \mu_\tau) + b_\tau(\nu - \nu_\tau) = \pm \alpha_\tau |a_\tau| \quad \text{und} \quad c_\tau(\mu - \mu_\tau) + d_\tau(\nu - \nu_\tau) = \pm \gamma_\tau$$

mit den Geraden

$$\nu = r_\tau(1 \pm \vartheta)$$

vergleicht.

und ferner

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\gamma_\tau}{\mu_\tau+\nu_\tau}=0.$$

(Wenn die Folge $|c_\tau|$ beschränkt ist, sieht man das unmittelbar, da $\frac{b_\tau}{a_\tau}-\frac{d_\tau}{c_\tau}\to 0$ strebt; andernfalls folgt es aus der vorhergehenden Ungleichung.) Betrachtet man daher die Geraden (70a) mit

$$1\leqq|\text{Konst.}|\leqq\gamma_\tau,$$

so bilden dieselben ein System vom Typus des 2. Systems (59), und sie enthalten gewiß alle auf den Geraden (52) mit $|\text{Konst.}|\leqq\alpha_\tau|a_\tau|$ liegenden Ausnahmekoeffizienten, außer den höchstens $\text{Max}(\alpha_\tau,\alpha'_\tau)$ auf

$$c_\tau(\mu-\mu_\tau)+d_\tau(\nu-\nu_\tau)=0$$

liegenden. Durch sie legen wir, falls $d_\tau\neq 0$ ist, Geraden

$$\mu-\mu_\tau=\text{Konst.}\qquad(1\leqq|\text{Konst.}|\leqq\vartheta\mu_\tau)$$

und ergänzen dieselben durch die in bezug auf $\mu-\mu_\tau=0$ dazu spiegelbildlichen Geraden. Wir erhalten so ein Geradensystem vom Typus des 3. Systems (59). Ist dagegen $d_\tau=0$, so legen wir durch die fraglichen Ausnahmekoeffizienten entsprechend Geraden

$$\nu-\nu_\tau=\text{Konst.}\qquad(1\leqq|\text{Konst.}|\leqq\vartheta\nu_\tau)$$

und erhalten ein System vom Typus des 4. Systems (59).

2. Im folgenden nehmen wir an, die Ausnahmekoeffizienten aus der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau\nu_\tau}$ seien auf höchstens vier Geradensystemen vom Typus der vier Systeme (59) angeordnet. Mittels dieser vier Systeme konstruieren wir nun für jedes τ gewisse Hilfsfunktionen, deren Bedeutung später deutlich wird. Es sei

$$T_{\sigma,\tau}(t)=t^{\alpha_{\sigma,\tau}}\sum_{p=-\alpha_{\sigma,\tau}}^{+\alpha_{\sigma,\tau}}P_{\sigma,\tau}^{(p)}t^p=\prod_{\iota=1}^{\alpha_{\sigma,\tau}}\left(te^{-k_{\sigma,\tau}^{(\iota)}\frac{\pi i}{2K_{\sigma,\tau}}}-e^{k_{\sigma,\tau}^{(\iota)}\frac{\pi i}{2K_{\sigma,\tau}}}\right)\left(te^{k_{\sigma,\tau}^{(\iota)}\frac{\pi i}{2K_{\sigma,\tau}}}-e^{-k_{\sigma,\tau}^{(\iota)}\frac{\pi i}{2K_{\sigma,\tau}}}\right)$$

$$(\sigma=1,2,3,4),$$

falls das σ-te Geradensystem (59) nicht leer ist, dagegen

$$T_{\sigma,\tau}(t)=1,\quad\text{also}\quad P_{\sigma,\tau}^{(0)}=1,\quad P_{\sigma,\tau}^{(p)}=0\ \text{ für }\ p\neq 0,\tag{72}$$

falls das σ-te System leer ist.

Diese Hilfsfunktionen weisen für das Folgende wichtige Eigenschaften auf. Zunächst erhält man aus (71) für $t=e^{l\frac{\pi i}{K_{\sigma,\tau}}}$

$$\sum_{p=-\alpha_{\sigma,\tau}}^{\alpha_{\sigma,\tau}}P_{\sigma,\tau}^{(p)}e^{p\frac{l\pi i}{K_{\sigma,\tau}}}=4^{\alpha_{\sigma,\tau}}\sin\frac{k_{\sigma,\tau}^{(1)}-l}{2K_{\sigma,\tau}}\pi\cdot\sin\frac{k_{\sigma,\tau}^{(1)}+l}{2K_{\sigma,\tau}}\pi\cdots\sin\frac{k_{\sigma,\tau}^{(\alpha_{\sigma,\tau})}-l}{2K_{\sigma,\tau}}\pi\cdot\sin\frac{k_{\sigma,\tau}^{(\alpha_{\sigma,\tau})}+l}{2K_{\sigma,\tau}}\pi$$

$$(\sigma=1,2,3,4).$$

Der Ausdruck (73) verschwindet, wenn l einen der Werte (60) annimmt; er verschwindet dagegen nicht für $l = 0$. Weiter genügen die Größen $P_{\sigma,\tau}^{(p)}$ den beiden Relationen

$$|P_{\sigma,\tau}^{(p)}| \leqq 4^{\alpha_{\sigma,\tau}} \qquad (-\alpha_{\sigma,\tau} \leqq p \leqq +\alpha_{\sigma,\tau}) \tag{74}$$

und

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\mu_\tau + \nu_\tau} \lg \sum_{p=-\alpha_{\sigma,\tau}}^{+\alpha_{\sigma,\tau}} P_{\sigma,\tau}^{(p)} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\mu_\tau + \nu_\tau} \lg T_{\sigma,\tau}(1) = 0. \tag{75}$$

Diese beiden Relationen sind selbstverständlich, wenn τ diejenigen Werte durchläuft, für die $T_{\sigma,\tau}(t)$ vermöge (72) definiert ist. Für die übrigen Werte τ schätzen wir so ab:

a) Nach der Cauchyschen Koeffizientenformel ist

$$P_{\sigma,\tau}^{(p)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} T_{\sigma,\tau}(e^{\omega i}) \frac{i\,d\omega}{e^{(p+\alpha_{\sigma,\tau})\omega i}},$$

also nach (73), da die Beträge der Sinusfaktoren höchstens Eins sind,

$$|P_{\sigma,\tau}^{(p)}| \leqq 4^{\alpha_{\sigma,\tau}}.$$

b) Andererseits folgt aus (73) für $l = 0$

$$T_{\sigma,\tau}(1) = \sum_{p=-\alpha_{\sigma,\tau}}^{\alpha_{\sigma,\tau}} P_{\sigma,\tau}^{(p)} = 4^{\alpha_{\sigma,\tau}} \left\{ \sin \frac{k_{\sigma,\tau}^{(1)}}{K_{\sigma,\tau}} \frac{\pi}{2} \sin \frac{k_{\sigma,\tau}^{(2)}}{K_{\sigma,\tau}} \frac{\pi}{2} \dots \sin \frac{k_{\sigma,\tau}^{(\alpha_{\sigma,\tau})}}{K_{\sigma,\tau}} \frac{\pi}{2} \right\}^2. \tag{76}$$

Zur Abschätzung benutzen wir die Ungleichung $\sin \frac{\pi}{2} x \geqq x$ für $0 \leqq x \leqq 1$. Da ja $0 < k_{\sigma,\tau}^{(\iota)} \leqq K_{\sigma,\tau}$ ist, so liefert sie

$$T_{\sigma,\tau}(1) \geqq \left(\frac{2}{K_{\sigma,\tau}}\right)^{2\alpha_{\sigma,\tau}} (k_{\sigma,\tau}^{(1)} k_{\sigma,\tau}^{(2)} \dots k_{\sigma,\tau}^{(\alpha_{\sigma,\tau})})^2. \tag{77}$$

Weiterhin unterscheiden wir die vier Fälle:

$\sigma = 1$. Hier ist $k_{1,\tau}^{(\iota)} > \alpha_{1,\tau} |a_{1,\tau}|$ (nach (61)), also nach (77)

$$T_{1,\tau}(1) \geqq \left(2 \frac{\alpha_{1,\tau} |a_{1,\tau}|}{K_{1,\tau}}\right)^{2\alpha_{1,\tau}}.$$

Da $|a_{1,\tau}| \geqq |b_{1,\tau}|$, somit $K_{1,\tau} = |a_{1,\tau}| (\mu_\tau + \nu_\tau)$ ist und

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{2\alpha_{1,\tau}}{\mu_\tau + \nu_\tau} \lg \left(\frac{2\alpha_{1,\tau}}{\mu_\tau + \nu_\tau}\right) = 0$$

gilt, so folgt

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\mu_\tau + \nu_\tau} \lg T_{1,\tau}(1) \geqq 0. \tag{78}$$

$\sigma = 2$. Hier weiß man nur $k_{2,\tau}^{(\iota)} \geqq 1$; daher folgt aus (77) unter Verwendung der Stirlingschen Formel

$$T_{2,\tau}(1) \geqq \left(\frac{2}{K_{2,\tau}}\right)^{2\alpha_{2,\tau}} (\alpha_{2,\tau}!)^2 \geqq \left(\frac{2\alpha_{2,\tau}}{e K_{2,\tau}}\right)^{2\alpha_{2,\tau}}.$$

Da wieder $|a_{2,\tau}| \geqq |b_{2,\tau}|$, somit $K_{2,\tau} = |a_{2,\tau}|(\mu_\tau + \nu_\tau)$ und daher nach (62)

$$K_{2,\tau} < K\frac{(\mu_\tau+\nu_\tau)^2}{\alpha_{2,\tau}}$$

ist, so folgt

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\mu_\tau+\nu_\tau}\lg T_{2,\tau}(1) \geqq 0. \tag{78'}$$

$\sigma = 3$. Wie bei $\sigma = 2$ findet man

$$T_{3,\tau} \geqq \left(\frac{2\alpha_{3,\tau}}{e K_{3,\tau}}\right)^{2\alpha_{3,\tau}} = \left(\frac{2\alpha_{3,\tau}}{e(\mu_\tau+\nu_\tau)}\right)^{2\alpha_{3,\tau}},$$

und hieraus folgt sofort

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\mu_\tau+\nu_\tau}\lg T_{3,\tau}(1) \geqq 0. \tag{78''}$$

Ebenso schließt man für $\sigma = 4$.

Die Ungleichungen (78) ergeben zusammen mit der aus (76) fließenden Relation

$$T_{\sigma,\tau}(1) \leqq 4^{\alpha_{\sigma,\tau}} \tag{79}$$

die Behauptung (75).

3. Um nun zum eigentlichen Beweis des Satzes zu kommen, denken wir uns auf das Element $f(x, y)$ die Transformation (I_2) mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ und $k = \tilde{k} > \frac{1}{\vartheta}$ angewandt. Sodann bilden wir die folgenden linearen Kombinationen $E_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x, y)$ von Werten der Transformationspolynome $A_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x, y)$:

$$E_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x,y) = \sum_{p_1=-\alpha_{1,\tau}}^{\alpha_{1,\tau}} \sum_{p_2=-\alpha_{2,\tau}}^{\alpha_{2,\tau}} \sum_{p_3=-\alpha_{3,\tau}}^{\alpha_{3,\tau}} \sum_{p_4=-\alpha_{4,\tau}}^{\alpha_{4,\tau}} P_{1,\tau}^{(p_1)} P_{2,\tau}^{(p_2)} P_{3,\tau}^{(p_3)} P_{4,\tau}^{(p_4)} e^{-\sum_{\sigma=1}^{4} p_\sigma \frac{\pi i}{K_{\sigma,\tau}}(a_{\sigma,\tau}\mu_\tau + b_{\sigma,\tau}\nu_\tau)}$$

$$\times A_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}\left(x e^{\sum_{\sigma=1}^{4} a_{\sigma,\tau} p_\sigma \frac{\pi i}{K_{\sigma,\tau}}},\ y e^{\sum_{\sigma=1}^{4} b_{\sigma,\tau} p_\sigma \frac{\pi i}{K_{\sigma,\tau}}}\right).$$

Führt man den Ausdruck für das Polynom $A_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x, y)$ (vgl. S. 213) ein, so läßt sich $E_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x, y)$ auch in die Form setzen:

$$E_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x,y) = \sum_{\varkappa=\mu_\tau^{*'}}^{\mu_\tau^{*''}} \sum_{\lambda=\nu_\tau^{*'}}^{\nu_\tau^{*''}} \Gamma_{\mu_\tau^*}^{\varkappa} \Gamma_{\nu_\tau^*}^{\lambda} a_{\varkappa\lambda} Q_{1,\tau}^{(\varkappa,\lambda)} Q_{2,\tau}^{(\varkappa,\lambda)} Q_{3,\tau}^{(\varkappa,\lambda)} Q_{4,\tau}^{(\varkappa,\lambda)} x^\varkappa y^\lambda \tag{81}$$

mit

$$Q_{\sigma,\tau}^{(\varkappa,\lambda)} = \sum_{p=-\alpha_{\sigma,\tau}}^{\alpha_{\sigma,\tau}} P_{\sigma,\tau}^{(p)} e^{p\frac{\pi i}{K_{\sigma,\tau}}\{a_{\sigma,\tau}(\varkappa-\mu_\tau)+b_{\sigma,\tau}(\lambda-\nu_\tau)\}}. \tag{81'}$$

Das Polynom $E_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x, y)$ entsteht also aus $A_{\mu_\tau^* \nu_\tau^*}(x, y)$, wenn man

$$a_{\varkappa,\lambda} \quad \text{ersetzt durch} \quad a_{\varkappa,\lambda}\prod_{\sigma=1}^{4} Q_{\sigma,\tau}^{(\varkappa,\lambda)}.$$

Auf Grund der letzten Feststellung sind wir in der Lage, eine Potenzreihe

$$g(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} e_{\mu,\nu}x^{\mu}y^{\nu} \tag{82}$$

anzugeben, die so beschaffen ist, daß bei Anwendung der Transformation (I_2) — wieder mit $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, $k=\tilde{k}$ — auf $g(x,y)$ die Transformationspolynome mit den Indizes μ_τ^*, ν_τ^* übereinstimmen mit den Polynomen $E_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x,y)$. Man kann dazu die $e_{\mu\nu}$ wie folgt definieren:

(82a) $e_{\mu\nu}=0$, wenn $a_{\mu\nu}$ in keinem der Polynome $A_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x,y)$ auftritt,

(82b) $e_{\mu\nu}=a_{\mu\nu}\prod_{\sigma=1}^{4}Q_{\sigma,\tau}^{(\mu,\nu)}$, wenn $a_{\mu\nu}$ in $A_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x,y)$ auftritt.

Von der so definierten Potenzreihe (82) zeigen wir weiter, daß sie den Voraussetzungen des Satzes 5 genügt:

α) Es ist $e_{\mu\nu}=0$, wenn $a_{\mu\nu}$ in keinem $A_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x,y)$ auftritt, dagegen nach (82b) und (74)

$$|e_{\mu\nu}|\leqq|a_{\mu\nu}|\prod_{\sigma=1}^{4}(1+2a_{\sigma,\tau})4^{\alpha_{\sigma,\tau}}, \tag{83}$$

wenn $a_{\mu\nu}$ in $A_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x,y)$ auftritt. Daraus folgt

$$\overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}}\sqrt[\mu+\nu]{|e_{\mu\nu}|r_1^{0^{\mu}}r_2^{0^{\nu}}}\leqq 1.$$

Dies zeigt zusammen mit (84), daß r_1^0, r_2^0 assoziierte Radien von $g(x,y)$ sind.

β) Nach (82b) und (81′) ist

$$e_{\mu_\tau\nu_\tau}=a_{\mu_\tau\nu_\tau}\prod_{\sigma=1}^{4}T_{\sigma,\tau}(1),$$

also nach (75)

$$\lim_{\tau\to\infty}\sqrt[\mu_\tau+\nu_\tau]{|e_{\mu_\tau\nu_\tau}|r_1^{0^{\mu_\tau}}r_2^{0^{\nu_\tau}}}=1. \tag{84}$$

γ) Tritt $a_{\mu\nu}$ in $A_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x,y)$ auf und gehört es außerdem zu dem im Satz genannten Δ-Teil der ϑ-Umgebung von $a_{\mu_\tau\nu_\tau}$, so sind die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden:

γ_1) Ist $a_{\mu\nu}$ Ausnahmekoeffizient, so ist $e_{\mu\nu}=0$. In der Tat liegt dann $a_{\mu\nu}$ auf einer Geraden

$$a_{\sigma,\tau}(\mu-\mu_\tau)+b_{\sigma,\tau}(\nu-\nu_\tau)=k_{\sigma,\tau}^{(\iota)},$$

und es ist nach (73) für dieses σ:

$$Q_{\sigma,\tau}^{(\mu,\nu)}=\sum_{p=-\alpha_{\sigma,\tau}}^{+\alpha_{\sigma,\tau}}P_{\sigma,\tau}^{(p)}e^{p\frac{\pi i}{K_{\sigma,\tau}}k_{\sigma,\tau}^{(\iota)}}=0.$$

γ_2) Ist $a_{\mu\nu}$ nicht Ausnahmekoeffizient, genügt es also (37), so gilt nach (83)

$$|e_{\mu\nu}| \leqq |a_{\mu\nu}| \prod_{\sigma=1}^{4} (1+2\alpha_{\sigma,\tau})\, 4^{\alpha_{\sigma,\tau}} \leqq \frac{c_{\mu\nu}}{d^{|\mu-\mu_\tau|+|\nu-\nu_\tau|}} \prod_{\sigma=1}^{4} (1+2\alpha_{\sigma,\tau})\, 4^{\alpha_{\sigma,\tau}}.$$

Ersetzt man daher die Folge $c_{\mu\nu}$ durch eine Folge $c'_{\mu\nu}$, die dadurch entsteht, daß man die der ϑ-Umgebung von $c_{\mu_\tau\nu_\tau}$ angehörigen $c_{\mu\nu}$ mit $\prod_{\sigma=1}^{4} (1+2\alpha_{\sigma,\tau})\, 4^{\alpha_{\sigma,\tau}}$ multipliziert, so wird für diese Folge $c'_{\mu\nu}$, die offensichtlich der Bedingung (38) des Satzes 5 genügt, die Ungleichung (37) von allen $e_{\mu\nu}$ aus dem Δ-Teil der ϑ-Umgebung von $e_{\mu_\tau\nu_\tau}$ erfüllt.

4. Da $g(x, y)$ den Voraussetzungen des Satzes 5 genügt, so kann in keiner noch so kleinen Umgebung $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ eines beliebig herausgegriffenen Punktes (x_0, y_0) mit $|x_0| = r_1^0$, $|y_0| = r_2^0$

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau^*+\nu_\tau^*]{|E_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x, y)|} \leqq h < 1$$

gelten, denn gerade diese Annahme (vgl. (48)) führte beim Beweis des Satzes 5 zu einem Widerspruch. Es gibt also eine Folge von Punkten (x_τ, y_τ) mit $x_\tau \to x_0$, $y_\tau \to y_0$, so daß

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau^*+\nu_\tau^*]{|E_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x_\tau, y_\tau)|} \geqq 1 \tag{85}$$

ist.

Aus der Definition (80) von $E_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x, y)$ folgt aber dann, daß es ein Quadrupel von Summationsindizes $p_\sigma = p_{\sigma,\tau}$ $(\sigma = 1, 2, 3, 4)$ geben muß, für die

$$\left| A_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x'_\tau, y'_\tau) \prod_{\sigma=1}^{4} P_{\sigma,\tau}^{(p_{\sigma,\tau})} (1+2\alpha_{\sigma,\tau}) \right| \geqq |E_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x_\tau, y_\tau)| \tag{86}$$

gilt, wobei

$$x'_\tau = x_\tau e^{\sum_{\sigma=1}^{4} p_{\sigma,\tau} a_{\sigma,\tau} \frac{\pi i}{K_{\sigma,\tau}}}, \qquad y'_\tau = y_\tau e^{\sum_{\sigma=1}^{4} p_{\sigma,\tau} b_{\sigma,\tau} \frac{\pi i}{K_{\sigma,\tau}}} \tag{87}$$

gesetzt ist. Vermöge (65), (74) und (85) folgt jetzt aus (86) sofort

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau^*+\nu_\tau^*]{|A_{\mu_\tau^*\nu_\tau^*}(x'_\tau, y'_\tau)|} \geqq 1,$$

und da nach (87) $x'_\tau \to x_0$, $y'_\tau \to y_0$ strebt (vgl. (65) und (67)), so besagt Hilfssatz 4 die Singularität von $f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0).

Bemerkung. Die Aussagen der Sätze 5 und 6 lassen sich in gewissen Fällen etwas erweitern: Ist r_1^0 Maximalradius $(r_1^0 = R_1)$, $R_2' \neq 0$ und $r_2^0 < R_2'$, so sind unter den Voraussetzungen des Satzes 5 oder 6 alle Punkte (x, y) mit $|x| = R_1$, $|y| \leqq R_2'$; ist $r_2^0 = R_2$, $R_1' \neq 0$ und $r_1^0 < R_1'$, so sind alle Punkte (x, y) mit $|x| \leqq R_1'$, $|y| = R_2$ singuläre Stellen des Elementes $f(x, y)$. Der Beweis ist wie bei Satz 3 zu führen.

Sind ferner die Voraussetzungen des Satzes 5 oder 6 für jedes Paar endlicher, von Null verschiedener assoziierter Radien erfüllt, so ist $f(x, y)$ nicht fortsetzbar.

Die Fälle $r_1^0 = 0$ bzw. $r_2^0 = 0$. Die Sätze 5 und 6 sind auch noch richtig, falls $r_1^0 = 0$ oder $r_2^0 = 0$ ist. Während sich der Übergang von Satz 5 zu Satz 6 in diesen Fällen genau wie im Fall $r_1^0 \neq 0$, $r_2^0 \neq 0$ durchführen läßt, versagt jedoch der Beweis von Satz 5. Dagegen kann Satz 5 in diesen Fällen — wir behandeln den Fall $r_2^0 = 0$ — im wesentlichen zurückgeführt werden auf den entsprechenden Satz bei einfachen Potenzreihen.

Ist $r_1^0 \neq 0$, $r_2^0 = 0$, so besagt die Regularität von $f(x, y)$ im Punkte (x_0, y_0) mit $|x_0| = r_1^0$, $|y_0| = r_2^0$ zugleich die Regularität von $f(x, y)$ in allen Punkten (x_0, y) mit $|y| = r_2^0$ (y auf $|y| = r_2^0$ beliebig). Wendet man daher auf $f(x, y)$ die Transformation (IIa) mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $k = \tilde{k} > \frac{1}{\vartheta}$ an, so muß im Falle der Regularität von $f(x, y)$ in (x_0, y_0)

$$\overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|B'_{\mu\nu}(x, y)|} \leqq h < 1 \tag{88}$$

gelten für alle Punkte (x, y) aus einer hinreichend kleinen Umgebung $(\mathfrak{U}_{x_0}, \tilde{\mathfrak{U}}_y)$ des Punktes $(x_0, 0)$. Wir zeigen, daß dies unter den Voraussetzungen des Satzes 5 nicht möglich ist.

Die Voraussetzungen über die Folge $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ und die Folge $c_{\mu\nu}$ sind naturgemäß abzuändern in

$$\lim_{\zeta\to+0} \overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau+\nu_\tau]{|a_{\mu_\tau\nu_\tau}| r_1^{0\,\mu_\tau} \zeta^{\nu_\tau}} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\zeta\to+0} \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{c_{\mu\nu} r_1^{0\,\mu} \zeta^{\nu}} \leqq 1 \tag{89a}$$

Es läßt sich daher eine Folge $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\tau, \ldots$ mit $\zeta_\tau \to 0$ so auswählen, daß

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau+\nu_\tau]{|a_{\mu_\tau\nu_\tau}| r_1^{0\,\mu_\tau} \zeta_\tau^{\nu_\tau}} = 1 \tag{89b}$$

gilt. Für die Gesamtheit der Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ ist jedenfalls

$$\lim_{\zeta\to+0} \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}| r_1^{0\,\mu} \zeta^{\nu}} = 1. \tag{89c}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Ist der nach Voraussetzung vorhandene $\lim_{\tau\to\infty} \frac{\mu_\tau}{\mu_\tau + \nu_\tau}$ von Null verschieden, so folgt aus (89b), daß auch

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sqrt[\mu_\tau]{|a_{\mu_\tau\nu_\tau}| r_1^{0\,\mu_\tau} \zeta_\tau^{\nu_\tau}} = 1$$

ist, und die Potenzreihe in x, die entsteht, wenn die Polynome der Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \{a_{\mu_\tau(1-\vartheta),\nu_\tau} \zeta_\tau^{\nu_\tau} x^{\mu_\tau(1-\vartheta)} + a_{\mu_\tau(1-\vartheta)+1,\nu_\tau} \zeta_\tau^{\nu_\tau} x^{\mu_\tau(1-\vartheta)+1} + \ldots + a_{\mu_\tau(1+\vartheta),\nu_\tau} \zeta_\tau^{\nu_\tau} x^{\mu_\tau(1+\vartheta)}\}$$

in ihre einzelnen Glieder zerlegt werden — es darf ohne weiteres $\mu_{\tau+1} > \mu_\tau(1+\vartheta)$ angenommen werden, so daß die Polynome nicht übereinandergreifen —, besitzt den Konvergenzradius r_1^0. Wie man leicht nachprüft, genügt sie überdies den Voraussetzungen des Satzes 1, wenn als Folge a_{μ_τ} die Folge $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ gewählt wird. Wie aus dem Beweis des Satzes 1 hervorgeht, gilt daher, wenn man auf diese Potenzreihe die Transformation (I_1) mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $k = \tilde{k}$ anwendet, in jeder noch so kleinen Umgebung $\mathfrak{U}_{x_0}$ von x_0

$$\overline{\lim_{\tau \to \infty}} \sqrt[\mu_\tau^*]{|A_{\mu_\tau^*}(x)|} \geqq 1.$$

Offensichtlich ist aber $A_{\mu_\tau^*}(x) = B'_{\mu_\tau^* \nu_\tau}(x, \zeta_\tau)$, und wir haben einen Widerspruch zu (88).

2. Ist dagegen $\lim_{\tau \to \infty} \frac{\mu_\tau}{\mu_\tau + \nu_\tau} = 0$, so bilde man mit Hilfe der beim Beweis des Satzes 6 benutzten Funktion $T_{3,\tau}(t)$, wo $k_{3,\tau}^{(\iota)}$ alle ganzen Zahlen mit $1 \leqq |k_{3,\tau}^{(\iota)}| \leqq \vartheta \mu_\tau$ (also $\alpha_{3,\tau} = [\vartheta \mu_\tau]$) durchlaufen soll, die lineare Kombination

$$B'_{\mu_\tau^*, \nu_\tau}(x, \zeta_\tau) = \sum_{p=-[\vartheta \mu_\tau]}^{+[\vartheta \mu_\tau]} P_{3,\tau}^{(p)} e^{-p \mu_\tau \frac{\pi i}{\mu_\tau + \nu_\tau}} B'_{\mu_\tau^*, \nu_\tau}\left(x e^{p \frac{\pi i}{\mu_\tau + \nu_\tau}}, \zeta_\tau\right) = T_{3,\tau}(1)\, \Gamma_{\mu_\tau^*}^{\mu_\tau} a_{\mu_\tau \nu_\tau} x^{\mu_\tau} \zeta_\tau^{\nu_\tau}.$$

Danach gibt es zu jedem x gewiß ein $p = p_\tau$ zwischen $-[\vartheta \mu_\tau]$ und $+[\vartheta \mu_\tau]$ derart, daß

$$\left| B'_{\mu_\tau^*, \nu_\tau}\left(x e^{p_\tau \frac{\pi i}{\mu_\tau + \nu_\tau}}, \zeta_\tau\right) \right| \geqq \frac{T_{3,\tau}(1)}{(2[\vartheta \mu_\tau]+1) P_{3,\tau}^{(p_\tau)}} \Gamma_{\mu_\tau^*}^{\mu_\tau} \left| a_{\mu_\tau \nu_\tau} x^{\mu_\tau} \zeta_\tau^{\nu_\tau} \right|$$

ist, und dies steht, wie man auf Grund der Abschätzungen (74) und (75) sofort sieht, im Widerspruch zu (88).

3. Teil.

Die Überkonvergenztheorie für zweifache Potenzreihen.

§ 7.

Zur Überkonvergenztheorie bei einfachen Reihen.

In diesem Paragraphen soll eine Darstellung der Überkonvergenztheorie bei einfachen Reihen gegeben werden, die sich für die Übertragung auf mehrfache Reihen besonders eignet und wegen ihrer Einfachheit wohl auch an sich von Interesse ist.

1. Was zunächst die *Beispiele von Potenzreihen* mit überkonvergenten Abschnittsfolgen betrifft, so hat kürzlich Herr Ostrowski[24]) ein solches

[24]) A. Ostrowski, Zur Theorie der Überkonvergenz, Math. Annalen 103 (1930), S. 15–27, insbes. S. 17.

gegeben, das an Einfachheit nichts mehr zu wünschen übrig läßt. Zur Übertragung auf zweifache Reihen ist jedoch, wie im nächsten Paragraphen auseinandergesetzt wird, besonders geeignet ein Verfahren, das aus jeder Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^\mu, \qquad \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|a_\mu|} = 1,$$

welche reguläre Punkte am Rande ihres Konvergenzkreises hat, eine solche mit überkonvergenten Abschnittsfolgen zu konstruieren erlaubt.

Man wähle dazu aus der Folge der a_μ eine Teilfolge a_{μ_τ} $(\tau = 0, 1, 2, \ldots)$ mit

$$\lim_{\tau\to\infty} \sqrt[\mu_\tau]{|a_{\mu_\tau}|} = 1$$

aus, deren Indizes so rasch wachsen, daß für ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ die ϑ-Umgebungen der a_{μ_τ} nicht übereinandergreifen. Sodann wende man auf $f(x)$ die E-Transformation (I_1) mit $k > \frac{1}{\vartheta}$ an und bilde die Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} A_{\mu_\tau^*}(x) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \Big(\sum_{\varkappa=\mu_\tau^{*\prime}}^{\mu_\tau^{*\prime\prime}} \Gamma_{\mu_\tau^*}^{\varkappa} a_\varkappa x^\varkappa \Big), \tag{90}$$

die nach Hilfssatz 3 gleichmäßig in einer vollen Umgebung jedes regulären Punktes von $f(x)$ am Rande des Konvergenzkreises konvergiert. Zerlegt man die Polynome $A_{\mu_\tau^*}(x)$ in ihre einzelnen Glieder, so entsteht eine Potenzreihe

$$g(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu x^\mu,$$

die gewiß in $|x| < 1$ konvergiert, da $|b_\mu| \leqq |a_\mu|$ — die Faktoren Γ haben alle Werte zwischen 0 und 1 — für jedes μ gilt. Andererseits ist

$$b_{\mu_\tau} = \Gamma_{\mu_\tau^*}^{\mu_\tau} a_{\mu_\tau}, \qquad \text{also} \qquad \lim_{\tau\to\infty} \sqrt[\mu_\tau]{|b_{\mu_\tau}|} = 1$$

(nach Hilfssatz 6a). $g(x)$ hat also den Konvergenzradius 1, und die Folge seiner Partialsummen hat eine überkonvergente Teilfolge, nämlich die Folge der Partialsummen von (90).

2. Eine *hinreichende Bedingung* dafür, daß die Folge der Partialsummen einer Potenzreihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^\mu$ eine Teilfolge besitzt, welche gleichmäßig in einer vollen Umgebung eines regulären Punktes auf dem Rande des Konvergenzkreises der Reihe konvergiert, enthält der folgende *Satz von Ostrowski*[25]:

---

[25]) A. Ostrowski, Über eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten, Berliner Sitzungsberichte 1921, S. 557–565.

Satz 7. *In der Potenzreihe*

$$f(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty}a_\mu x^\mu \qquad \textit{mit} \qquad \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{|a_\mu|}=1$$

möge es unendlich oft vorkommen, nämlich für $\mu=\mu_\tau$ $(\tau=0,1,2,\ldots)$, *daß alle Koeffizienten* a_μ, *deren Indizes den Ungleichungen*

$$\mu_\tau<\mu\leqq\mu_\tau(1+\vartheta)$$

für ein von τ *unabhängiges* $\vartheta>0$ *genügen, verschwinden. Ist dann* $a_{\bar\mu_\tau}$ *der erste nicht verschwindende Koeffizient hinter* a_{μ_τ}, *so setze man*

$$f_0(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{\mu_1}x^{\mu_1},$$

$$f_\tau(x)=a_{\bar\mu_\tau}x^{\bar\mu_\tau}+a_{\bar\mu_\tau+1}x^{\bar\mu_\tau+1}+\ldots+a_{\mu_{\tau+1}}x^{\mu_{\tau+1}} \qquad (\tau>0).$$

Die Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty}f_\tau(x)$$

konvergiert gleichmäßig in einer vollen Umgebung jedes regulären Punktes von $f(x)$ *am Rande des Konvergenzkreises, stellt also dort die analytische Fortsetzung von* $f(x)$ *dar.*

Beweis[26]). Man wende auf $f(x)$ die E-Transformation (I_1) mit $k>\frac{1}{\vartheta}$ an. Nach Hilfssatz 3 konvergiert die transformierte Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}A_\mu(x) \tag{91}$$

gleichmäßig in einer vollen Umgebung jedes regulären Punktes von $f(x)$ am Rande des Konvergenzkreises. Nach Hilfssatz 5 enthält jedes einzelne $A_\mu(x)$ höchstens nichtverschwindende Koeffizienten a aus einem einzigen $f_\tau(x)$. Bezeichnet man daher mit $A_{\tilde\mu_\tau}(x)$ dasjenige unter den Polynomen $A_\mu(x)$, die Koeffizienten a aus $f_\tau(x)$ enthalten, mit höchstem Index, so gilt

$$\begin{aligned}
&A_0(x)+A_1(x)+\ldots+A_{\tilde\mu_0}(x)=f_0(x),\\
&A_{\tilde\mu_0+1}(x)+A_{\tilde\mu_0+2}(x)+\ldots+A_{\tilde\mu_1}(x)=f_1(x),\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Da aber mit (91) auch die Reihe

$$\begin{aligned}
&(A_0(x)+A_1(x)+\ldots+A_{\tilde\mu_0}(x))\\
&\quad+(A_{\tilde\mu_0+1}(x)+A_{\tilde\mu_0+2}(x)+\ldots+A_{\tilde\mu_1}(x))+\ldots=f_0(x)+f_1(x)+\ldots
\end{aligned}$$

gleichmäßig in einer vollen Umgebung jedes regulären Punktes von $f(x)$ am Rande des Konvergenzkreises konvergiert, so ist der Beweis fertig, wenn man nur beachtet, daß $\sum_{\tau=0}^{\infty}f_\tau(x)$ für $|x|<1$ mit $f(x)$ übereinstimmt.

[26]) Vgl. zu diesem Beweis: F. Lösch, Ein neuer Beweis des Ostrowskischen Überkonvergenzsatzes, Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 138–140.

Bemerkung. Bezeichnet man die μ-te Partialsumme von $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^\mu$ mit $s_\mu(x)$, so besagt Satz 7 die Überkonvergenz der Folge

$$s_{\mu_0}(x),\ s_{\mu_1}(x),\ \ldots,\ s_{\mu_\tau}(x),\ \ldots\ .$$

An dieser Überkonvergenz wird nichts geändert, wenn man zu $f(x)$ eine beliebige Potenzreihe von größerem Konvergenzradius als 1 addiert, mit anderen Worten: die Bedingung des Satzes kann so abgeändert werden, daß für diejenigen a_μ, deren Indizes den Ungleichungen

$$\mu_\tau < \mu \leqq \mu_\tau(1+\vartheta)$$

genügen, nur

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|a_\mu|} < 1$$

zu gelten braucht; ihr Verschwinden ist nicht notwendig.

3. Wie Herr Ostrowski[27]) bemerkte, ist die in Satz 7 ausgesprochene hinreichende Bedingung für das Eintreten der Überkonvergenz auch eine *notwendige Bedingung*, wenn sie nur im Sinne der vorstehenden Bemerkung abgeändert wird. Es gilt nämlich

Satz 8. *Besitzt die Folge der Partialsummen $s_\mu(x)$ einer Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^\mu \quad \textit{mit} \quad \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|a_\mu|} = 1$$

eine Teilfolge

$$s_{\mu_0}(x), s_{\mu_1}(x), \ldots, s_{\mu_\tau}(x), \ldots,$$

welche in einer gewissen vollen Umgebung eines am Rande des Konvergenzkreises gelegenen, regulären Punktes von $f(x)$ gleichmäßig konvergiert, so gibt es ein $\vartheta > 0$ und ein $d < 1$ derart, daß von einem gewissen τ an die Relationen bestehen:

A. $\quad |a_\mu| < d^\mu \quad$ *für* $\quad (1-\vartheta)\mu_\tau < \mu \leqq \mu_\tau,$

B. $\quad |a_\mu| < d^\mu \quad$ *für* $\quad (1+\vartheta)\mu_\tau > \mu > \mu_\tau.$

Beweis. Wir setzen zum Beweis

$$f_0(x) = s_{\mu_0}(x),\quad f_1(x) = s_{\mu_1}(x) - s_{\mu_0}(x),\quad f_2(x) = s_{\mu_2}(x) - s_{\mu_1}(x), \ldots$$

und beginnen mit einer Abschätzung dieser Polynome $f_\tau(x)$. Dabei setzen wir voraus, die Überkonvergenz finde gerade in einer Umgebung des Punktes $+1$ statt, d. h. die Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(x) \tag{92}$$

konvergiere gleichmäßig in einer vollen Umgebung $\mathfrak{U}$ des Punktes $+1$. An dieser Voraussetzung halten wir auch später stets fest.

---

[27]) A. Ostrowski, Über Potenzreihen, die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen, Berliner Sitzungsberichte 1923, S. 185—192.

1. Das Polynom

$$f_\tau(x) = a_{\mu_\tau} x^{\mu_\tau} + a_{\mu_\tau - 1} x^{\mu_\tau - 1} + \ldots + a_{\mu_{\tau-1}+1} x^{\mu_{\tau-1}+1}$$

möge durch die Transformation

$$x = \frac{1}{2}(1+u) \tag{93}$$

übergehen in

$$u^{\mu_\tau} S_\tau\left(\frac{1}{u}\right).$$

Dabei ist $S_\tau\left(\frac{1}{u}\right)$ ein Polynom in $\frac{1}{u}$. Wählt man $R > 1$ genügend klein, so gehört das durch (93) vermittelte Bild von $|u| \leqq R$ ganz dem Innern der Vereinigungsmenge aus $|x| < 1$, und $\mathfrak{U}$ an, und daher konvergiert

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} u^{\mu_\tau} S_\tau\left(\frac{1}{u}\right)$$

gleichmäßig in $|u| \leqq R$. Insbesondere sind dann die Glieder dieser Reihe gleichmäßig beschränkt, d. h. für eine geeignete Konstante M gilt:

$$\left|u^{\mu_\tau} S_\tau\left(\frac{1}{u}\right)\right| < M \quad \text{in} \quad |u| \leqq R \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots). \tag{94}$$

Wählt man weiter eine Zahl r mit $1 < r < R$, so nehmen die Polynome $S_\tau\left(\frac{1}{u}\right)$ ihr Maximum in $r \leqq |u| \leqq R$ auf $|u| = r$ an, und somit gilt nach (94)

$$r^{\mu_\tau} \operatorname*{Max}_{r \leqq |u| \leqq R} \left|S_\tau\left(\frac{1}{u}\right)\right| < M, \quad \text{also} \quad \operatorname*{Max}_{r \leqq |u| \leqq R} \left|S_\tau\left(\frac{1}{u}\right)\right| < \frac{M}{r^{\mu_\tau}}.$$

Hieraus folgt wieder nach (94)

$$\left|u^{\mu_\tau} S_\tau\left(\frac{1}{u}\right)\right| < \left(\frac{R}{r}\right)^{\mu_\tau} M \quad \text{in} \quad r \leqq |u| \leqq R. \tag{95}$$

Das durch (93) vermittelte Bild von $r \leqq |u| \leqq R$ ist das Ringgebiet $\mathfrak{R}$ zwischen den beiden Kreisen um $x = \frac{1}{2}$ mit Radius $\frac{1}{2}r$ bzw. $\frac{1}{2}R$. Für dieses Gebiet $\mathfrak{R}$ zeigt die Abschätzung (95):

$$|f_\tau(x)| < \left(\frac{R}{r}\right)^{\mu_\tau} M \quad \text{für} \quad x \text{ aus } \mathfrak{R} \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots). \tag{96}$$

2. Wir bilden nun mit Hilfe der Polynome $f_\tau(x)$ die Potenzreihe zweier Veränderlicher x, y:

$$F(x, y) = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} b_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \tag{97}$$

die entsteht, wenn man die Polynome der Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(x)\, y^{[\eta\, \mu_\tau]+1}, \tag{98}$$

wo η eine beliebige Irrationalzahl zwischen 0 und 1 bedeutet, in ihre einzelnen Glieder zerlegt. Diese Potenzreihe (97) konvergiert mindestens in $|x|<1$, $|y|<1$ absolut; denn jedes $b_{\mu\nu}$ ist entweder gleich Null oder es stimmt mit a_μ überein, so daß aus

$$(99)\qquad \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{|a_\mu|}=1 \quad \text{gewiß} \quad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}}\sqrt[\mu+\nu]{|b_{\mu\nu}|}\leqq 1$$

folgt. Die Reihe (97) definiert also eine mindestens in $|x|<1$, $|y|<1$ reguläre Funktion $F(x,y)$, und gegen diese Funktion konvergiert in $|x|<1$, $|y|<1$ auch die Polynomreihe (98). Letztere konvergiert aber, wie (96) zeigt, auch gleichmäßig für alle Punkte (x,y) mit x aus $\mathfrak{R}$ und $|y|\leqq \mathsf{P}$, falls nur $\mathsf{P}^\eta<\frac{r}{R}$ ist. Danach hat $F(x,y)$ zu einem Zahlenpaar ϱ_1,ϱ_2 reguläre Punkte (x,y) mit

$$|x|=\varrho_1,\quad |y|=\varrho_2,\quad \text{falls}\quad 1<\varrho_1<R,\quad \varrho_2^\eta<\frac{r}{R}.$$

3. Andrerseits zeigen wir, daß, falls $f(x)$ die Bedingung A nicht erfüllt, der Bereich absoluter Konvergenz der Potenzreihe (97) für $r_1\geqq 1$ charakterisiert wird durch die Gleichung

$$r_1 r_2^\eta=1,$$

daß also für jedes $\varrho\geqq 1$ die Zahlen

$$r_1=\varrho^\eta,\qquad r_2=\frac{1}{\varrho}$$

assoziierte Radien sind, somit

$$(100)\qquad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}}\sqrt[\mu+\nu]{|b_{\mu\nu}|\,\varrho^{\eta\mu-\nu}}=1$$

gilt.

Da alle $b_{\mu\nu}$ mit $\eta\mu>\nu$ nach der Konstruktion von $F(x,y)$ gleich Null sind, so folgt aus (99) für $\varrho\geqq 1$:

$$(101)\qquad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}}\sqrt[\mu+\nu]{|b_{\mu\nu}|\,\varrho^{\eta\mu-\nu}}\leqq \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}}\sqrt[\mu+\nu]{|b_{\mu\nu}|}\leqq 1.$$

Andrerseits gibt es, falls A nicht erfüllt ist, eine Folge von Koeffizienten $a_{\bar\mu_\tau}$ ($\tau=0,1,2,\ldots$; $a_{\bar\mu_\tau}$ aus $f_\tau(x)$) mit

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\sqrt[\bar\mu_\tau]{|a_{\bar\mu_\tau}|}=1 \quad\text{und}\quad \frac{\mu_\tau-\bar\mu_\tau}{\mu_\tau}\to 0,$$

daher ist

$$(102)\qquad \overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}}\sqrt[\mu+\nu]{|b_{\mu\nu}|\,\varrho^{\eta\mu-\nu}}\geqq \overline{\lim_{\tau\to\infty}}\sqrt[\bar\mu_\tau+[\eta\mu_\tau]+1]{|a_{\bar\mu_\tau}|\,\varrho^{\eta\,\bar\mu_\tau-[\eta\mu_\tau]-1}}=1.$$

Aus (101) und (102) folgt die Behauptung (100).

Nach Hilfssatz 1 sind auf Grund dieser Überlegung alle Stellen (x,y) mit $|x|=\varrho^\eta$, $|y|=\frac{1}{\varrho}$ für jedes $\varrho\geqq 1$ singulär.

4. Das zuletzt erhaltene Ergebnis steht im Widerspruch zu den unter 2. bewiesenen Tatsachen. Wählt man in der Tat ϱ so, daß

$$R > \varrho^{\eta} > \frac{R}{r}$$

ist, so kann man

$$\varrho_1 = \varrho^{\eta}, \qquad \varrho_2 = \frac{1}{\varrho}$$

setzen und hat wirklich $1 < \varrho_1 < R$, $\varrho_2^{\eta} < \frac{r}{R}$. Nach 2. gibt es also reguläre Punkte (x, y) mit $|x| = \varrho_1$, $|y| = \varrho_2$, während es nach 3. nur singuläre Punkte (x, y) auf $|x| = \varrho_1$, $|y| = \varrho_2$ geben soll.

Die Annahme, Relation A sei nicht erfüllt, führt mithin einen Widerspruch zu den aus der Überkonvergenz folgenden Tatsachen herbei.

5. Die Relation B wird völlig analog mit Hilfe der Funktion

$$G(x, y) = \sum_{\tau=0}^{\infty} f_{\tau}(x)\, y^{[\eta\, \mu_{\tau-1}]}$$

bewiesen[28]).

Bemerkung. Der Beweis des Satzes 8 läßt sich auch einfach durch Bezugnahme auf Satz 1 erbringen. In welcher Weise dabei genauer zu verfahren ist, zeigt der Beweis des dem Satz 8 entsprechenden Satzes 12 für zweifache Potenzreihen. (Vgl. § 10, S. 255ff.)

§ 8.

Beispiele zweifacher Potenzreihen mit überkonvergenten Abschnittsfolgen.

Beispiele zweifacher Potenzreihen mit überkonvergenten Abschnittsfolgen lassen sich natürlich sofort mit Hilfe der bekannten Beispiele aus der Theorie der einfachen Potenzreihen konstruieren. Die Frage jedoch, die sich bei zweifachen Reihen aufdrängt, ist die, ob es zu *jeder* Gleichung $\Phi(r_1, r_2) = 0$, welche den Bereich absoluter Konvergenz einer Potenzreihe charakterisiert, auch Potenzreihen mit überkonvergenten Abschnittsfolgen gibt.

Daß dies nicht der Fall ist, zeigt sofort Hilfssatz 1, denn zu jeder Kurve $r_1^{\eta} r_2 = \text{Konst.}$ (η irrational) gehören Potenzreihen, deren Bereich absoluter Konvergenz durch $r_1^{\eta} r_2 = \text{Konst.}$ charakterisiert wird, aber alle diese Potenzreihen sind nicht fortsetzbar, können also gewiß auch keine überkonvergenten Abschnittsfolgen besitzen.

Man kann daher bestenfalls folgenden Satz, der sich auch tatsächlich beweisen läßt, erwarten:

---

[28]) Vgl. F. Lösch, Zur Theorie der Überkonvergenz, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 41 (1932). Auszug aus einem auf der Jahresversammlung in Bad Elster gehaltenen Vortrag.

Satz 9. *Gibt es unter den Potenzreihen*

$$f(x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu}, \tag{103}$$

deren Bereich absoluter Konvergenz durch die Gleichung $\Phi(r_1, r_2) = 0$ *charakterisiert wird, überhaupt fortsetzbare Reihen, so gibt es auch solche mit überkonvergenten Abschnittsfolgen.*

Beweis. Wir erbringen den Beweis, indem wir aus einer fortsetzbaren Reihe heraus eine Reihe mit einer überkonvergenten Abschnittsfolge konstruieren. Diese Reihe wird sogar über jeden regulären Punkt von $f(x, y)$ hinaus konvergieren.

Dazu überdecken wir die Kurve $\Phi(r_1, r_2) = 0$ der r_1, r_2-Ebene mit abzählbar unendlich vielen, überall dicht gelegenen Punkten

$$(r_1^{(1)}, r_2^{(1)}), (r_1^{(2)}, r_2^{(2)}), \ldots, (r_1^{(\tau)}, r_2^{(\tau)}), \ldots$$

und ordnen diesen Paaren assoziierter Konvergenzradien gewisse, sicher vorhandene Koeffizientenfolgen zu, nämlich

$(r_1^{(1)}, r_2^{(1)})$ eine Folge $a_{\mu_1^{(1)},\nu_1^{(1)}}, a_{\mu_2^{(1)},\nu_2^{(1)}}, \ldots, a_{\mu_\sigma^{(1)},\nu_\sigma^{(1)}} \ldots$

$$\text{mit} \quad \lim_{\sigma\to\infty} \sqrt[\mu_\sigma^{(1)}+\nu_\sigma^{(1)}]{|a_{\mu_\sigma^{(1)}\nu_\sigma^{(1)}}|\, r_1^{(1)\mu_\sigma^{(1)}} r_2^{(1)\nu_\sigma^{(1)}}} = 1,$$

$(r_1^{(2)}, r_2^{(2)})$ eine Folge $a_{\mu_1^{(2)},\nu_1^{(2)}}, a_{\mu_2^{(2)},\nu_2^{(2)}}, \ldots, a_{\mu_\sigma^{(2)},\nu_\sigma^{(2)}} \ldots$

$$\text{mit} \quad \lim_{\sigma\to\infty} \sqrt[\mu_\sigma^{(2)}+\nu_\sigma^{(2)}]{|a_{\mu_\sigma^{(2)}\nu_\sigma^{(2)}}|\, r_1^{(2)\mu_\sigma^{(2)}} r_2^{(2)\nu_\sigma^{(2)}}} = 1,$$

. . . . . .

Aus diesen Folgen wählen wir eine neue Folge

$$a_{\mu_1\nu_1}, a_{\mu_2\nu_2}, \ldots, a_{\mu_\sigma\nu_\sigma}, \ldots$$

in gleich zu beschreibender Weise aus. Ist ϑ eine fest gewählte Zahl > 0, so sei

1. $a_{\mu_1\nu_1} = a_{\mu_1^{(1)}\nu_1^{(1)}}$.

2. Ist $\bar{\mu}_1 = \mu_1(1+\vartheta)$, $\bar{\nu}_1 = \nu_1(1+\vartheta)$, so sei $a_{\mu_2\nu_2}$ gleich dem ersten Koeffizienten $a_{\mu_\sigma^{(2)}\nu_\sigma^{(2)}}$ mit $\mu_\sigma^{(2)} > \bar{\mu}_1(1+\vartheta)$ oder $\nu_\sigma^{(2)} > \bar{\nu}_1(1+\vartheta)$.

3. Ist $\bar{\mu}_2 = \mathrm{Max}\{\bar{\mu}_1(1+\vartheta), \mu_2(1+\vartheta)\}$, $\bar{\nu}_2 = \mathrm{Max}\{\bar{\nu}_1(1+\vartheta), \nu_2(1+\vartheta)\}$, so sei $a_{\mu_3\nu_3}$ gleich dem ersten auf $a_{\mu_1\nu_1}$ folgenden Koeffizienten $a_{\mu_\sigma^{(1)}\nu_\sigma^{(1)}}$ mit $\mu_\sigma^{(1)} > \bar{\mu}_2(1+\vartheta)$ oder $\nu_\sigma^{(1)} > \bar{\nu}_2(1+\vartheta)$.

4. Ist $\bar{\mu}_3 = \mathrm{Max}\{\bar{\mu}_2(1+\vartheta), \mu_3(1+\vartheta)\}$, $\bar{\nu}_3 = \mathrm{Max}\{\bar{\nu}_2(1+\vartheta), \nu_3(1+\vartheta)\}$, so sei $a_{\mu_4\nu_4}$ gleich dem ersten auf $a_{\mu_2\nu_2}$ folgenden Koeffizienten $a_{\mu_\sigma^{(2)}\nu_\sigma^{(2)}}$ mit $\mu_\sigma^{(2)} > \bar{\mu}_3(1+\vartheta)$ oder $\nu_\sigma^{(2)} > \bar{\nu}_3(1+\vartheta)$.

5. Ist $\bar{\mu}_4 = \mathrm{Max}\{\bar{\mu}_3(1+\vartheta), \mu_4(1+\vartheta)\}$, $\bar{\nu}_4 = \mathrm{Max}\{\bar{\nu}_3(1+\vartheta), \nu_4(1+\vartheta)\}$, so sei $a_{\mu_5\nu_5}$ gleich dem ersten Koeffizienten $a_{\mu_\sigma^{(3)}\nu_\sigma^{(3)}}$ mit $\mu_\sigma^{(3)} > \bar{\mu}_4(1+\vartheta)$ oder $\nu_\sigma^{(3)} > \bar{\nu}_4(1+\vartheta)$

usw.

Es ist evident, wie fortzufahren ist: $a_{\mu_6\nu_6}$ wird wieder ein $a_{\mu_\sigma^{(1)}\nu_\sigma^{(1)}}$, $a_{\mu_7\nu_7}$ ein $a_{\mu_\sigma^{(2)}\nu_\sigma^{(2)}}$, $a_{\mu_8\nu_8}$ ein $a_{\mu_\sigma^{(3)}\nu_\sigma^{(3)}}$, $a_{\mu_9\nu_9}$ ein $a_{\mu_\sigma^{(4)}\nu_\sigma^{(4)}}$ usw.

Nunmehr wenden wir auf $f(x, y)$ die Transformation (I_2) mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $k > \frac{2}{\vartheta}$ an. Dann greifen nach Hilfssatz 8b die Polynome $A_{\mu_\sigma^* \nu_\sigma^*}(x\,y)$ nicht übereinander. Weiter konvergiert nach Hilfssatz 4 die Polynomreihe

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} A_{\mu_\sigma^* \nu_\sigma^*}(x, y) \tag{104}$$

gleichmäßig in einer vollen Umgebung jedes regulären Punktes von $f(x, y)$ am Rande seines Bereichs absoluter Konvergenz. Die Potenzreihe

$$g(x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_{\mu\nu} x^\mu y^\nu,$$

die entsteht, wenn die Polynome der Reihe (104) in ihre Glieder zerlegt werden, hat einen mindestens ebenso großen Bereich absoluter Konvergenz wie $f(x, y)$, da stets $|b_{\mu\nu}| \leqq |a_{\mu\nu}|$ ist, weil alle Größen Γ Werte zwischen 0 und 1 besitzen. Wie aus unserer Konstruktion der $a_{\mu_\tau\nu_\tau}$ und Hilfssatz 8a folgt, hat aber $g(x, y)$ die sämtlichen Paare

$$(r_1^{(1)}, r_2^{(1)}), (r_1^{(2)}, r_2^{(2)}), \ldots, (r_1^{(\tau)}, r_2^{(\tau)}), \ldots$$

als Paare assoziierter Konvergenzradien, also wird — wegen der Stetigkeit von $\Phi(r_1, r_2)$ — der Bereich absoluter Konvergenz von $g(x, y)$ durch $\Phi(r_1, r_2) = 0$ charakterisiert.

Da die Folge der Partialsummen

$$S_{\bar{\mu}_\sigma, \bar{\nu}_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots)$$

von $g(x, y)$ auf Grund unserer Konstruktion mit der Folge aller Partialsummen von (104) übereinstimmt, so konvergiert sie gleichmäßig in einer vollen Umgebung jedes regulären Punktes von $f(x, y)$ — diese Punkte sind demnach auch reguläre Punkte von $g(x, y)$ — am Rande des Bereichs absoluter Konvergenz.

§ 9.

Der Überkonvergenzsatz für zweifache Potenzreihen.

1. Während bei einfachen Potenzreihen die Überkonvergenz nur bei einem ganz speziellen Reihentypus, nämlich den „*Lückenreihen*“ auftritt, ist sie bei zweifachen Reihen durchaus nichts Besonderes. Das liegt daran,

daß bei zweifachen Reihen das Auftreten von „*Lücken*“ die Regel ist. Ist nämlich (r_1, r_2) ein Paar assoziierter Radien und ϑ_1, ϑ_2 ein nicht zu (r_1, r_2) gehöriges Zahlenpaar (vgl. § 1, S. 205), so kann im Hinblick auf (r_1, r_2) die Umgebung der Geraden $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$ im Schema der $a_{\mu\nu}$ als „*Lücke*“ aufgefaßt werden, denn für die dieser Umgebung angehörigen $a_{\mu\nu}$ gilt ja $\overline{\lim}_{\mu+\nu\to\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2^{\nu}} < 1$.[29])

Die eben erwähnte Tatsache findet ihren Niederschlag im folgenden

Satz 10. *Ist das Funktionselement*

$$f(x, y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu}$$

in allen Punkten (x_0, y) mit $|x_0| = r_1$, $|y| = r_2$ (x_0 fest, y auf dem Kreis beliebig), wo r_1, r_2 ein Paar endlicher assoziierter Konvergenzradien von $f(x, y)$ bedeutet und r_1 nicht Maximalradius ist, regulär, so gibt es eine Zahl $\theta > 0$ derart, daß die Partialsummen $s_{\mu\nu}(x, y)$ mit $\mu > \theta\nu$ gleichmäßig konvergieren in einem Bereich $(\mathfrak{U}_{x_0}, \tilde{\mathfrak{U}}_y)$, wo $\mathfrak{U}_{x_0}$ einen hinreichend kleinen Kreis um x_0, $\tilde{\mathfrak{U}}_y$ einen hinreichend kleinen, den Kreis $|y| = r_2$ im Innern enthaltenden Kreis um $y = 0$ bedeutet.

Beweis. Da r_1 nicht Maximalradius ist, so ist das Paar assoziierter Radien r_1, r_2 von dem Zahlenpaar $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 0$ unabhängig, es gibt also eine Zahl $\theta > 0$, derart, daß für die Gesamtheit der Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ mit $\mu \geqq \theta\nu$ gilt

$$\overline{\lim}_{\mu+\nu\to\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2^{\nu}} < 1$$

bzw. eine analoge Relation, wenn $r_1 = 0$ oder $r_2 = 0$ ist. Zerlegt man daher $f(x, y)$ in die beiden Funktionen

$$f_1(x, y) = \sum_{\substack{\mu,\nu=0 \\ \mu<\theta\nu}}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu}, \qquad f_2(x, y) = \sum_{\substack{\mu,\nu=0 \\ \mu\geqq\theta\nu}}^{\infty} a_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu},$$

so lassen sich über dieselben folgende Aussagen machen:

a) $f_2(x, y)$ ist in allen Punkten (x, y) eines Bereichs $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ regulär, wo $\mathfrak{B}_1$ einen Kreis $|x| = r_1$ im Innern enthaltenden Kreis um $x = 0$, $\mathfrak{B}_2$ einen den Kreis $|y| = r_2$ im Innern enthaltenden Kreis um $y = 0$ bedeutet ($\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ abgeschlossen). Die Partialsummen von $f_2(x, y)$ konvergieren daher gleichmäßig in $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$.

b) $f_1(x, y)$ ist in den im Satz genannten Punkten (x_0, y) regulär. Wenden wir daher die Transformation (IIa) mit beliebigem k auf $f_1(x, y)$

[29]) Vgl. dazu die Auseinandersetzung über „*Lücken*“ in § 4, S. 216.

an, so konvergiert die transformierte Reihe

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} B'_{\mu\nu}(x, y) \tag{105}$$

nach Hilfssatz 9 gleichmäßig in einem abgeschlossenen Bereich $(\mathfrak{U}'_{x_0}, \tilde{\mathfrak{U}}'_y)$, wo $\mathfrak{U}'_{x_0}$ einen Kreis um x_0, $\tilde{\mathfrak{U}}'_y$ einen, den Kreis $|y| = r_2$ im Innern enthaltenden Kreis um $y = 0$ bedeutet.

Die Summe aller $B'_{\mu\nu}(x, y)$ mit gleichem Index ν ist nichts anderes als die durch (I_1) vermittelte (eindimensionale) E-Transformation der ν-ten Zeile von $\sum a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$, stimmt also (wegen $E(1) = 1$) mit dem Polynom

$$y^\nu (a_{0\nu} + a_{1\nu} x + \ldots + a_{\theta\nu,\nu} x^{\theta\nu})$$

überein. Daher ist die ν-te Partialsumme der zu (105) gehörigen Zeilenreihe, die in $(\mathfrak{U}'_{x_0}, \tilde{\mathfrak{U}}'_y)$ ebenfalls gleichmäßig konvergent ist, identisch mit jeder Partialsumme

$$s^{(1)}_{\mu\nu}(x, y) \quad \text{von } f_1(x, y) \quad \text{mit } \mu > \theta\nu,$$

und somit konvergiert das System der Partialsummen $s^{(1)}_{\mu\nu}(x, y)$ mit $\mu > \theta\nu$ gleichmäßig in $(\mathfrak{U}'_{x_0}, \tilde{\mathfrak{U}}'_y)$.

Da nach a) die Partialsummen $s^{(2)}_{\mu\nu}(x, y)$ von $f_2(x, y)$ in $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ gleichmäßig konvergieren, so konvergieren die Partialsummen

$$s_{\mu\nu}(x, y) = s^{(1)}_{\mu\nu}(x, y) + s^{(2)}_{\mu\nu}(x, y) \text{ von } f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) \text{ mit } \mu > \theta\nu$$

gleichmäßig in $(\mathfrak{U}_{x_0}, \tilde{\mathfrak{U}}_y)$, wenn $\mathfrak{U}_{x_0}$ den Durchschnitt von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{U}'_{x_0}$, $\tilde{\mathfrak{U}}_y$ den Durchschnitt von $\mathfrak{B}_2$ und $\tilde{\mathfrak{U}}'_y$ bedeutet. Damit ist der Beweis fertig.

Bemerkung. Ein völlig analoger Satz läßt sich aussprechen für den Fall, daß $f(x, y)$ in allen Punkten (x, y_0) mit $|x| = r_1$, $|y_0| = r_2$ regulär ist und r_2 nicht Maximalradius ist.

2. Der unter 1. bewiesene Satz 10 leistet in gewisser Hinsicht mehr, in anderer Hinsicht weniger als der Überkonvergenzsatz bei einfachen Reihen: Er enthält keine einschränkende Bedingung für die Koeffizienten von $f(x, y)$, aber er stellt große Ansprüche an das Verhalten von $f(x, y)$ am Rande des Konvergenzbereichs. Dagegen kann der folgende Satz, der nun „*Lücken*" fordert, die sich quer durch das ganze Koeffizientenschema von $f(x, y)$ ziehen, als genaues Analogon des Überkonvergenzsatzes bei einfachen Reihen angesehen werden:

Satz 11. *Das Funktionselement $f(x, y)$ sei im Punkte (x_0, y_0) mit $|x_0| = r_1$, $|y_0| = r_2$, wobei r_1, r_2 ein endliches Paar assoziierter Radien bedeutet, regulär. Existiert dann eine Folge $a_{\mu_\tau \nu_\tau}$ $(\tau = 0, 1, 2, \ldots;$ μ_τ, ν_τ monoton $\to \infty$) von Koeffizienten und dazu ein $\vartheta > 0$, derart, daß für jedes τ die sämtlichen Koeffizienten $a_{\mu\nu}$, für deren Indizes wenigstens*

eine der Ungleichungen

$$\mu_\tau < \mu < \mu_\tau(1+\vartheta), \quad \nu_\tau < \nu < \nu_\tau(1+\vartheta)$$

und zugleich das Ungleichungspaar

$$\mu < \mu_\tau(1+\vartheta), \quad \nu < \nu_\tau(1+\vartheta)$$

besteht, verschwinden, so existiert ein unendliches Teilsystem des Systems der Partialsummen $s_{\mu\nu}(x, y)$ von $f(x, y)$, das gleichmäßig in einer vollen Umgebung $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ des Punkts (x_0, y_0) konvergiert und dort die analytische Fortsetzung von $f(x, y)$ liefert. Dieses Teilsystem besteht mindestens aus der Gesamtheit derjenigen $s_{\mu\nu}(x, y)$, deren Indizes irgendeinem der Ungleichungspaare

$$\mu_\tau < \mu < \mu_\tau(1+\vartheta), \quad \nu_\tau < \nu < \nu_\tau(1+\vartheta) \quad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügen.

Beweis. Zum Beweis übe man auf $f(x, y)$ die Transformation (I_2) mit $k > \frac{2}{\vartheta}$ aus. Die transformierte Reihe

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu\nu}(x, y) \tag{106}$$

konvergiert nach Hilfssatz 4 wegen der Regularität von $f(x, y)$ in (x_0, y_0) normal in einer vollen Umgebung $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ des Punktes (x_0, y_0).

Setzt man

$$s_{\mu_0\nu_0}(x, y) = f_{\mu_0\nu_0}(x, y), \quad s_{\mu_1\nu_1}(x, y) - s_{\mu_0\nu_0}(x, y) = f_{\mu_1\nu_1}(x, y), \quad \ldots,$$

$$s_{\mu_\tau\nu_\tau}(x, y) - s_{\mu_{\tau-1}\nu_{\tau-1}}(x, y) = f_{\mu_\tau\nu_\tau}(x, y), \quad \ldots,$$

so enthält nach Hilfssatz 7 jedes einzelne $A_{\mu\nu}(x, y)$ höchstens nichtverschwindende Koeffizienten a aus einem einzigen $f_{\mu_\tau\nu_\tau}(x, y)$, und es ist allgemein $f_{\mu_\tau\nu_\tau}(x, y)$ gleich der Summe derjenigen $A_{\mu\nu}(x, y)$, welche nichtverschwindende Koeffizienten a aus $f_{\mu_\tau\nu_\tau}(x, y)$ enthalten. Daher stimmt die Folge

$$s_{\mu_\tau\nu_\tau}(x, y) \quad (\tau = 0, 1, 2, \ldots) \text{ der Partialsummen von } \sum_{\tau=0}^{\infty} f_{\mu_\tau\nu_\tau}(x, y)$$

überein mit einer Folge von Partialsummen $S_{\tilde{\mu}_\tau\tilde{\nu}_\tau}(x, y)$ mit $\tilde{\mu}_\tau \to \infty$, $\tilde{\nu}_\tau \to \infty$ aus dem System der Partialsummen $S_{\mu\nu}(x, y)$ der Reihe (106), konvergiert also gleichmäßig in $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$. Da noch alle Koeffizienten $a_{\mu\nu}$, deren Indizes wenigstens einer der Ungleichungen

$$\mu_\tau < \mu < \mu_\tau(1+\vartheta), \quad \nu_\tau < \nu < \nu_\tau(1+\vartheta) \quad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

und zugleich dem Ungleichungspaar

$$\mu < \mu_\tau(1+\vartheta), \quad \nu < \nu_\tau(1+\vartheta)$$

genügen, verschwinden, so stimmen für jedes τ sämtliche Partialsummen

$s_{\mu\nu}(x, y)$, deren Indizes dem Ungleichungspaar

$$\mu_\tau < \mu < \mu_\tau(1+\vartheta), \quad \nu_\tau < \nu < \nu_\tau(1+\vartheta)$$

genügen, mit $s_{\mu_\tau\nu_\tau}(x, y)$ überein, und daraus ergibt sich die Behauptung des Satzes.

3. Wie bei Funktionen einer Veränderlichen können die in Satz 11 geforderten Lücken noch durch nichtverschwindende, aber *„kleine"* Koeffizienten ausgefüllt werden. Das heißt genauer, man kann die Lückenbedingung ersetzen durch die Forderung, es sollen alle Glieder $a_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$, deren Indizes wenigstens einer der Ungleichungen

$$\mu_\tau < \mu < \mu_\tau(1+\vartheta), \quad \nu_\tau < \nu < \nu_\tau(1+\vartheta)$$

und zugleich dem Ungleichungspaar

$$\mu < \mu_\tau(1+\vartheta), \quad \nu < \nu_\tau(1+\vartheta)$$

für irgendein τ genügen, eine Potenzreihe bilden, die in allen Punkten (x, y) mit $|x| = r_1$, $|y| = r_2$ regulär ist.

Um dies einzusehen, darf man nur $f(x, y)$ zerlegen in zwei Funktionen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$, von denen $f_2(x, y)$ die Summe aller Glieder aus $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$ ist, deren Indizes wenigstens einer der Ungleichungen

$$\mu_\tau < \mu < \mu_\tau(1+\vartheta), \quad \nu_\tau < \nu < \nu_\tau(1+\vartheta) \quad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

und zugleich dem Ungleichungspaar

$$\mu < \mu_\tau(1+\vartheta), \quad \nu < \nu_\tau(1+\vartheta)$$

genügen. $f_2(x, y)$ konvergiert gleichmäßig in einem Bereich $(|x| \leqq r_1', |y| \leqq r_2')$ mit $r_1' > r_1$, $r_2' > r_2$. Dagegen erfüllt $f_1(x, y) = f(x, y) - f_2(x, y)$ die Bedingung des Satzes 11. Die in Satz 11 genannten Partialsummen von $f(x, y)$ konvergieren daher auch jetzt in einer vollen Umgebung $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ des Punktes (x_0, y_0) gleichmäßig.

Man kann aber, mit Rücksicht auf Satz 10, die Voraussetzung noch etwas weiter fassen. Wie soeben erkennt man nämlich unter Heranziehung von Satz 10, indem man $f(x, y)$ in vier Funktionen zerlegt, daß bereits folgende Forderung genügt:

Diejenigen Glieder von $f(x, y)$, deren Indizes für irgendein τ dem Ungleichungspaar

$$\mu_\tau < \mu < \mu_\tau(1+\vartheta), \quad \nu_\tau < \nu < \nu_\tau(1+\vartheta)$$

genügen, bilden eine in allen Punkten (x, y) mit $|x| = r_1$, $|y| = r_2$ reguläre Funktion. Diejenigen Glieder dagegen, deren Indizes für irgendein τ den Ungleichungen

$$\mu_\tau < \mu < \mu_\tau(1+\vartheta), \quad \nu < \nu_\tau$$

genügen, bilden eine in allen Punkten (x, y_0) mit $|x| = r_1$ reguläre Funktion, und diejenigen Glieder endlich, deren Indizes für irgendein τ den Ungleichungen

$$\mu < \mu_\tau, \quad \nu_\tau < \nu < \nu_\tau(1+\vartheta)$$

genügen, bilden eine in allen Punkten (x_0, y) mit $|y| = r_2$ reguläre Funktion.

Auch wenn nur diese Forderung erfüllt ist, konvergiert das in Satz 11 genannte Teilsystem der Partialsummen $s_{\mu\nu}(x, y)$ von $f(x, y)$ gleichmäßig in einer vollen Umgebung $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ von (x_0, y_0) und liefert dort die analytische Fortsetzung von $f(x, y)$.

§ 10.

Die Umkehrung des Überkonvergenzsatzes bei zweifachen Potenzreihen.

Die am Ende des vorigen Paragraphen auseinandergesetzte, für das Eintreten der Überkonvergenz hinreichende Bedingung ist auch notwendig. Wir werden nämlich folgenden Satz beweisen:

Satz 12. *Besitzt das Funktionselement $f(x, y)$ eine Folge von Partialsummen*

$$s_{\mu_\tau \nu_\tau}(x, y) \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots; \mu_\tau, \nu_\tau \to \infty), \tag{107}$$

welche in einer gewissen Umgebung $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ des Punktes (x_0, y_0) mit $|x_0| = r_1$, $|y_0| = r_2$, wo r_1, r_2 ein endliches Paar assoziierter Konvergenzradien bedeutet, gleichmäßig konvergiert, so gibt es eine Zahl $\vartheta > 0$, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

A. *Die Summe der Glieder $a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$, deren Indizes einem der Ungleichungspaare*

$$\mu_\tau(1-\vartheta) \leqq \mu \leqq \mu_\tau, \quad \nu_\tau(1-\vartheta) \leqq \nu \leqq \nu_\tau \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügen, stellt eine in allen Punkten (x, y) mit $|x| = r_1$, $|y| = r_2$ reguläre Funktion dar.

B. *Die Summe der Glieder $a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ von $f(x, y)$, deren Indizes einem der Ungleichungspaare*

$$\mu < \mu_\tau(1-\vartheta), \quad \nu_\tau(1-\vartheta) \leqq \nu \leqq \nu_\tau \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügen, stellt eine in allen Punkten (x_0, y) mit $|y| = r_2$ reguläre Funktion dar.

Ebenso stellt die Summe derjenigen Glieder $a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ von $f(x, y)$, deren Indizes einem der Ungleichungspaare

$$\nu < \nu_\tau(1-\vartheta), \quad \mu_\tau(1-\vartheta) \leqq \mu \leqq \mu_\tau \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügen, eine in allen Punkten (x, y_0) mit $|x| = r_1$ reguläre Funktion dar.

Vorbemerkung. Die Bedingung A entspricht der Lückenbedingung des Satzes 8 für einfache Potenzreihen. Es besteht jedoch hier insofern keine völlige Analogie, als bei einfachen Reihen die Gesamtheit derjenigen a_μ, welche den *vollen* ϑ-Umgebungen der a_{μ_τ} angehören, *„klein"* sein, d. h. die Bedingung

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|a_\mu|} \leqq \mathsf{P} < 1$$

erfüllen mußten, während bei zweifachen Potenzreihen nur die Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ mit

$$\mu_\tau(1-\vartheta) \leqq \mu \leqq \mu_\tau, \quad \nu_\tau(1-\vartheta) \leqq \nu \leqq \nu_\tau \quad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

im Sinne der obigen Bedingung *„klein"* sein müssen. Daß tatsächlich nicht alle Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ aus den *vollen* ϑ-Umgebungen der $a_{\mu_\tau\nu_\tau}$ *„klein"* sein müssen, zeigt das folgende Beispiel:

Es sei $f(x, y)$ definiert durch die Polynomreihe

$$(108)\quad f(x,y) = 1 + (x+y)^1 + (x+y)^{1+2} + (x+y)^{1+2+2^2} + \ldots .$$

Zerlegt man die Polynome in ihre einzelnen Glieder, so erhält man eine, $f(x, y)$ ebenfalls definierende Potenzreihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$, die das Paar assoziierter Radien $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{2}$ besitzt. Die Folge der Partialsummen der Reihe (108) stimmt überein mit der Folge der Partialsummen $s_{1+2+\ldots+2^\tau,\, 1+2+\ldots+2^\tau}$ $(\tau = 0, 1, 2, \ldots)$ der Potenzreihe und konvergiert gleichmäßig in einer vollen Umgebung jedes Punktes $(\frac{1}{2}e^{i\varphi}, \frac{1}{2}e^{i\psi})$ mit $\varphi \neq \psi$. Trotzdem gilt

$$\lim_{\tau\to\infty} \sqrt[\mu_\tau+\nu_\tau]{|a_{\mu_\tau\nu_\tau}| \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu_\tau+\nu_\tau}} = 1,$$

wenn

$$\mu_\tau = (1 + 2 + \ldots + 2^\tau), \quad \nu_\tau = (1 + 2 + \ldots + 2^\tau) + 1 \quad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

gewählt wird.

Beweis. Zum Beweis setzen wir — wir nehmen μ_τ, ν_τ monoton an, vgl. 2., S. 257 —

$$(109)\quad s_{\mu_0,\nu_0}(x,y) = f_0(x,y), \qquad s_{\mu_1,\nu_1}(x,y) - s_{\mu_0,\nu_0}(x,y) = f_1(x,y), \ldots,$$
$$s_{\mu_\tau,\nu_\tau}(x,y) - s_{\mu_{\tau-1},\nu_{\tau-1}}(x,y) = f_\tau(x,y), \ldots$$

dann sind die Partialsummen der Polynomreihe

$$(110)\qquad \sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(x,y)$$

identisch mit der Folge $s_{\mu_\tau\nu_\tau}(x, y)$.

1. Wir beginnen mit einer Abschätzung der Polynome $f_\tau(x, y)$. Dazu unterwerfen wir $f(x, y)$ der Transformation

$$(111)\qquad x = x'y', \qquad y = y'.$$

Dadurch geht $f(x, y)$ über in ein Element

$$\tilde{f}(x', y') = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} x'^{\mu} y'^{\mu+\nu},$$

und ebenso geht $f_\tau(x, y)$ über in

$$\tilde{f}_\tau(x', y') = y'^{\varrho_\tau} P_\tau(x', y') \qquad (\varrho_\tau = \mathrm{Min}\,(\mu_{\tau-1}, \nu_{\tau-1})),$$

wo $P_\tau(x', y')$ ein Polynom in x', y' ist.

Setzen wir zunächst $r_2 \neq 0$ voraus, so hat das Element $\tilde{f}(x', y')$ offensichtlich das Paar assoziierter Konvergenzradien

$$r_1' = \frac{r_1}{r_2}, \qquad r_2' = r_2$$

und ist zudem im Punkte $\left(x_0' = \frac{x_0}{y_0}, y_0' = y_0\right)$ regulär. Es konvergiert nämlich die Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \tilde{f}_\tau(x', y') \tag{112}$$

gleichmäßig in einer vollen Umgebung $(\mathfrak{U}_{x_0'}, \mathfrak{U}_{y_0'})$ des Punktes (x_0', y_0'), was daraus hervorgeht, daß bei hinreichend kleiner Wahl von $(\mathfrak{U}_{x_0'}, \mathfrak{U}_{y_0'})$ die durch (111) vermittelten Bilder der Punkte (x', y') aus $(\mathfrak{U}_{x_0'}, \mathfrak{U}_{y_0'})$ in $(\mathfrak{U}_{x_0}, \mathfrak{U}_{y_0})$ liegen.

Weiter gehört zu keinem Paar assoziierter Radien von $\tilde{f}(x', y')$ das Zahlenpaar $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 0$. Daher gehört zu jedem $r_2'' < r_2'$ ein assoziierter Radius $r_1'' > r_1'$. Wir wählen ein ϱ_2' mit $\varrho_2' < r_2'$ so groß, daß das durch

$$y' = y_0' \frac{v(1+v)}{2} \tag{113}$$

vermittelte Bild von $|v| \leqq 1$ ganz im Innern der Vereinigungsmenge $\mathfrak{B}_2$ von $|y'| \leqq \varrho_2'$ und $\mathfrak{U}_{y_0'}$ liegt. Sodann wählen wir ein r_2'' mit $\varrho_2' < r_2'' < r_2'$ und bezeichnen den dazu assoziierten Radius, der nach der vorigen Bemerkung größer als r_1' ist, mit r_1''. Endlich wählen wir ein ϱ_1' beliebig zwischen r_1' und r_1'' und bezeichnen mit $\mathfrak{D}_1$ den Durchschnitt von $|x'| \leqq \varrho_1'$ und $\mathfrak{U}_{x_0'}$. Dann konvergiert die Reihe (112) gleichmäßig für alle Punkte (x', y') aus $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{B}_2)$. Für die Punkte (x', y') mit x' aus $\mathfrak{D}_1$, $|y'| \leqq \varrho_2'$ konvergiert sie nämlich gleichmäßig, weil für alle diese Punkte $|x'| \leqq \varrho_1' < r_1''$, $|y'| \leqq \varrho_2' < r_2''$ gilt, für die Punkte aus $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{U}_{y_0'})$ dagegen wegen der gleichmäßigen Konvergenz in $(\mathfrak{U}_{x_0'}, \mathfrak{U}_{y_0'})$.

Aus der eben nachgewiesenen gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (112) in $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{B}_2)$ folgt die gleichmäßige Beschränktheit der Polynome $\tilde{f}_\tau(x', y')$ in $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{B}_2)$, also

$$|y'^{\varrho_\tau} P_\tau(x', y')| < M \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots).$$

Übt man auf diese Polynome $\tilde{f}_\tau(x', y')$ die Transformation (113) aus, so möge

$$\tilde{f}_\tau(x', y') = y'^{\varrho_\tau} P_\tau(x', y')$$

übergehen in

$$v^{\varrho_\tau} Q_\tau(x', v).$$

Da für genügend kleines $R > 1$ das durch (113) vermittelte Bild von $|v| \leqq R$ ganz im Innern von $\mathfrak{B}_2$ liegt, so gilt

$$|v^{\varrho_\tau} Q_\tau(x', v)| < M \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

für x' aus $\mathfrak{D}_1$ und $|v| \leqq R$. Das Polynom $Q_\tau(x', v)$ nimmt für jedes fest gewählte x' aus $\mathfrak{D}_1$ sein Maximum am Rande von $|v| \leqq R$ an; daher gilt auch

$$|Q_\tau(x', v)| < \frac{M}{R^{\varrho_\tau}} \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

für x' aus $\mathfrak{D}_1$ und $|v| \leqq R$. Wählt man nun noch r zwischen 1 und R, also $1 < r < R$, so folgt aus der vorigen Ungleichung

$$|v^{\varrho_\tau} Q_\tau(x', v)| < \left(\frac{r}{R}\right)^{\varrho_\tau} M \text{ für } x' \text{ aus } \mathfrak{D}_1 \text{ und } |v| \leqq r \quad (\tau = 0, 1, 2, \ldots).$$

Daher gilt auch für eine gewisse Umgebung $(\tilde{\mathfrak{U}}_{x_0'}, \tilde{\mathfrak{U}}_{y_0'})$ von (x_0', y_0')

$$|f_\tau(x', y')| < q^{\varrho_\tau} M \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots),$$

wenn $\frac{r}{R} = q < 1$ gesetzt wird; und schließlich für eine geeignete Umgebung $(\tilde{\mathfrak{U}}_{x_0}, \tilde{\mathfrak{U}}_{y_0})$ von (x_0, y_0)

$$|f_\tau(x, y)| < q^{\varrho_\tau} M. \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots). \tag{114}$$

Ist $r_3 = 0$, so erhält man dieselbe Abschätzung, wenn man statt (111) die Transformation $x = x'$, $y = x' y'$ vornimmt.

2. Wir wenden uns nun zum Beweis der Relation A. Wäre dieselbe nicht erfüllt, so gäbe es auch eine Teilfolge $s_{\mu_\tau' \nu_\tau'}(x, y)$ der $s_{\mu_\tau \nu_\tau}(x, y)$, für die sie nicht erfüllt wäre, und deren Indizes für ein $\vartheta' > 0$ den Relationen

$$\mu_{\tau+1}' > \mu_\tau'(1 + \vartheta'), \quad \nu_{\tau+1}' > \nu_\tau'(1 + \vartheta') \quad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügen würden. Weiter wäre dann die Relation A nicht erfüllt für die Folge

$$s_{\mu_{2\sigma}', \nu_{2\sigma}'}(x, y) \qquad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

oder für

$$s_{\mu_{2\sigma+1}', \nu_{2\sigma+1}'}(x, y) \qquad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es bedeutet daher keine Einschränkung, wenn wir von vornherein annehmen, es gelte für ein $\vartheta' > 0$

$$\mu_{\tau+1} > \mu_\tau(1 + \vartheta'), \quad \nu_{\tau+1} > \nu_\tau(1 + \vartheta') \quad (\tau = 0, 1, 2, \ldots), \tag{115}$$

und der Beweis ist fertig, wenn gezeigt ist, daß das Nichtbestehen der Bedingung A für eine der Teilfolgen

$$s_{\mu_{2\sigma} \nu_{2\sigma}}(x, y) \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots), \qquad s_{\mu_{2\sigma+1} \nu_{2\sigma+1}}(x, y) \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu einem Widerspruch mit Folgerungen führt, die sich aus der Tatsache der Überkonvergenz ergeben. Wir führen diesen Nachweis für die Folge $s_{\mu_{2\sigma}\nu_{2\sigma}}(x, y)$; völlig analog ist er für die Folge $s_{\mu_{2\sigma+1}\nu_{2\sigma+1}}(x, y)$ zu führen.

Nach (114) und (115) konvergiert die Polynomreihe

$$F(x, y) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} f_{2\sigma}(x, y) \tag{116}$$

gleichmäßig in der vollen Umgebung $(\tilde{\mathfrak{U}}_{x_0}, \tilde{\mathfrak{U}}_{y_0})$ von (x_0, y_0), denn es ist $\varrho_{2\sigma} = \mathrm{Min}(\mu_{2\sigma-1}, \nu_{2\sigma-1})$. Die Reihe (116) definiert also eine mindestens in $(\tilde{\mathfrak{U}}_{x_0}, \tilde{\mathfrak{U}}_{y_0})$ reguläre Funktion $F(x, y)$.

Zerlegt man andrerseits die Polynome $f_{2\sigma}(x, y)$ in ihre einzelnen Glieder, so entsteht eine Potenzreihe

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu}, \tag{117}$$

deren Bereich absoluter Konvergenz gewiß nicht kleiner ist als der von $f(x, y)$. Sie stellt in diesem Bereich $F(x, y)$ dar. Wir behaupten nun aber, falls die Bedingung A nicht erfüllt ist, besitzt die Reihe (117) das Paar assoziierter Radien r_1, r_2 und genügt für dieses Paar den Voraussetzungen des Satzes 6. In der Tat gibt es dann eine Folge von Koeffizienten

$$a_{\bar{\mu}_{2\sigma}, \bar{\nu}_{2\sigma}} \ (\sigma = 0, 1, 2, \ldots) \quad \text{mit} \quad \overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \sqrt[\bar{\mu}_{2\sigma}+\bar{\nu}_{2\sigma}]{|a_{\bar{\mu}_{2\sigma}\bar{\nu}_{2\sigma}}| r_1^{\bar{\mu}_{2\sigma}} r_2^{\bar{\nu}_{2\sigma}}} = 1, \tag{118}$$

— wir denken uns hier $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$; wäre etwa $r_2 = 0$, so ließe sich der Beweis wörtlich gleich führen, nur wäre die vorstehende Limesrelation zu ersetzen durch $\lim_{\zeta\to+0} \overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \sqrt[\bar{\mu}_{2\sigma}+\bar{\nu}_{2\sigma}]{|a_{\bar{\mu}_{2\sigma}\bar{\nu}_{2\sigma}}| r_1^{\bar{\mu}_{2\sigma}} \zeta^{\bar{\nu}_{2\sigma}}} = 1$ — deren Indizes zudem die Relationen:

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{\mu_{2\sigma} - \bar{\mu}_{2\sigma}}{\mu_{2\sigma}} = 0, \qquad \lim_{\sigma\to\infty} \frac{\nu_{2\sigma} - \bar{\nu}_{2\sigma}}{\nu_{2\sigma}} = 0 \tag{119}$$

erfüllen. Betrachtet man die ϑ'-Umgebungen dieser Koeffizienten $a_{\bar{\mu}_{2\sigma}\bar{\nu}_{2\sigma}}$, so können wegen (115) in dem Teil der ϑ'-Umgebung von $a_{\bar{\mu}_{2\sigma}\bar{\nu}_{2\sigma}}$ mit $\mu > \bar{\mu}_{2\sigma}$ sowie in dem Teil mit $\nu > \bar{\nu}_{2\sigma}$ alle nichtverschwindenden Koeffizienten angeordnet werden auf den Geraden

$$\mu = \text{Konst.} \quad \text{mit} \quad \bar{\mu}_{2\sigma} < \text{Konst.} \leqq \mu_{2\sigma}$$

bzw.

$$\nu = \text{Konst.} \quad \text{mit} \quad \bar{\nu}_{2\sigma} < \text{Konst.} \leqq \nu_{2\sigma}.$$

Nach (118) und (119) sind also die Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllt. (Man prüft leicht nach, daß sogar die Voraussetzungen des Satzes 5 erfüllt sind.) Danach wäre $F(x, y)$ in allen Punkten (x, y) mit $|x| = r_1$, $|y| = r_2$, insbesondere in (x_0, y_0) singulär, während es, wie oben gezeigt wurde, tatsächlich in $(\tilde{\mathfrak{U}}_{x_0}, \tilde{\mathfrak{U}}_{y_0})$ regulär ist. Die Annahme, Bedingung A sei nicht erfüllt, führt somit zu einem falschen Ergebnis.

3. Zum Nachweis der ersten der beiden Bedingungen B können wir aus dem am Anfang von 2. auseinandergesetzten Grund annehmen, es bestehen die Ungleichungen (115), und die genannte Bedingung sei nicht erfüllt für die Teilfolge $s_{\mu_{2\sigma}\nu_{2\sigma}}(x, y)$ $(\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$. Wir werden zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch zu der Tatsache der Regularität von $F(x, y)$ in (x_0, y_0) führt.

a) Wir behandeln zunächst den Fall $r_2 = 0$. Hier besagt die Regularität von $F(x, y)$ in (x_0, y_0) zugleich die Regularität in allen Punkten (x_0, y) mit $|y| = r_2$ (y auf $|y| = r_2$ beliebig). Wendet man daher auf $F(x, y)$ die Transformation (IIa) mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ und $k = \tilde{k} > \frac{1}{\vartheta'}$ an, so gilt für die Transformationspolynome

$$\overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|B'_{\mu\nu}(x, y)|} \leqq h < 1 \tag{120}$$

in einer gewissen Umgebung $(\mathfrak{U}'_{x_0}, \mathfrak{U}'_{y_0})$ von (x_0, y_0).

Würde andrerseits für jedes $\vartheta'' > 0$ die Gesamtheit der Glieder $a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$, deren Indizes einem der Ungleichungspaare

$$\mu < \mu_{2\sigma}(1 - \vartheta''), \quad \nu_{2\sigma}(1 - \vartheta'') \leqq \nu \leqq \nu_{2\sigma} \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügen, eine nicht in allen Punkten (x_0, y) mit $|y| = r_2$ reguläre Funktion bilden, so würde, da, wie unter 2. bewiesen wurde, die Bedingung A erfüllt ist, für hinreichend kleines $\vartheta'' > 0$ dasselbe für die Summe $\tilde{F}(x, y)$ aller Glieder $a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ gelten, deren Indizes einem der Ungleichungspaare

$$\mu \leqq \mu_{2\sigma}, \quad \nu_{2\sigma}(1 - \vartheta'') \leqq \nu \leqq \nu_{2\sigma} \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügen. Wendet man daher auf $\tilde{F}(x, y)$ wieder (IIa) mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ und $k = \tilde{k}$ an, so gilt in jeder noch so kleinen Umgebung von $(x_0, 0)$ für die Transformationspolynome $\tilde{B}'_{\mu\nu}(x, y)$:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu\to\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|\tilde{B}'_{\mu\nu}(x, y)|} \geqq 1. \tag{121}$$

Da aber offensichtlich die nicht identisch verschwindenden Polynome $\tilde{B}'_{\mu\nu}(x, y)$ in der Menge der Polynome $B'_{\mu\nu}(x, y)$ enthalten sind, so steht (121) im Widerspruch zu (120).

b) Es sei nun $r_2 > 0$. Da wir wieder die Bedingung A als erfüllt ansehen können, so genügt es (vgl. a)), zu zeigen, daß für genügend kleines $\vartheta'' > 0$ die Summe $\tilde{F}(x, y)$ aller Glieder $a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$, deren Indizes einem der Ungleichungspaare

$$\mu \leqq \bar{\mu}_{2\sigma}, \quad \nu_{2\sigma}(1 - \vartheta'') \leqq \nu \leqq \nu_{2\sigma} \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügen, in allen Punkten (x_0, y) mit $|y| = r_2$ regulär ist.

Wir nehmen an, dies sei nicht der Fall, dann gibt es bei Anwendung von (IIa) mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $k = \tilde{k} > \frac{1}{\vartheta'}$ auf $F(x, y)$ eine Folge von Transformationspolynomen $B'_{\mu^*_{2\sigma}, \nu_{2\sigma}}(x, y)$, für die

$$\frac{\nu_{2\sigma} - \bar{\nu}_{2\sigma}}{\nu_{2\sigma}} \to 0 \tag{122}$$

strebt, und für die

$$\lim_{\sigma \to \infty} \sqrt[\bar{\mu}^*_{2\sigma} + \bar{\nu}_{2\sigma}]{\left| B'_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}_{2\sigma}}(x, y) \right|} \geqq 1 \tag{123}$$

in jeder noch so kleinen Umgebung $(\mathfrak{W}_{x_0}, \mathfrak{W}_{y_0})$ von (x_0, y_0) gilt (Hilfssatz 9). Es ist für das Folgende wichtig, zu beachten, daß der $\overline{\lim}$ in (123) gegen Eins konvergiert, wenn diese Umgebung auf (x_0, y_0) zusammenschrumpft. [Allgemein ist aus dem Bau der Polynome $B'_{\mu\nu}(x, y)$ — vgl. (23) — sofort zu sehen, daß $\overline{\lim}_{\mu+\nu \to \infty} \sqrt[\mu+\nu]{\left| B'_{\mu\nu}(x, y) \right|}$ für alle (x, y) aus $(\mathfrak{W}_{x_0}, \mathfrak{W}_{y_0})$ nicht größer als Eins bleiben kann, wenn $(\mathfrak{W}_{x_0}, \mathfrak{W}_{y_0})$ auf (x_0, y_0) zusammenschrumpft.] Man kann daher eine Folge von Punkten (x_σ, y_σ) $(\sigma = 0, 1, 2, \ldots)$ mit $x_\sigma \to x_0$, $y_\sigma \to y_0$ für $\sigma \to \infty$ so auswählen, daß

$$\overline{\lim_{\sigma \to \infty}} \sqrt[\bar{\mu}^*_{2\sigma} + \bar{\nu}_{2\sigma}]{\left| B'_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}_{2\sigma}}(x_\sigma, y_\sigma) \right|} = 1$$

ist. Genauer setzen wir voraus, daß

$$\lim_{\sigma \to \infty} \sqrt[\bar{\mu}^*_{2\sigma} + \bar{\nu}_{2\sigma}]{\left| B'_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}_{2\sigma}}(x_\sigma, y_\sigma) \right|} = 1 \tag{124}$$

gilt; wäre dies nicht erfüllt, so ließe es sich durch Übergang zu einer Teilfolge der $B'_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}_{2\sigma}}(x_\sigma, y_\sigma)$, die wir dann allein weiter benützen würden, erreichen. Für den Rest des Beweises unterscheiden wir zwei Fälle:

α) Es ist

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\bar{\nu}_{2\sigma}}{\bar{\mu}^*_{2\sigma} + \bar{\nu}_{2\sigma}} > 0. \tag{125}$$

Dann bilden wir die Potenzreihe in y ($B'_{\mu\nu}(x, y)$ enthält den Faktor y^ν):

$$\begin{aligned} g(y) = {} & B'_{\bar{\mu}^*_2, \bar{\nu}_2(1-\vartheta')}(x_1, y) + B'_{\bar{\mu}^*_2, \bar{\nu}_2(1-\vartheta')+1}(x_1, y) + \ldots + B'_{\bar{\mu}^*_2, \nu_2}(x_1, y) \\ & + B'_{\bar{\mu}^*_4, \bar{\nu}_4(1-\vartheta')}(x_2, y) + \ldots + B'_{\bar{\mu}^*_4, \nu_4}(x_2, y) + B'_{\bar{\mu}^*_6, \bar{\nu}_6(1-\vartheta')}(x_3, y) + \ldots, \end{aligned} \tag{126}$$

die nach der im Anschluß an (123) gegebenen [eingeklammerten] Bemerkung über $\overline{\lim}_{\mu+\nu \to \infty} \sqrt[\mu+\nu]{\left| B'_{\mu\nu}(x, y) \right|}$ und (125) mindestens den Konvergenzradius r_2 hat. Da aber aus (124) und (125)

$$\lim_{\sigma \to \infty} \sqrt[\bar{\nu}_{2\sigma}]{\left| B'_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}_{2\sigma}}(x_\sigma, y_\sigma) \right|} = 1 \tag{127}$$

folgt, so hat sie genau den Konvergenzradius r_2. Überdies genügt sie den Voraussetzungen des Satzes 1 mit $\gamma_\tau = 0$, wenn als Folge $a_{\mu_\tau} x^{\mu_\tau}$ die Folge $B'_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}_{2\sigma}}(x_\sigma, y)$ und ϑ gleich ϑ' gewählt wird, wie auf Grund von (115), (122) und (127) sofort einzusehen ist. $g(y)$ ist also nicht fortsetzbar. Wendet man daher auf $g(y)$ die Transformation (I_1) mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $k = \tilde{k}$ an und bezeichnet die Glieder der transformierten Reihe mit $A_\nu(y)$, so gilt in jeder noch so kleinen Umgebung von y_0

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{|A_\nu(y)|} \geqq 1,$$

und wie der Beweis von Satz 1 zeigt, insbesondere auch

$$\overline{\lim_{\sigma \to \infty}} \sqrt[\bar{\mu}^*_{2\sigma}]{|A_{\bar{\nu}^*_{2\sigma}}(y)|} \geqq 1. \tag{128}$$

Wir denken uns nun noch auf $F(x, y)$ die Transformation (I_2), ebenfalls mit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ und $k = \tilde{k}$ angewandt. Die Glieder der transformierten Reihe seien mit $A_{\mu\nu}(x, y)$ bezeichnet. Dann ist gerade

$$A_{\bar{\nu}^*_{2\sigma}}(y) = A_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}^*_{2\sigma}}(x_\sigma, y),$$

und aus (128) folgt

$$\overline{\lim_{\sigma \to \infty}} \sqrt[\bar{\mu}^*_{2\sigma} + \bar{\nu}^*_{2\sigma}]{|A_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}^*_{2\sigma}}(x_\sigma, y)|} \geqq 1$$

in jeder Umgebung von y_0. Dies steht im Widerspruch zu der früher bewiesenen Regularität von $F(x, y)$ in (x_0, y_0).

β) Es ist

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\bar{\nu}_{2\sigma}}{\bar{\mu}^*_{2\sigma} + \bar{\nu}_{2\sigma}} = 0.$$

Dann darf — durch Übergang zu einer Teilfolge der $\mu_{2\sigma}, \nu_{2\sigma}$ ließe es sich nötigenfalls erreichen — genauer

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\bar{\nu}_{2\sigma}}{\bar{\mu}^*_{2\sigma} + \bar{\nu}_{2\sigma}} = 0 \tag{129}$$

angenommen werden. In diesem Fall bilden wir, ähnlich wie beim Beweis des Satzes 6, lineare Kombinationen der Polynome $A_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}^*_{2\sigma}}(x, y)$. Wir benutzen die dort definierte Funktion $T_{4,2\sigma}(t)$ (vgl. S. 235), wo $k^{(\iota)}_{4,2\sigma}$ alle Werte mit $1 \leqq |k^{(\iota)}_{4,2\sigma}| \leqq \vartheta' \bar{\nu}_{2\sigma}$, was wegen (129) zulässig ist, annehmen soll. Sodann sei:

$$E_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}^*_{2\sigma}}(x, y) = \sum_{p=-[\vartheta' \bar{\nu}_{2\sigma}]}^{+[\vartheta' \bar{\nu}_{2\sigma}]} P^{(p)}_{4,2\sigma} e^{-p\bar{\nu}_{2\sigma} \frac{\pi i}{\bar{\mu}_{2\sigma} + \bar{\nu}_{2\sigma}}} A_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}^*_{2\sigma}}\left(x, y\, e^{p \frac{\pi i}{\bar{\mu}_{2\sigma} + \bar{\nu}_{2\sigma}}}\right)$$

$$= T_{4,2\sigma}(1)\, B'_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}_{2\sigma}}(x, y)\, \Gamma^{\bar{\nu}_{2\sigma}}_{\bar{\nu}^*_{2\sigma}}.$$

Danach gibt es gewiß ein $p = p_{2\sigma}$ zwischen $-[\vartheta' \bar{\nu}_{2\sigma}]$ und $+[\vartheta' \bar{\nu}_{2\sigma}]$ so, daß

$$\left| A_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}^*_{2\sigma}}\left(x_\sigma, y_\sigma e^{p_{2\sigma} \frac{\pi i}{\bar{\mu}_{2\sigma} + \bar{\nu}_{2\sigma}}}\right) \right| \geqq \frac{T_{4,2\sigma}(1)}{(2[\vartheta' \bar{\nu}_{2\sigma}]+1)\, P_{4,2\sigma}^{(p_{2\sigma})}} \left| B'_{\bar{\mu}^*_{2\sigma}, \bar{\nu}_{2\sigma}}(x_\sigma, y_\sigma) \right| \Gamma_{\bar{\nu}^*_{2\sigma}}^{\bar{\nu}_{2\sigma}}$$

ist. Auf Grund der Abschätzungen (74) und (75) folgt hieraus nach (124):

$$\lim_{\sigma \to \infty} \sqrt[\bar{\mu}^*_{2\sigma} + \bar{\nu}^*_{2\sigma}]{\left| A_{\mu^*_{2\sigma}, \bar{\nu}^*_{2\sigma}}\left(x_\sigma, y_\sigma e^{p_{2\sigma} \frac{\pi i}{\bar{\mu}_{2\sigma} + \bar{\nu}_{2\sigma}}}\right) \right|} \geqq 1. \tag{130}$$

Da die Relation (130) im Widerspruch steht zu der früher bewiesenen Regularität von $F(x, y)$ in (x_0, y_0), so ist gezeigt, daß auch in diesem Fall die erste Bedingung B erfüllt sein muß.

Genau ebenso beweist man unter Heranziehung der Transformation (II b), daß die zweite der Bedingungen B erfüllt sein muß.

Stuttgart, 15. 8. 1931.

(Eingegangen am 19. August 1931.)

Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen.*)

Von

Hans Salié in Leipzig.

Es sei die beliebige ganze Modulform $M_k(\tau)$ von der Dimension $-k$ und der Stufe N durch ihre Potenzreihe

$$M_k(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{N}} \qquad \text{(absolut konvergent für } J(\tau) > 0) \tag{1}$$

gegeben. Bei Aufstellung des asymptotischen Gesetzes der Koeffizienten a_n kann man sich — wie dies aus den grundlegenden Untersuchungen von Hecke[1]) über die Eisensteinschen Reihen höherer Stufe hervorgeht — im wesentlichen auf Modulformen beschränken, die in allen rationalen Spitzen des Fundamentalbereiches verschwinden. Durch Verbindung der tiefliegenden Methoden von Hardy und Littlewood in der additiven Zahlentheorie mit den Sätzen von Hecke gelang es Herrn Kloosterman[2]), den folgenden Hauptsatz[3]) zu beweisen:

Wenn die ganze Modulform $F_k(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{N}}$ von der Stufe N und der Dimension $-k$ $(k \geqq 1)$ in allen rationalen Spitzen des Fundamentalbereiches verschwindet, so ist

$$c_n = O\left(n^{\frac{k}{2} - \alpha + \varepsilon}\right), \tag{2}$$

wobei $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine positive Zahl und

$$\alpha = \frac{1}{8} \tag{3}$$

ist.

---

*) Als Inaugural-Dissertation von der Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig zugelassen.

[1]) E. Hecke, Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik. Hamb. Abh. 5 (1927), S. 199—224.

[2]) H. D. Kloosterman, Asymptotische Formeln für die Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen. Hamb. Abh. 5 (1927), S. 337—352.

[3]) Dieser gilt auch unter den von Herrn Estermann a. a. O. [6]) angegebenen allgemeinen Voraussetzungen über die $F_k(\tau)$.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Verbesserung der Abschätzung (2) durch Vergrößerung der Konstanten α. Es wird gezeigt, daß dies möglich ist, wenn es gelingt, die von Herrn Kloosterman eingeführten Summen [4])

$$(4)\quad S(u,v;\lambda,\Lambda;q)=\sum_{\substack{0<h\leqq q\\(h,q)=1\\h\equiv\lambda\,(\mathrm{mod}\,\Lambda)}} e^{\frac{2\pi i}{q}(uh+v\bar{h})}, \qquad \begin{array}{l} u,v,\lambda,\Lambda,q \text{ ganze Zahlen},\\ h\bar{h}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,q),\\ \Lambda \text{ positiver Teiler von } q,\end{array}$$

möglichst genau in ihrem asymptotischen Verhalten in q zu kennzeichnen. Es gilt nämlich der in § 1 zu beweisende

Satz 1. *Aus jeder für alle $u, v, \lambda, \Lambda, q$ gültigen Abschätzung*

$$(5)\qquad S(u,v;\lambda,\Lambda;q)=O(q^{1-\beta+\varepsilon}(u,q)^{\beta}) \qquad (\varepsilon>0)$$

folgt der obige Hauptsatz mit dem Werte $\alpha=\frac{1}{2}\beta$.

Für alle q, in deren kanonischer Primzahlzerlegung jeder Primfaktor mehrfach auftritt, ist in (5)

$$(6)\qquad \beta=\frac{1}{2}$$

bekannt (vgl. § 1). Es besteht kein Zweifel, daß (6) ohne Einschränkung über die q richtig ist [5]). Leider kann ich heute für die q, die auch einfache Primfaktoren enthalten, nur

$$(7)\qquad \beta\geqq\frac{1}{3}$$

beweisen [6]), so daß der Hauptsatz (2) mit

$$(8)\qquad \alpha=\frac{1}{6}$$

statt (3) verschärft wird (§ 5).

Beim Beweis von (8) tritt die Lösungszahl L_n eines Kongruenzenpaares [7]) mod q auf. Diese stellt sich nach Abspaltung einer ganzen rationalen Funktion in q durch gewisse Summen $\Phi_r(x)$ dar, die aus Legendreschen Restsymbolen gebildet sind (§ 2). Da das asymptotische Verhalten

---

[4]) On the representation of numbers in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$. Acta math. **49** (1926), S. 407—464, vgl. S. 420.

[5]) In einer Fußnote einer Arbeit von mir „Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$", Math. Zeitschr. **34**, S. 91—109, sprach ich bereits diese Vermutung aus und kündigte einen Beweis an.

[6]) Von Kloosterman a. a. O. [4]), S. 421—432, und Th. Estermann, „Vereinfachter Beweis eines Satzes von Kloosterman", Hamb. Abh. 7 (1930), S. 82—98 — im folgenden kurz als E. zitiert —. S. 83 ist $\beta\geqq\frac{1}{4}$ bewiesen worden.

[7]) Im Falle $n=4$ wird dieses a. a. O. [3]) S. 424 abgeschätzt, ebenso E. S. 83—87 und A. Walfisz „Zur elementaren Zahlentheorie", Hamb. Abh. 7 (1930), S. 132—133 und 8 (1931), S. 348—350.

der $\Phi_\nu(x)$, deren Größe von der Verteilung der quadratischen Reste mod q abhängt, den Wert α bestimmt (§ 3), so wird man vielleicht bei genauerer Kenntnis dieser Verteilung auch $\alpha = \frac{1}{4}$ (bzw. $\beta = \frac{1}{2}$) beweisen können.

Als unmittelbare Anwendung des Hauptsatzes mit dem Werte (8) ergibt sich für die Anzahl $\varrho_{2r}(n)$ der Darstellungen der Zahl n durch eine gegebene positiv definite quadratische Form einer geraden Variablenzahl $2r \geqq 4$ mit ganzen rationalen Koeffizienten:

$$\varrho_{2r}(n) = n^{r-1}\mathfrak{S}(n) + O\left(n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{6}+\varepsilon}\right),$$

wobei $\mathfrak{S}(n)$ die „singuläre Reihe“ ist[8]).

§ 1.

Beweis von Satz 1. Geht man den von Herrn Estermann[6]) gegebenen vereinfachten Beweis des Hauptsatzes durch, so ändern sich unter der Voraussetzung (5) nur die Abschätzungen, die von der dortigen Ungleichung[9])

$$|S(u, v; \lambda, \Lambda; q)| \leqq d^{\frac{3}{4}}\left(\frac{q}{(u,q)}\right) q^{\frac{3}{4}} (u, q)^{\frac{1}{4}} \tag{9}$$

Gebrauch machen, wo $d(m)$ die Anzahl der positiven Teiler von m bedeutet.

Man entnimmt[10]) somit der genannten Arbeit durch Einsetzen von (5) statt (9):

$$|c_n| < A_1 n^{\frac{k-1}{2}} \log n \sum_{l=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} l^{-\beta+\varepsilon}(n, l)^\beta, \tag{10}$$

unter A_1 und später unter A_2, A_3, A_4, A_5 höchstens von N, k, β, ε und F_k abhängende positive Zahlen verstanden.

Zur Abschätzung der Summe über l setze man

$$(n, l) = r \quad \text{und} \quad l = r \cdot s.$$

Dann entsteht

$$\sum_{l=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} l^{-\beta+\varepsilon}(n, l)^\beta = \sum_{\substack{r \mid n \\ r \leqq \lfloor\sqrt{n}\rfloor}} \sum_{\substack{s \leqq \frac{1}{r}\sqrt{n} \\ \left(s, \frac{n}{r}\right) = 1}} (rs)^{-\beta+\varepsilon} r^\beta \leqq \sum_{\substack{r \mid n \\ r \leqq \sqrt{n}}} r^r \sum_{s=1}^{\lfloor\frac{\sqrt{n}}{r}\rfloor} s^{-\beta+\varepsilon} \tag{11}$$

$$\leqq A_2 n^{\frac{1-\beta+\varepsilon}{2}} \sum_{\substack{r \mid n \\ r \leqq \sqrt{n}}} \frac{1}{r^{1-\beta}},$$

[8]) a. a. O. [2]), S. 338—339.
[9]) E. S. 92, Gl. (40).
[10]) E. S. 98, Gl. (83) u. (84).

da

$$\left|\sum_{s=1}^{x} s^{\varrho}\right| \leqq A_2 x^{\varrho+1}$$

für jedes reelle ϱ ist.

Wegen [11])

$$\sum_{\substack{r \mid n \\ r \leqq \sqrt{n}}} \frac{1}{r^{1-\beta}} < \sum_{\substack{r \mid n \\ r \leqq n}} 1 = d(n) < A_3 n^{\frac{\varepsilon}{4}}$$

und

$$\log n < A_4 n^{\frac{\varepsilon}{4}}$$

ergibt sich aus (10) und (11)

$$|c_n| < A_5 n^{\frac{k}{2}-\frac{\beta}{2}+\varepsilon},$$

wodurch Satz 1 bewiesen ist.

Zur Abkürzung sei

$$S(u, v; \lambda, 1; q) = S(u, v; q). \tag{12}$$

Wenn (5) für

$$|S(u, v; q)| < C q^{1-\beta+\varepsilon} (u, q)^{\beta} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{13}$$

gilt, so folgt aus [12])

$$S(u, v; \lambda, \Lambda; q) = \begin{cases} \frac{1}{\Lambda} \sum_{r=1}^{\Lambda} e^{-\frac{2\pi i}{\Lambda} \tilde{\lambda} r} S\left(u, v + \frac{rq}{\Lambda}; q\right), & \lambda \tilde{\lambda} \equiv 1 \pmod{\Lambda},\ (\lambda, \Lambda) = 1 \\ 0, & (\lambda, \Lambda) \neq 1 \end{cases}$$

auch allgemein für alle Λ

$$|S(u, v; \lambda, \Lambda; q)| < C q^{1-\beta+\varepsilon} (u, q)^{\beta}.$$

Weiter kann man sich beim Beweise von (5) auf den Fall, daß q Primzahlpotenz ist, beschränken. Wenn nämlich $q = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}$ die kanonische Primzahlzerlegung von q ist, so gibt es [13]) zu jedem ganzen u und v ganze Zahlen $v_1, v_2, \dots, v_r$ derart, daß

$$S(u, v; q) = \prod_{\nu=1}^{r} S(u, v_\nu; p_\nu^{m_\nu})$$

ist. Dann ist nach (5) für $q_\nu = p_\nu^{m_\nu}$ und $\frac{\varepsilon}{2}$ statt ε

$$\begin{aligned} |S(u, v; q)| &\leqq \prod_{\nu=1}^{r} C_\nu p_\nu^{m_\nu\left(1-\beta+\frac{\varepsilon}{2}\right)} (u, p_\nu^{m_\nu})^{\beta} \\ &\leqq C^r q^{1-\beta+\frac{\varepsilon}{2}} (u, q)^{\beta} < C' q^{1-\beta+\varepsilon} (u, q)^{\beta}, \end{aligned}$$

---

[11]) Beachte $\beta < 1$ und siehe z. B. E. Landau, Vorles. über Zahlentheorie I (1927), S. 250, Satz 260.

[12]) E. S. 92.

[13]) E. S. 91.

wobei $C_1, C_2, \ldots, C_r, C, C'$ absolute positive Konstanten bedeuten und [14])

$$C^r < C' q^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

gesetzt ist.

Schließlich braucht im folgenden q nur noch als Primzahl vorausgesetzt zu werden; denn für $m \geqq 2$ ist

$$(14) \qquad |S(u, v; q)| < 2^{\frac{3}{2}} q^{\frac{1}{2}} (u, q)^{\frac{1}{2}}, \quad q = p^m, \ (u, v, p^m) \neq p^{m-1}$$

bereits bekannt [15]).

Der Wertevorrat der $S(u, v; q)$ für primzahliges q ist wegen [16])

$$S(u, v; q) = S(1, uv; q), \quad (u, v, q) \neq q$$

durch die q Werte

$$(15) \qquad S(1, w; q) \qquad (w = 0, 1, 2, \ldots, q-1)$$

und

$$S(0, 0; q) = q - 1$$

erschöpft. Das Maximum der (sämtlich reellen) Werte (15) ist mit den Potenzsummen

$$(16) \qquad \sum_{w=0}^{q-1} S(1, w; q)^n$$

durch die Limesbeziehung

$$(17) \qquad \operatorname{Max} S(1, w; q)^2 = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\sum_{w=0}^{q-1} S(1, w; q)^{2n}}$$

verknüpft [17]).

Will man Genaueres über (16) wissen, so wird man auf die Anzahl der Lösungen des folgenden Kongruenzenpaares geführt.

§ 2.

Es bezeichne für natürliches $n \geqq 1$ und alle ganzen x und y $L_n(x, y)$ die Anzahl der ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die sowohl

$$(18) \qquad 1 \leqq x_r \leqq q-1, \quad 1 \leqq \bar{x}_r \leqq q-1, \quad x_r \bar{x}_r \equiv 1 \pmod q, \quad (r = 1, 2, \ldots, n), \ q \text{ Primzahl},$$

als auch

$$(19) \qquad \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \ldots + x_n \equiv x \\ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n \equiv y \end{array} \pmod q \right|$$

---

[14]) Denn es ist $2^r \leqq \prod_{\nu=1}^{r} (m_\nu + 1) = d(q) < c q^\varepsilon$.

[15]) a. a. O. [5]) § 2, § 3; insbes. S. 97 u. 101.

[16]) E. S. 87.

[17]) a. a. O. [5]), S. 104.

erfüllen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $x \equiv 1$ vorausgesetzt werden. Es geht dies aus den folgenden vier Eigenschaften

$$\begin{aligned} &L_n(y, x) = L_n(x, y), \\ &L_n(x, 0) = L_n(0), \qquad x \not\equiv 0 \pmod q \\ &L_n(0, 0) = (q-1)\, L_{n-1}, \qquad n \geqq 2, \\ &L_n(x, y) = L_n(xy), \qquad (x, y, q) + q \end{aligned} \tag{20}$$

hervor, in denen

$$\begin{aligned} &L_n(1, a) = L_n(a) \qquad (a \text{ ganze Zahl}), \\ &L_n(1) \quad = L_n \end{aligned} \tag{21}$$

gesetzt wurde. Die Beweise von (20) ergeben sich leicht durch passende Einführung neuer Unbekannter y_r, die mit x_r ein volles Restsystem durchlaufen $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

Die weitere Untersuchung der $L_n(x)$ führt auf quadratische Kongruenzen, die die Verwendung des Legendreschen Restsymbols

$$\left(\frac{x}{q}\right) = \begin{cases} 0, & x \equiv 0 \\ +1, & x \text{ Rest} \\ -1, & x \text{ Nichtrest} \end{cases} \pmod q \tag{22}$$

notwendig machen. Die Symbole treten in den Verbindungen auf:

$$\Phi_1(a) = 1 - \left(\frac{(a-1)^2}{q}\right) = \begin{cases} 1, & a \equiv 1 \\ 0, & a \not\equiv 1 \end{cases} \pmod q, \tag{23}$$

$$\Phi_n(a) = \sum_{x=0}^{q-1} \left(\frac{(x-a+1)^2 - 4x}{q}\right) \Phi_{n-1}(x) \qquad (n \geqq 2). \tag{24}$$

Die Funktionen $\Phi_n(a)$ berechnen sich aus (24) sukzessive. Mit Hilfe dieser eingeführten Bezeichnungen kann für die $L_n(x)$ ein Rekursionsgesetz aufgeschrieben werden:

Hilfssatz 1.

$$\begin{aligned} L_{n+1}(a) = q\, \Phi_1(a)\, L_{n-1} + q_n - q_{n-1} \Phi_1(a) - q_n \Phi_1(a+1) \\ + \sum_{x=0}^{q-1} \left(\frac{(x-a+1)^2 - 4x}{q}\right) L_n(x), \end{aligned}$$

wenn

$$q_n = \frac{(q-1)^n - (-1)^n}{q} \tag{25}$$

bezeichnet.

Beweis. Die Anzahl der $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y_1, y_2, für die gleichzeitig

$$\begin{aligned} &1 \leqq x_r \leqq q-1 \\ &1 \leqq \bar{x}_r \leqq q-1 \end{aligned} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{26a}$$

und

$$1 \leqq y_1, y_2 \leqq q-1, \tag{26b}$$
$$1 \leqq \bar{y}_1, \bar{y}_2 \leqq q-1,$$

sowie

$$\left| \begin{matrix} x_1 + x_2 + \ldots + x_n \equiv y_1 + y_2 \\ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n \equiv \bar{y}_1 + a\bar{y}_2 \end{matrix} \pmod q \right| \tag{27}$$

gilt, ist $(q-1)L_{n+1}(a)$. Setzt man nämlich $y_1 \equiv -x_{n+1}$ und verwendet (20, 4), so ist

$$L_{n+1}(y_2, a\bar{y}_2) = L_{n+1}(a).$$

Die Lösungszahl von (27) läßt sich aber auch in der Form

$$\sum_{x=0}^{q-1} \sum_{y=0}^{q-1} L_n(x, y)\, L_2(x, y; a) \tag{28}$$

erhalten, wenn $L_2(x, y; a)$ die Anzahl der Lösungen y_1, y_2 von

$$\left| \begin{matrix} y_1 + y_2 \equiv x \\ \bar{y}_1 + a\bar{y}_2 \equiv y \end{matrix} \pmod q \right| \tag{29}$$

mit der Bedingung (26b) bedeutet. Aus (28) leitet man her:

$$(q-1)L_{n+1}(a) = L_n(0,0)\, L_2(0,0;a) + \sum_{x=1}^{q-1} L_n(x,0)\, L_2(x,0;a) + \sum_{y=1}^{q-1} L_n(0,y)\, L_2(0,y;a) + \sum_{x=1}^{q-1}\sum_{y=1}^{q-1} L_n(x,y)\, L_2(x,y;a),$$

oder unter Benutzung von (20)

$$L_{n+1}(a) = L_{n-1} L_2(0,0;a) + L_n(0)\, L_2(1,0;a) + L_n(0)\, L_2(0,1;a) + \sum_{x=1}^{q-1} L_n(x)\, L_2(1,x;a). \tag{30}$$

Hierin sind die Werte

$$\begin{aligned} L_2(0,0;a) &= (q-1)\,\Phi_1(a), \\ L_2(1,0;a) &= (1-\Phi_1(a))\,(1-\Phi_1(a+1)), \\ L_2(0,1;a) &= 1-\Phi_1(a), \\ L_2(1,x;a) &= 1-\Phi_1(a+1) + \left(\frac{(x-a+1)^2-4x}{q}\right), \quad x \not\equiv 0 \pmod q \end{aligned} \tag{31}$$

einzusetzen, die man aus (29) leicht ausrechnet.

Läßt man außerdem die Summe in (30) von $x=0$ beginnen, so entsteht

$$L_{n+1}(a) = (q-1)\, L_{n-1}\, \Phi_1(a) - L_n(0)\, \Phi_1(a) + (1-\Phi_1(a+1)) \sum_{x=0}^{q-1} L_n(x) + \sum_{x=0}^{q-1} \left(\frac{(x-a+1)^2-4x}{q}\right) L_n(x).$$

Wie man leicht abzählt, ist

$$\sum_{x=0}^{q-1} L_n(x) = q_n$$

als Anzahl der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, für die $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \equiv 1 \pmod q$ und $1 \leqq x_\nu \leqq q-1$ sind. Ebenso einfach sieht man ein, daß

$$L_n(0) = q_{n-1} - L_{n-1} \tag{32}$$

ist. Durch Vereinigung der drei letzten Beziehungen ergibt sich der behauptete Hilfssatz.

Von den $L_n(a)$ lassen sich Polynome in q abspalten:

$$P_n = \frac{q_n + (-1)^n n}{q} + (-1)^n \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-\nu}{\nu+1} q^{\nu-1}, \tag{33}$$

$$Q_n = (-1)^{n-1} \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-\nu}{\nu} q^{\nu-1}. \tag{34}$$

Es verbleiben dann Ausdrücke $R_n(a)$ in den $\Phi_\nu(a)$, die durch die Rekursion[18])

$$R_{n+1}(a) = \Phi_{n+1}(a) + q \sum_{\nu=1}^{n-1} R_{n-\nu} \Phi_\nu(a), \qquad R_{n-\nu} = R_{n-\nu}(1) \tag{35}$$

erklärt sind.

Hilfssatz 2.

$$L_n(a) = R_n(a) + P_n + Q_n \Phi_1(a+1).$$

Beweis. Der Hilfssatz ist für $n = 1$ und $n = 2$ richtig. Er wird für alle $n > 2$ bewiesen durch den Schluß von n auf $n+1$. Dazu werde der obige Wert für $L_n(a)$ in Hilfssatz 1 eingetragen. Es ist zu berücksichtigen, daß nach (35) und (24)

$$\sum_{x=0}^{q-1} \left(\frac{(x-a+1)^2 - 4x}{q}\right) R_n(x) = \Phi_{n+1}(a) + q \sum_{\nu=1}^{n-2} R_{n-\nu-1} \Phi_{\nu+1}(a)$$
$$= R_{n+1}(a) - q R_{n-1} \Phi_1(a)$$

ist. Weiter wird[19])

$$\sum_{x=0}^{q-1} \left(\frac{(x-a+1)^2 - 4x}{q}\right) = -1 + q \Phi_1(a+1),$$

$$\sum_{x=0}^{q-1} \left(\frac{(x-a+1)^2 - 4x}{q}\right) \Phi_1(x+1) = 1 - \Phi_1(a)$$

---

[18]) Für $n = 0$ und $n = 1$ soll $\sum_{\nu=1}^{n-1}$ gleich Null sein.

[19]) E. Jacobsthal, Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste. Dissertation, Berlin 1906.

gebraucht. Somit entsteht:

$$L_{n+1}(a) = R_{n+1}(a) + (Q_n - P_n + q_n) + (q P_{n-1} - q_{n-1} - Q_n)\, \Phi_1(a) + (q P_n - q_n)\, \Phi_1(a+1).$$

Beachtet man nun, daß die durch (33) und (34) definierten Werte P_n und Q_n den Bedingungen

$$Q_{n+1} = q P_n - q_n, \tag{36}$$

$$P_{n+1} = Q_n - P_n + q_n \tag{37}$$

genügen, so wird

$$L_{n+1}(a) = R_{n+1}(a) + P_{n+1} + Q_{n+1}\, \Phi_1(a+1) + (q P_{n-1} - q_{n-1} - Q_n)\, \Phi_1(a).$$

Der Faktor von $\Phi_1(a)$ ist Null, wie aus (36) folgt, wenn man n durch $n-1$ ersetzt. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Wenn $a = 1$ ist, kann man aus (35) eine Determinante für die R_n herleiten[20])

$$R_n = \begin{vmatrix} \Phi_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Phi_2 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \Phi_3 & q\Phi_1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \Phi_n & q\Phi_{n-2} & q\Phi_{n-3} & q\Phi_{n-4} & \dots & 0 \end{vmatrix}. \tag{38}$$

Entsprechende Determinanten sind für P_n und Q_n möglich.

§ 3.

An § 1 anschließend soll nun

Hilfssatz 3:

$$\sum_{w=0}^{q-1} S(1, w; q)^n = q Q_n + q^2 R_{n-1} \qquad (n \geqq 2)$$

bewiesen werden. Q_n und R_n haben die durch (34) und (38) angegebene Bedeutung.

Aus der Definition der $S(u, v; q)$ folgt:

$$\sum_{w=0}^{q-1} S(1, w; q)^n = \sum_{h_1, \dots, h_n}^{1, \dots, q-1} e^{\frac{2\pi i}{q}(h_1 + h_2 + \dots + h_n)} \sum_{w=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i}{q} w(\bar{h}_1 + \dots + \bar{h}_n)}$$

$$= q \sum_{x=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i}{q} x}\, L_n(x, 0)$$

---

[20]) E. Pascal, Repertorium der höh. Mathematik I, 1 (2. Aufl. 1910), S. 71.

oder wegen (20, 2), (20, 3) und (32)

$$q \sum_{x=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i}{q} x} L_n(x, 0) = q((q-1) L_{n-1} - L_n(0)) = q^2 L_{n-1} - q q_{n-1}.$$

Hilfssatz 2 liefert

$$L_{n-1} = R_{n-1} + P_{n-1},$$

so daß unter Berücksichtigung von (36)

$$\sum_{w=0}^{q-1} S(1, w; q)^n = q^2 R_{n-1} + q(q P_{n-1} - q_{n-1}) = q^2 R_{n-1} + q Q_n$$

wird, wie oben behauptet wurde.

Kennt man allgemein die Größenordnung von R_n in q, so ist auch diese für $S(1, w; q)$ und damit die Konstante β ermittelt. Den Zusammenhang stellen folgende zwei Hilfssätze fest:

Hilfssatz 4. Wenn

$$R_n = O(q^{e_n}) \tag{39}$$

ist, so folgt

$$\sum_{w=0}^{q-1} S(1, w; q)^n = O\left(q^{\max\left(\left[\frac{n}{2}\right] \cdot e_{n-1}+2\right)}\right).$$

Der Beweis ist nach Hilfssatz 3 und $q Q_n = O\left(q^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)$ klar.

Hilfssatz 5.

$$\beta = 1 - \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{e_{2n-1}}{n}\right),$$

$$\beta \geqq 1 - \max\left(\frac{1}{2}, \frac{e_{2n-1}+2}{2n}\right) \qquad (n \geqq 2).$$

Beweis. Die erste Behauptung ist unmittelbar aus (17) und Hilfssatz 4 zu ersehen. Es ist dabei β der bestmögliche Wert. Die zweite Aussage ergibt sich aus:

$$S(1, w; q)^{2n} < \sum_{w=0}^{q-1} S(1, w; q)^{2n}.$$

Die Bestimmung der Exponenten e_n muß man auf Beziehungen zwischen den $\Phi_n(a)$ stützen. Zur Zeit kann man jedoch die e_n nur für kleinere Werte n ermitteln, wie im folgenden gezeigt werden soll. Aus den Spezialfällen scheint hervorzugehen[21]), daß R_n immer dieselbe Größenordnung wie Φ_n hat.

---

[21]) Vermutlich ist $e_n = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ und daher $\beta = \frac{1}{2}$.

Es ist zweckmäßig, die Beziehungen (23) und (24) zu erweitern:

$$\Phi_1(a,b) = 1 - \left(\frac{(a-b)^2}{q}\right) \qquad (a \text{ und } b \text{ ganz}), \tag{40}$$

$$\Phi_n(a,b) = \sum_{x=0}^{q-1} \left(\frac{(x-a+1)^2 - 4x}{q}\right) \Phi_{n-1}(x,b). \tag{41}$$

Dann ist

$$\Phi_n(a,1) = \Phi_n(a). \tag{42}$$

Hilfssatz 6.

$$\Phi_n(b,a) = \Phi_n(a,b), \qquad \Phi_{m+n-1}(a,b) = \sum_{x=0}^{q-1} \Phi_m(a,x)\,\Phi_n(x,b).$$

Beweis. Zuerst stellt man fest, daß

$$\Phi_1(b,a) = \Phi_1(a,b)$$

und

$$\Phi_2(b,a) = \Phi_2(a,b) = \left(\frac{(a-b+1)^2 - 4a}{q}\right)$$

ist, so daß nach (41)

$$\Phi_{n+1}(a,b) = \sum_{x=0}^{q-1} \Phi_2(a,x)\,\Phi_n(x,b) \tag{43}$$

wird. Durch Schluß von n auf $n+1$ sieht man hieraus die Symmetrieeigenschaft allgemein ein. Multipliziert man (43) mit $\Phi_2(c,a)$ und summiert über a, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Phi_{n+2}(c,b) &= \sum_{x=0}^{q-1} \Phi_n(x,b) \sum_{a=0}^{q-1} \Phi_2(a,x)\,\Phi_2(c,a) \\ &= \sum_{a=0}^{q-1} \Phi_3(c,x)\,\Phi_n(x,b).\end{aligned}$$

Durch Wiederholung des auf (43) angewandten Verfahrens erhält man Hilfssatz 6 für alle m.

Besonders hervorzuheben ist der Speziallfall $m = n$:

$$\Phi_{2n-1}(a,a) = \sum_{b=0}^{q-1} \Phi_n(a,b)^2, \tag{44}$$

der jetzt für $n = 3$ genauer untersucht wird.

Das in diesem Falle auftretende

$$\Phi_3(a,b) = \sum_{x=0}^{q-1} \left(\frac{(x-a+1)^2 - 4x}{q}\right)\left(\frac{(x-b+1)^2 - 4x}{q}\right) \tag{45}$$

kann im allgemeinen auf eine Funktion von nur einem Argument

$$T(c) = \sum_{x=0}^{q-1} \left(\frac{x^2 - c}{q}\right)\left(\frac{x+1}{q}\right) \tag{46}$$

zurückgeführt werden, bei der für das Folgende bemerkenswert ist, daß c im Legendreschen Symbol linear enthalten ist.

§ 4.

Da es nicht mehr Mühe macht, wird der eben ausgesprochene Satz verallgemeinert. Es seien

$$f_1(x) = a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2, \tag{47}$$

$$f_2(x) = b_0 x^2 + 2b_1 x + b_2 \tag{48}$$

zwei quadratische Formen mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ und Δ_1, Δ_2 die Diskriminanten von $f_1(x)$ und $f_2(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2(a_0 a_2 - a_1^2), \\ \Delta_2 &= 2(b_0 b_2 - b_1^2), \end{aligned} \tag{49}$$

ferner

$$\Delta_{12} = a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0 \tag{50}$$

eine simultane Invariante und

$$R = \Delta_1 \Delta_2 - \Delta_{12}^2 \tag{51}$$

die Resultante der beiden Formen $f_1(x)$ und $f_2(x)$.

Satz 2.

$$\sum_{x=0}^{q-1} \left(\frac{f_1(x)}{q}\right)\left(\frac{f_2(x)}{q}\right) = -\left(\frac{a_0 b_0}{q}\right) + \left(\frac{2}{q}\right) \sum_{x=0}^{q-1} \left(\frac{x}{q}\right)\left(\frac{\Delta_2 x^2 + 2\Delta_{12} x + \Delta_1}{q}\right)$$

$$((a_0, b_0, q) \neq q).$$

Wenn $f_1(x) \equiv \lambda f_2(x)$ für alle x ist, muß auf der rechten Seite $\left(\frac{\lambda}{q}\right) q$ addiert werden.

Der Satz hat für die Theorie der Verteilung der quadratischen Reste ein selbständiges Interesse. Bisher sind im Restsymbol nur die Polynome vierten Grades in x untersucht worden, die mod q in Linearfaktoren zerlegbar sind. Die Reduktion auf Summen mit Polynomen dritten Grades gelang dann durch lineare Substitutionen. Dies ist beim Beweis von Satz 2 nicht möglich.

Bildet man mit Hilfe des ganzzahligen Parameters t die neue quadratische Form

$$f(x) = f_1(x) + t f_2(x), \tag{52}$$

so ist deren Diskriminante

$$\Delta = \Delta_1 + 2\Delta_{12} t + \Delta_2 t^2. \tag{53}$$

Sei nun $f_2(x) \not\equiv 0 \pmod q$ und $b_0 \not\equiv 0 \pmod q$, und verfügt man über t, so daß

$$f_1(x)\overline{f_2(x)} \equiv -t \pmod q, \tag{54}$$

also $f(x) \equiv 0 \pmod q$ ist, so darf man aus

$$(a_0 + t b_0) f(x) = [(a_0 x + a_1) + t(b_0 x + b_1)]^2 + \frac{1}{2} \Delta$$
$$(a_0 + t b_0 \not\equiv 0 \pmod q)$$

schließen auf

$$[(a_0 x + a_1) + t(b_0 x + b_1)]^2 \equiv -\overline{2}\,\Delta \pmod q \tag{55}$$
$$(a_0 + t b_0 \not\equiv 0 \pmod q).$$

Wenn in (54) x ein volles Restsystem mod q durchläuft — ausgenommen die x, für die $f_2(x) \equiv 0 \pmod q$ ist —, so werden im Falle $a_0 + t b_0 \not\equiv 0 \pmod q$ nur die t angenommen, für die $\left(\frac{-2\Delta}{q}\right) = 0$ oder $= 1$ ist. (55) ergibt also dann $1 + \left(\frac{-2\Delta}{q}\right)$ mod q inkongruente Lösungen für x. Für $a_0 + t b_0 \equiv 0 \pmod q$, d. h. für $t \equiv -a_0 \bar{b}_0 \pmod q$, ist $\Delta = -\frac{2}{b_0^2}(a_0 b_1 - a_1 b_0)^2$, und (54) hat $\left(\frac{-2\Delta}{q}\right)$ — bei dem oben angegebenen Ausnahmefall des Satzes 2 jedoch q — mod q inkongruente Lösungen für x. Überträgt man nun diese Feststellungen auf die Summe im Satz 2, so wird

$$\sum_{x=0}^{q-1}\left(\frac{f_1(x)}{q}\right)\left(\frac{f_2(x)}{q}\right) = \sum_{x=0}^{q-1}{}'\left(\frac{f_1(x)\overline{f_2(x)}}{q}\right) = -\left(\frac{a_0 \bar{b}_0}{q}\right) + \sum_{t=0}^{q-1}\left(\frac{-t}{q}\right)\left(1 + \left(\frac{-2\Delta}{q}\right)\right) \tag{56}$$
$$= -\left(\frac{a_0 b_0}{q}\right) + \left(\frac{2}{q}\right)\sum_{t=0}^{q-1}\left(\frac{t}{q}\right)\left(\frac{\Delta_1 + 2\Delta_{12} t + \Delta_2 t^2}{q}\right).$$

Im Ausnahmefall tritt rechts das Glied $\left(\frac{\lambda}{q}\right) q$ hinzu. Der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß die x, für die $f_2(x) \equiv 0 \pmod q$ ist, auszulassen sind.

Durch (56) ist Satz 2 für $b_0 \not\equiv 0 \pmod q$ und beliebiges $f_1(x)$ bewiesen worden. Entsprechend zeigt man (56) für $a_0 \not\equiv 0 \pmod q$ und beliebiges $f_2(x)$, so daß Satz 2 stets für $(a_0, b_0, q) \neq q$ gilt.

Auf Grund der bekannten Beziehung[22])

$$\sum_{x=0}^{q-1}\left(\frac{x}{q}\right)\left(\frac{c_0 x^2 + 2c_1 x + c_2}{q}\right)$$
$$= \left(\frac{2c_1}{q}\right)\left(1 - \left(\frac{c_0^2}{q}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{c_2^2}{q}\right)\right) q + \left(\frac{2}{q}\right)\sum_{x=0}^{q-1}\left(\frac{x + c_1}{q}\right)\left(\frac{x^2 - c_0 c_2}{q}\right) \tag{57}$$

[22]) E. Jacobsthal, Journ. f. d. r. u. angew. Math. **132** (1907), S. 238–245, bes. S. 239, oder a. a. O. [19]), S. 11.

läßt sich die Gleichheit der vier Summen

$$\left(\frac{2}{q}\right)\sum_{x=0}^{q-1}\left(\frac{x}{q}\right)\left(\frac{\Delta_2 x^2+2\Delta_{12}x+\Delta_1}{q}\right)-\left(\frac{\Delta_{12}}{q}\right)\left(1-\left(\frac{\Delta_1^2}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{\Delta_2^2}{q}\right)\right)q$$

$$(58)\qquad =\sum_{x=0}^{q-1}\left(\frac{x+\Delta_{12}}{q}\right)\left(\frac{x^2-\Delta_1\Delta_2}{q}\right)=\sum_{x=0}^{q-1}\left(\frac{x}{q}\right)\left(\frac{x^2-2\Delta_{12}x-R}{q}\right)$$

$$=\left(\frac{-2}{q}\right)\sum_{x=0}^{q-1}\left(\frac{x+\Delta_{12}}{q}\right)\left(\frac{x^2+R}{q}\right)$$

einsehen, von denen im Satz 2 nur eine aufgeführt ist.

Wenn $\Delta_{12}\equiv 0 \pmod q$ ist, kennt man[23])

$$(59)\qquad \left|\sum_{x=0}^{q-1}\left(\frac{x^2+R}{q}\right)\left(\frac{x}{q}\right)\right|<2\sqrt{q}.$$

Für $\Delta_{12}\not\equiv 0 \pmod q$ wird

$$(60)\qquad \sum_{x=0}^{q-1}\left(\frac{x^2+R}{q}\right)\left(\frac{x+\Delta_{12}}{q}\right)=\left(\frac{\Delta_{12}}{q}\right)T\left(\frac{-R}{\Delta_{12}^2}\right),$$

falls man x durch $\Delta_{12}x$ ersetzt und die durch (46) eingeführte Funktion $T(c)$ verwendet[24]).

Hilfssatz 7.

$$\Phi_3(a,b)=-1+\Phi_1(a,b)q+\begin{cases}\left(\frac{\Delta_{12}}{q}\right)T\left(\frac{64ab}{\Delta_{12}^2}\right) & (\Delta_{12}\not\equiv 0 \pmod q),\\ \sum_{x=0}^{q-1}\left(\frac{x}{q}\right)\left(\frac{x^2-64ab}{q}\right) & (\Delta_{12}\equiv 0 \pmod q).\end{cases}$$

$$\Delta_{12}=a^2-2a(b+2)+b^2-4b,$$

ergibt sich aus Satz 2, (58) und (60) nach Berechnung der zu den in (45) auftretenden quadratischen Formen gehörigen Invarianten.

Hilfssatz 8.

$$\sum_{c=0}^{q-1}T(c)^2=q^2-2q-\left(\frac{-1}{q}\right)q.$$

---

[23]) A. a. O. [22]) S. 239–240, [18]) S. 12–13; vgl. auch H. Hopf, Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 222–231, bes. S. 223.

[24]) Wenn $\Delta_{12}\not\equiv 0 \pmod q$, so ist $\left|T\left(\frac{-R}{\Delta_{12}^2}\right)\right|<q^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}q^{\frac{1}{4}}$, wie dies schon durch H. Davenport (Journ. of London Math. Soc. **6**, S. 49–54) für den Fall, daß $-R$ Rest ist, bekannt ist. Es gilt nämlich $\sum_{a=0}^{q-1}T(a)^4<2q^3$ und wegen (58) $T(1-a)=\left(\frac{-2}{q}\right)T(a)$.

Beweis [25]).

$$\sum_{c=0}^{q-1} T(c)^2 = \sum_{c=0}^{q-1} \sum_{x,y}^{0,\ldots,q-1} \left(\frac{x^2-c}{q}\right)\left(\frac{x+1}{q}\right)\left(\frac{y^2-c}{q}\right)\left(\frac{y+1}{q}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{q-1}\sum_{y=0}^{q-1}\left(\frac{x+1}{q}\right)\left(\frac{y+1}{q}\right)\sum_{c=0}^{q-1}\left(\frac{c-x^2}{q}\right)\left(\frac{c-y^2}{q}\right),$$

$$\sum_{c=0}^{q-1}\left(\frac{c-x^2}{q}\right)\left(\frac{c-y^2}{q}\right) = \begin{cases} -1 & (x^2 \not\equiv y^2 \pmod q), \\ q-1 & (x^2 \equiv y^2 \pmod q), \end{cases}$$

$$\sum_{x=0}^{q-1}\left(\frac{x+1}{q}\right) = \sum_{y=0}^{q-1}\left(\frac{y+1}{q}\right) = 0,$$

$$\sum_{c=0}^{q-1} T(c)^2 = q\left(\sum_{x=0}^{q-1}\left(\frac{x+1}{q}\right)\left(\frac{-x+1}{q}\right) + \sum_{x=1}^{q-1}\left(\frac{x+1}{q}\right)^2\right) = q\left(-\left(\frac{-1}{q}\right) + q - 2\right).$$

Hilfssatz 9.

$$\Phi_5(a,a) < 5q^2 + O(q).$$

Beweis. Durchläuft b in $\Phi_3(a,b)$ ein volles Restsystem mod q, so wird ein gegebenes Argument c von $T(c)$ in Hilfssatz 7 höchstens viermal angenommen. Aus (44), Hilfssatz 8 und den Ausnahmewerten (59) folgt dann die Behauptung.

§ 5.

Satz 3.

$$\beta \geqq \frac{1}{3}.$$

Beweis. Aus Hilfssatz 3 ergibt sich

$$\sum_{w=0}^{q-1} S(1,w;q)^6 = q^2\Phi_5 + 3q^4 - 4q^3 - 6q^2 - 5q, \tag{61}$$

wenn man außerdem $\Phi_3 = q-2$ beachtet. Hilfssatz 9 führt dann zu

$$\sum_{w=0}^{q-1} S(1,w;q)^6 < 8q^4 + O(q^3), \text{ [26]}$$

---

[25]) Vgl. die ähnlichen Betrachtungen a. a. O. [19]) S. 13, [23]) Hopf, S. 224–225, [24]) S. 51, und von Schrutka, Journ. f. d. r. u. angew. Math. **140** (1911), S. 252–265, bes. S. 257.

[26]) Wie mir Herr Davenport brieflich mitteilte, hat auch er einen Beweis von $\sum_{\lambda=1}^{p-1} S(1,\lambda;p)^6 < c\cdot p^4$ gefunden.

Anmerkung (März 1932): Durch (7) verschärft sich in der Arbeit von Th. Estermann, „Über die Darstellungen einer Zahl als Differenz von zwei Produkten", Journ. f. d. r. u. angew. Math. **164** (1931), S. 173–182, die asymptotische Formel zu

$$r(n,k) = \frac{6}{\pi^2}\sigma_{-1}(k\ n\log^2 n + a_1 n\log n + a_2 n + O\left(n^{\frac{8}{9}+\varepsilon}\right).$$

so daß jedes

$$S(1, w; q)^6 < 8q^4 + O(q^3)$$

sein muß. Somit

$$|S(1, w; q)| < \frac{3}{2} q^{\frac{2}{3}}$$

und nach (13)

$$1 - \beta \leqq \frac{2}{3}.$$

Der Beweis dieses Satzes hätte auch Hilfssatz 4 und 5 heranziehen können mit $e_3 = 2$.

Mit Satz 3 ist (7), (8) und die in der Einleitung angekündigte Verschärfung des Hauptsatzes bewiesen.

Leipzig, Mai 1931.

(Eingegangen am 30. November 1931.)

Über die Invarianz der Randelemente bei topologischen Abbildungen in der Ebene und im Raume.

Von

Boris Kaufmann in Heidelberg.

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit wird der folgende Satz bewiesen:

A sei eine topologische Abbildung eines (nicht abgeschlossenen) beschränkten (ebenen oder räumlichen) Gebietes $\mathfrak{G}$ auf das Innere eines beschränkten Gebietes $\tilde{\mathfrak{G}}$ und A^{-1} die entsprechende inverse Abbildung mit der Eigenschaft, daß sämtliche gegen den Rand in $\mathfrak{G}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}$ konvergierenden Wege (Einschnitte) bei den Abbildungen A und A^{-1} wiederum in Einschnitte von $\tilde{\mathfrak{G}}$ bzw. $\mathfrak{G}$ übergehen. Wir behaupten, die Primenden[1]) *der beiden Gebiete $\mathfrak{G}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}$ sind in bezug auf die Abbildungen A und A^{-1} invariant*[2]) [3]).

[1]) Über die Grundlagen der Primendentheorie vgl. die Arbeit des Verfassers, Über die Berandung ebener und räumlicher Gebiete (Primendentheorie), Math. Annalen **103** (1930), S. 70–144. — Im nachfolgenden wird diese Arbeit kurz mit „Pth." zitiert.

[2]) Wir sagen, ein Primende $E_{\mathfrak{g}}^{\tau}$ (von der Ordnung τ) ist in bezug auf die Abbildung *A invariant*, falls die Gesamtheit der durch *A* gelieferten Bildpunktfolgen aller gegen $E_{\mathfrak{g}}^{\tau}$ konvergierenden Punktfolgen gegen ein und dasselbe Primende $\tilde{E}_{\mathfrak{g}}^{\sigma}$ im Bildbereich $\tilde{\mathfrak{G}}$ konvergiert, während die Urbildfolgen aller gegen $\tilde{E}_{\mathfrak{g}}^{\sigma}$ konvergierenden Punktfolgen gegen $E_{\mathfrak{g}}^{\tau}$ konvergieren. — Sind *sämtliche* Randelemente in bezug auf die Abbildung *A* invariant, so sind auch ihre Bilder in bezug auf die Abbildung A^{-1} invariant; die Randelemente werden in diesem Fall umkehrbar eindeutig einander zugeordnet.

[3]) Dieser Satz kann noch wesentlich verschärft werden. — *Die Randelemente sind auch in bezug auf eine Abbildung invariant, welche sämtliche Einschnitte des gegebenen Bereiches in (allgemeinere) Fundamentalkurven des Bildbereiches überführt und umgekehrt.* Einfachheitshalber beschränken wir uns auf den Beweis des Invarianzsatzes in obiger Fassung. (Über Fundamentalkurven vgl. § 5 der ersten unter [5]) zitierten Arbeit.)

Dieser Invarianzsatz wurde von mir früher ausgesprochen und nur für einen vom allgemeinen Standpunkt sehr engen Spezialfall bewiesen[4]), nämlich für solche Randelemente (beliebiger Art), welche höchstens einen erreichbaren Punkt enthalten. Im allgemeinen Fall erfordert dieser Satz eine tiefergehende Untersuchung, welche dem Aufbau der Randelemente und der sie bestimmenden Komplexe entsprechend verläuft. Wir werden hier insbesondere von der Möglichkeit einer schärferen und einfacheren Kennzeichnung der Randelemente durch *reguläre* Komplexe[5]) Gebrauch machen, wodurch eine wesentliche Vereinfachung der Beweisführung erzielt wird.

Ist $\mathfrak{M}_f$ eine beliebige Gesamtheit von Punktfolgen in $\mathfrak{G}$, so bezeichnen wir mit $A(\mathfrak{M}_f)$ die durch die Abbildung A gelieferte Gesamtheit aller Bildpunktfolgen von $\mathfrak{M}_f$ in $\tilde{\mathfrak{G}}$. Mit $A_c(\mathfrak{M}_f)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller regulären Teilfolgen der Punktfolgen von $A(\mathfrak{M}_f)$ und nennen diese kurz die „*reguläre Bildgesamtheit*" von $\mathfrak{M}_f$. Entsprechend bezeichnen wir mit $A^{-1}(\tilde{\mathfrak{M}}_f)$ bzw. $A_c^{-1}(\tilde{\mathfrak{M}}_f)$ die Urbildgesamtheit bzw. die reguläre Urbildgesamtheit einer Punktfolgengesamtheit $\tilde{\mathfrak{M}}_f$ in $\tilde{\mathfrak{G}}$.

Die Invarianz der Primenden ergibt sich aus der Invarianz der vollkommen gesättigten Komplexe, für welche wir den folgenden Satz beweisen werden:

Ist Δ_τ ein vollkommen gesättigter Komplex von der Ordnung τ, so ist die reguläre Bildgesamtheit $A_c(\Delta_\tau)$ in einem Komplex $\tilde{\Delta}_{\tau\pm i}$ $(i = 0$ oder $= 1)$ von einer Ordnung $\tau \pm i$ enthalten, während umgekehrt die durch die inverse Abbildung A^{-1} gelieferte reguläre Urbildgesamtheit $A_c^{-1}(\tilde{\Delta}_{\tau\pm i})$ in Δ_τ enthalten ist.

Gleichzeitig mit dem Beweis des Invarianzsatzes gewinnen wir Aufschluß über die Ordnung der Bildprimenden. *Die Ordnung zweier einander bei der Abbildung zugeordneten Primenden kann sich höchstens um Eins unterscheiden.*

Wir erwähnen noch, daß sämtliche im nachfolgenden für die Abbildung A ausgesprochenen und bewiesenen Sätze, wörtlich auch für die

---

[4]) Vgl. meine Abhandlung, Über Ränderzuordnung bei topologischen Abbildungen in der Ebene und im Raume, Sitzber. Heidelb. Ak. Wiss. Math.-nat. Kl. 1930, Nr. 10. Die Randelemente mit höchstens einem erreichbaren Punkt können zwar von beliebiger Art, aber höchstens von zweiter Ordnung sein. In diesem Sonderfall ist dort der Beweis auf wesentlich einfachere Invarianzbedingungen zurückgeführt worden.

[5]) Über den Begriff regulärer Punktfolgen vgl. § 4 meiner Abhandlung, Über die Struktur der Komplexe erster Ordnung in der Primendentheorie, Math. Annalen **106** (1932), S. 308–333. Die Definition regulärer Komplexe befindet sich in meiner Abhandlung, Über die Bestimmung der Primenden durch reguläre Komplexe, Math. Annalen **106** (1932), S. 334–342. In der vorliegenden Abhandlung verstehen wir unter Komplexen (unter Beibehaltung der Bezeichnung) *stets nur reguläre Komplexe.* Wir denken uns auch die Randelemente immer durch reguläre Komplexe bestimmt.

inverse Abbildung A^{-1} gelten, und machen von den entsprechenden für A^{-1} geltenden Sätzen Gebrauch, ohne dies jedesmal besonders zu erwähnen.

1. Die einfachen Invarianzeigenschaften der Abbildung A.

Zwischen den Einschnitten und den α-Punktfolgen des Gebietes $\mathfrak{G}$ besteht ein unmittelbarer Zusammenhang: einerseits ist eine jede gegen den Rand auf einem Einschnitt konvergierende Punktfolge eine α-Punktfolge, andererseits läßt sich immer ein Einschnitt des Gebietes konstruieren, welcher die gegebene α-Punktfolge enthält. Dieser Zusammenhang hat unmittelbar zur Folge, daß *bei den Abbildungen A und A^{-1} die α-Punktfolgen erhalten bleiben*, und daraus ergibt sich sofort, daß *die konvergenten Teilfolgen der durch A und A^{-1} gelieferten Bildfolgen von β-Punktfolgen wiederum β-Punktfolgen sind.*

Gehen wir einen Schritt weiter, so können wir uns überzeugen[6]), daß die einfachsten Gebilde, welche uns am Rande begegnen, nämlich *die einpunktigen Endgebilde sowie die ihnen entsprechenden unbewallten f-Gesamtheiten vom α-Typus in bezug auf die Abbildungen A und A^{-1} invariant sind.*

Durch die einpunktigen Endgebilde (bzw. die unbewallten f-Gesamtheiten vom α-Typus) werden die (einfach gezählten) erreichbaren Randpunkte in eindeutiger Weise festgesetzt. Es werden somit durch die Abbildungen A und A^{-1} die erreichbaren Punkte der beiden Gebiete $\mathfrak{G}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}$ in umkehrbar eindeutiger Weise einander zugeordnet. Deshalb können wir unseren Abbildungssatz auch in der Form aussprechen:

Ist A eine Abbildung eines beschränkten Gebietes $\mathfrak{G}$ auf ein beschränktes Gebiet $\tilde{\mathfrak{G}}$, bei welchem die (einfach gezählten) erreichbaren Randpunkte einander umkehrbar eindeutig zugeordnet werden, so sind die Randelemente der beiden Gebiete in bezug auf die Abbildung A und ihre Inverse invariant.

2. Das Verhalten konjugierter f-Mengen und ihrer unbewallten Grenzfolgen bei der Abbildung.

I. *Es sei Δ eine zyklische*[7]) *konjugierte f-Menge des Gebietes $\mathfrak{G}$, welche der Bedingung $\mathfrak{L}_\alpha(\Delta) = 0$ genügt. Wir behaupten, $A_c(\Delta)$ ist in einer zyklischen konjugierten f-Menge $\tilde{\Delta}$ des Bildbereiches enthalten, welche ebenfalls der Bedingung $\mathfrak{L}_\alpha(\tilde{\Delta}) = 0$ genügt.*

---

[6]) Vgl. die ausführliche Betrachtung im § 3 der unter [4]) zitierten Abhandlung.

[7]) Eine konjugierte f-Menge Δ wird zyklisch genannt, wenn sie nebst einer Punktfolge auch sämtliche ihrer Teilfolgen enthält. Die zyklischen konjugierten f-Mengen nebst denjenigen, welche der Bedingung $\mathfrak{L}_\alpha(\Delta) \neq 0$ genügen, sind für die Komplextheorie grundlegend. (Vgl. die Definition regulärer Punktfolgen in der ersten unter [5]) zitierten Abhandlung.)

Es seien $\tilde{P}_1', \tilde{P}_2', \ldots, \tilde{P}_n', \ldots = (\tilde{P}_n')$ und $\tilde{P}_1'', \tilde{P}_2'', \ldots, \tilde{P}_n'', \ldots = (\tilde{P}_n'')$ zwei beliebige Punktfolgen von $A_c(\Delta)$. Die Urbildfolgen (P_n') und (P_n'') von $(\tilde{P}_n')$ und $(\tilde{P}_n'')$ sind β-Punktfolgen. Da Δ zyklisch ist, müssen (P_n') und (P_n'') zueinander konjugiert sein. Durch die Abbildung A wird ein ausgezeichnetes Streckenzugsystem, welches (P_n') und (P_n'') verbindet, wiederum in ein ausgezeichnetes Streckenzugsystem überführt. Die beiden Punktfolgen $(\tilde{P}_n')$ und $(\tilde{P}_n'')$ müssen also konjugiert und in einem und demselben $\tilde{\Delta}$ des Bildbereiches $\tilde{\mathfrak{G}}$ enthalten sein.

Wir wollen jetzt zeigen, daß $\mathfrak{L}_\alpha(\tilde{\Delta}) = 0$ sein muß. Angenommen, dies sei nicht der Fall. — Eine unbewallte f-Gesamtheit $\tilde{\mathfrak{P}}_f \subset \mathfrak{L}_\alpha(\tilde{\Delta})$ konvergiert gegen ein durch eine ineinandergeschachtelte Gebietsfolge $(\tilde{\mathfrak{H}}_\nu)$ bestimmtes einpunktiges Endgebilde. In jedem Gebiet $\tilde{\mathfrak{H}}_\nu$ ist eine Punktfolge $(\tilde{A}_n^\nu)\ \varepsilon\ \tilde{\Delta}$ enthalten. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_f$ bzw. $\mathfrak{H}_\nu$ die Urbilder von $\tilde{\mathfrak{P}}_f$ bzw. $\tilde{\mathfrak{H}}_\nu\ (\nu = 1, 2, \ldots)$, so bestimmt die Gebietsfolge $(\mathfrak{H}_\nu)$ ebenfalls ein $\mathfrak{P}_f$ entsprechendes einpunktiges Endgebilde. Da Δ zyklisch ist, so muß eine jede Urbildfolge (A_n^ν) von $(\tilde{A}_n^\nu)$ in Δ enthalten sein. Für jedes ν ist (A_n^ν) in $\mathfrak{H}_\nu$ enthalten und müßte entgegen Voraussetzung $\mathfrak{P}_f \subset \mathfrak{L}_\alpha(\Delta)$ sein.

Korollar. Ist die konjugierte Ausgangsmenge Δ eines Komplexes Δ_1 erster Ordnung zyklisch und ist $\mathfrak{L}_\alpha(\Delta) = 0$, so ist $A_c(\Delta_1)$ ebenfalls in einem Komplex $\tilde{\Delta}_1$ erster Ordnung in $\tilde{\mathfrak{G}}$ enthalten, wobei die konjugierte Ausgangsmenge $\tilde{\Delta}$ des letzteren ebenfalls der Bedingung $\mathfrak{L}_\alpha(\tilde{\Delta})$ genügt.

Wir müssen nach dem Obigen lediglich berücksichtigen, daß eine zyklische konjugierte f-Menge Δ immer Ausgangsmenge eines Komplexes Δ_1 erster Ordnung ist und im Falle $\mathfrak{L}_\alpha(\Delta) = 0$ $\Delta = \Delta_1$ ist [8]).

II. *Es sei Δ eine konjugierte f-Menge vom β-Typus in $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{L}_\alpha(\Delta) \neq 0$ ist. $\tilde{\Delta}$ sei die konjugierte Ausgangsmenge eines Komplexes $\tilde{\Delta}_1$ erster Ordnung des Bildbereiches $\tilde{\mathfrak{G}}$, welche eine Punktfolge von $A_c(\Delta)$ enthält. Wir behaupten, $A_c(\mathfrak{L}_\alpha(\Delta))$ ist in $\tilde{\Delta}_1^0$ enthalten.*

Angenommen, eine Punktfolge $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \ldots, \tilde{R}_n, \ldots = (\tilde{R}_n)$ von $A_c(\mathfrak{L}_\alpha(\Delta))$ ist in dem (nicht abgeschlossenen) Komplex $\tilde{\Delta}_1$ nicht enthalten. Wir wollen uns überzeugen, daß die $(\tilde{R}_n)$ enthaltende unbewallte f-Gesamtheit $\tilde{\mathfrak{P}}_f$ in $\mathfrak{L}_\alpha(\tilde{\Delta}_1)$ enthalten sein muß.

Wie in 1. festgestellt wurde, ist $A^{-1}(\tilde{\mathfrak{P}}_f)$ wiederum eine unbewallte f-Gesamtheit $\mathfrak{P}_f$ in $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{P}_f$ entspricht ein einpunktiges Endgebilde, welches durch eine Gebietsfolge $(\mathfrak{H}_\nu)$ bestimmt wird. Bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{H}}_\nu$ das Bild von $\mathfrak{H}_\nu$, so bestimmt die Folge $(\tilde{\mathfrak{H}}_\nu)$ das $\tilde{\mathfrak{P}}_f$ entsprechende einpunktige Endgebilde in $\tilde{\mathfrak{G}}$. — Es sei $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n, \ldots = (\tilde{A}_n)$ eine Punktfolge des Durchschnittes $\tilde{\Delta} \cdot A_c(\Delta)$. Wir bemerken, daß zu jeder Teilfolge der Ur-

[8]) Vgl. auch Ziffer 3 in der zweiten unter [5]) zitierten Abhandlung.

bildfolge (A_n) von $(\tilde{A}_n)$ eine konjugierte Punktfolge (A_n^ν) in $\mathfrak{H}_\nu$ (für jedes ν) angegeben werden kann. $(\tilde{A}_n^\nu)$ sei die Bildpunktfolge von (A_n^ν). Offenbar enthalten die beiden Punktfolgen $(\tilde{A}_n)$ und $(\tilde{A}_n^\nu)$ für jedes ν ein Paar konjugierter Teilfolgen. Demnach gibt es in jedem Gebiet $\tilde{\mathfrak{H}}_\nu$ eine zu einer Teilfolge von $(\tilde{A}_n)$ konjugierte Punktfolge. Eine solche muß aber nach dem Aufbau der Komplexe erster Ordnung ebenfalls in $\tilde{\Delta}_1$ enthalten sein. Es gibt also in jedem Gebiet $\tilde{\mathfrak{H}}_\nu$ eine Punktfolge von $\tilde{\Delta}_1$, und wir können folgern, daß $\mathfrak{P}_f$ in $\mathfrak{L}_\alpha(\tilde{\Delta}_1)$ enthalten sein muß.

III. *Es sei Δ eine konjugierte f-Menge in $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{L}_\beta(\Delta) \neq 0$. $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n, \ldots = (\tilde{A}_n)$ sei eine Punktfolge von $A_c(\Delta)$ und $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \ldots, \tilde{B}_n, \ldots = (\tilde{B}_n)$ eine Punktfolge von $A_c(\mathfrak{L}_\beta(\Delta))$. Wir behaupten, die beiden Punktfolgen sind in einem und demselben Komplex $\tilde{\Delta}_{1+i}$ $(i = 0, 1)$ erster oder zweiter Ordnung enthalten.*

Die Punktfolge $(\tilde{A}_n)$ ist in der konjugierten Ausgangsmenge eines Komplexes $\tilde{\Delta}_1^a$ erster Ordnung und die Punktfolge $(\tilde{B}_n)$ in der konjugierten Ausgangsmenge eines Komplexes $\tilde{\Delta}_1^b$ erster Ordnung enthalten. Die Urbildfolge (B_n) der Punktfolge $(\tilde{B}_n)$ ist eine Teilfolge einer Punktfolge von $\mathfrak{L}_\beta(\Delta)$ und muß in Δ oder in $\mathfrak{L}_\beta(\Delta)$ enthalten sein. In beiden letzten Fällen (also auch im Falle, daß (B_n) in Δ enthalten wäre) existiert eine gegen einen Randpunkt ζ von $\mathfrak{G}$ konvergierende Folge von Teilgebieten

$$\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_\nu, \ldots \to \zeta$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. Ein jedes Gebiet $\mathfrak{H}_\nu$ der Folge $(\mathfrak{H}_\nu)$ enthält eine Punktfolge (A_n^ν) der konjugierten f-Menge Δ.

2. Eine Teilfolge

$$B_1^*, B_2^*, \ldots, B_\nu^*, \ldots$$

der Punktfolge (B_n) ist der Gebietsfolge $(\mathfrak{H}_\nu)$ untergeordnet (d. h. für jedes ν ist B_ν^* in $\mathfrak{H}_\nu$ enthalten).

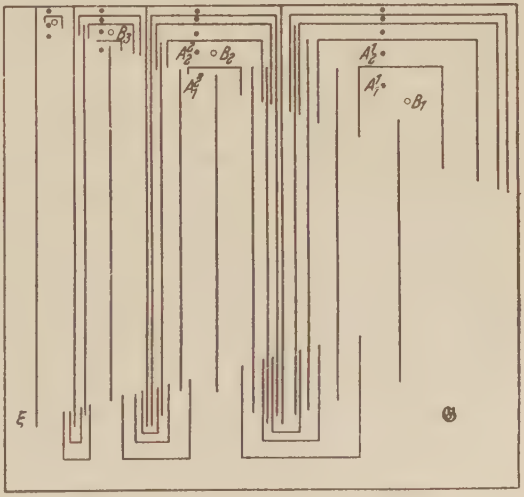


Fig. 1.

Die Urbildpunktfolge (A_n) von $(\tilde{A}_n)$ ist Teilfolge einer Punktfolge von Δ. Da eine jede Punktfolge von Δ eine zu der Punktfolge (A_n) konjugierte Teilfolge enthält, so gibt es auch in jedem Gebiet $\mathfrak{H}_\nu$ eine zu (A_n) konjugierte Teilfolge der entsprechenden Punktfolge (A_n^ν).

Es seien $\tilde{\mathfrak{H}}_\nu$ und $(\tilde{A}_n^\nu)$ die Bilder von $\mathfrak{H}_\nu$ und (A_n^ν). — Wir wollen besonders hervorheben, daß das Grenzgebilde der Gebietsfolge

$$\tilde{\mathfrak{H}}_1, \tilde{\mathfrak{H}}_2, \ldots, \tilde{\mathfrak{H}}_\nu, \ldots = (\tilde{\mathfrak{H}}_\nu),$$

in Unterschied von der entsprechenden Folge der Urbildbereiche, nicht nur ein Punkt, sondern ein beliebiges Kontinuum oder sogar eine allgemeinere abgeschlossene Punktmenge auf dem Rande sein kann. Dementsprechend wäre es sogar möglich, daß keine Teilfolge von $(\tilde{B}_n)$ eine unbewallte Grenzpunktfolge einer Teilgesamtheit der Punktfolgen (A_n^ν) $(\nu = 1, 2, \ldots)$ wäre. (Man vergleiche das entsprechende Δ in Fig. 1 mit seinem Bild in Fig. 2. Man beachte insbesondere, daß die Stellen ξ und $\tilde{\xi}$ erreichbar sind.)

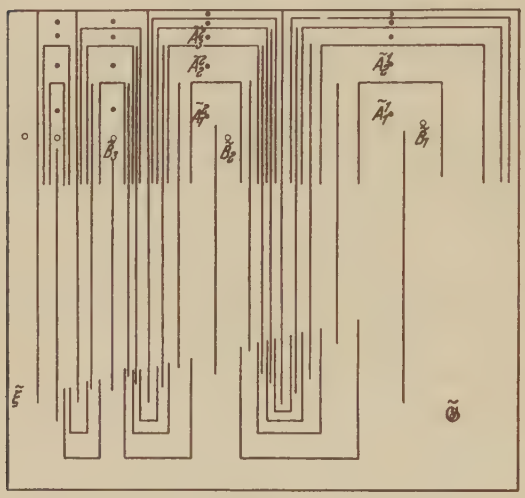


Fig. 2.

In diesem Zusammenhang gewinnt nun der Umstand eine besondere Bedeutung, wonach *jede in der Gebietsfolge* $(\tilde{\mathfrak{H}}_\nu)$ *gegen ihr Grenzgebilde konvergierende Punktfolge eine* β*-Punktfolge ist.* Diese Eigenschaft der Gebietsfolge $(\tilde{\mathfrak{H}}_\nu)$ ergibt sich unmittelbar aus der Bedingung 2, welcher die entsprechende Folge $(\mathfrak{H}_\nu)$ der Urbildbereiche genügt. Ihre Bedeutung wird uns aus dem Nachfolgenden deutlich.

Eine jede Punktfolge $(\tilde{A}_n^\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ enthält eine β-Teilfolge $\tilde{A}_1^{\nu *}, \tilde{A}_2^{\nu *}, \ldots, \tilde{A}_n^{\nu *}, \ldots = (\tilde{A}_n^{\nu *})$, welche zu einer Teilfolge von $(\tilde{A}_n)$ konjugiert ist. Demnach muß eine jede Punktfolge $(\tilde{A}_n^{\nu *})$ in irgendeiner konjugierten f-Menge der Grundmenge des Komplexes $\tilde{\Delta}_1^{\prime\prime}$ enthalten sein.

Wir konstruieren jetzt das einschließende Ende[9]) $\tilde{\mathfrak{E}}_\mathfrak{g}$ des abgeschlossenen Komplexes $\tilde{\Delta}_1^{\prime\prime 0}$ im Bildbereich $\tilde{\mathfrak{G}}$.

$$\tilde{\mathfrak{G}}_1, \tilde{\mathfrak{G}}_2, \ldots, \tilde{\mathfrak{G}}_\lambda, \ldots$$

---

[9]) Ist Δ_ϱ ein Komplex beliebiger Ordnung ϱ, so läßt sich auf Grund des in Pth. § 11 entwickelten Verfahrens immer ein Ende $\mathfrak{E}_\mathfrak{g}$ konstruieren mit der Eigenschaft, daß sämtliche gegen $\mathfrak{E}_\mathfrak{g}$ konvergierenden α-Punktfolgen in Δ_ϱ enthalten sind. Die Gesamtheit aller gegen $\mathfrak{E}_\mathfrak{g}$ konvergierenden regulären Punktfolgen ist entweder mit Δ_ϱ identisch oder in einem Komplex $\Delta_{\varrho+1} \supset \Delta_\varrho$ $\varrho+1$-ter Ordnung enthalten. (Folgt für reguläre Folgen aus Pth. § 12, Satz XI.)

sei eine $\tilde{\mathfrak{E}}_0$ bestimmende Gebietskette. Da die Punktfolgen $(\tilde{A}_n^{\nu *})$ gegen $\tilde{\mathfrak{E}}_0$ konvergieren, so ist für jedes $\lambda = 1, 2, \ldots$ und $\nu = 1, 2, \ldots$ der Durchschnitt

$$\tilde{\mathfrak{G}}_\lambda \cdot \tilde{\mathfrak{H}}_\nu \neq 0.$$

Ein jedes Gebiet der Folge $(\tilde{\mathfrak{G}}_\lambda)$ enthält demnach Punkte aller Gebiete der Folge $(\tilde{\mathfrak{H}}_\nu)$ und umgekehrt. — Wir können jedenfalls für jedes ν einen Punkt $\tilde{O}_\nu$ des Durchschnitts $\tilde{\mathfrak{G}}_\nu \cdot \tilde{\mathfrak{H}}_\nu$ $(\lambda = \nu)$ wählen. Nach einem Satz[10]) der Primendentheorie (Pth. § 12, Satz XI) ist eine jede reguläre Teilfolge der Punktfolge

$$\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \ldots, \tilde{O}_n, \ldots = (\tilde{O}_n)$$

im Komplex $\tilde{\Delta}_1^{\alpha}$ oder in einem $\tilde{\Delta}_1^{\alpha}$ enthaltenden Komplex Δ_2 zweiter Ordnung enthalten.

Das Punktepaar $\tilde{O}_\nu, \tilde{B}_\nu^*$ ist für jedes ν im Gebiet $\tilde{\mathfrak{H}}_\nu$ enthalten und kann innerhalb dieses Gebietes durch einen Streckenzug $\tilde{s}_\nu$ verbunden werden. Jetzt wenden wir die oben festgestellte Eigenschaft der Gebietsfolge $(\tilde{\mathfrak{H}}_\nu)$ an und können schließen, daß das Streckenzugsystem $\tilde{S} = \tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \ldots, \tilde{s}_\nu, \ldots$ ausgezeichnet sein muß. Demnach ist eine jede β-Teilfolge von $(\tilde{O}_\nu)$ zu einer Teilfolge der Punktfolge $(\tilde{B}_\nu^*)$ konjugiert und muß offenbar in einer konjugierten f-Menge der Grundmenge des Komplexes $\tilde{\Delta}_1^{\beta}$ enthalten sein. Nun ist aber andererseits eine jede reguläre Teilfolge der Punktfolge $(\tilde{O}_n)$ im Komplex $\tilde{\Delta}_1^{\alpha}$ oder in $\tilde{\Delta}_2$ enthalten. Es müssen also die beiden Komplexe $\tilde{\Delta}_1^{\alpha}$ und $\tilde{\Delta}_1^{\beta}$ entweder identisch oder in der Grundmenge des Komplexes Δ_2 enthalten sein.

3. Die Invarianzeigenschaften der Komplexe erster Ordnung.

IV. *Ist Δ_1 ein Komplex erster Ordnung in $\mathfrak{G}$, so ist $A_c(\Delta_1)$ in einem Komplex $\tilde{\Delta}_{1+i}$ $(i = 0, 1)$ erster oder zweiter Ordnung enthalten.*

Es sei $M(\Delta)$ die Grundmenge des Komplexes Δ_1 und Δ seine konjugierte Ausgangsmenge. Enthält Δ_1 nur α-Punktfolgen, so ist er mit einer unbewallten f-Gesamtheit vom α-Typus identisch. Die Invarianz der unbewallten f-Gesamtheiten bildet gerade den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen (Ziff. 1). Für den Fall $\Delta_1 = \Delta$, wobei Δ vom β-Typus ist, ist unsere Behauptung bereits in I bewiesen. Anderenfalls muß (nach der Definition regulärer Komplexe) $\mathfrak{L}_\alpha(\Delta) \neq 0$ sein.

Mit $\sum M(\Delta)$ bzw. $\sum M(\Delta^0)$ bezeichnen wir die Vereinigungen aller konjugierten bzw. aller abgeschlossenen konjugierten f-Mengen der Grundmenge $M(\Delta)$. Mit $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_1)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Komplexe

[10]) Dieser Satz ist für normierte Punktfolgen ausgesprochen; er gilt insbesondere auch für reguläre Punktfolgen bzw. reguläre Komplexe.

erster Ordnung des Bildbereiches, deren konjugierten Ausgangsmengen mindestens eine Punktfolge von $A_c(\sum M(\Delta))$ enthalten.

Wir berücksichtigen jetzt, daß jede konjugierte f-Menge $\Delta' \varepsilon M(\Delta)$ der Beziehung

$$\mathfrak{L}_\alpha(\Delta) \subset \mathfrak{L}_\alpha(\Delta')$$

genügt. Aus der Behauptung II kann gefolgert werden, daß jeder Komplex $\tilde{\Delta}_1 \varepsilon \mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_1)$ der Beziehung

$$\mathfrak{L}_\alpha(\Delta) \subset \tilde{\Delta}_1^0$$

genügt. Die abgeschlossenen Komplexe der Gesamtheit $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_1^0)$ haben also paarweise einen nicht leeren Durchschnitt. Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der Punktfolgen

$$(L) = A_c(\Delta_1) - A_c(\sum M(\Delta)) = A_c(\sum M(\Delta^0)) - A_c(\sum M(\Delta)).$$

Nach II muß eine jede α-Punktfolge von (L) in einem abgeschlossenen Komplex der Gesamtheit $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_1^0)$ enthalten sein. Sämtliche Komplexe von $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_1^0)$, welche insbesondere α-Punktfolgen enthalten, müssen in der Grundmenge eines Komplexes $\tilde{\Delta}_2$ zweiter Ordnung enthalten sein. — In bezug auf die β-Punktfolgen der Gesamtheit (L) wenden wir jetzt den Satz III an. Eine jede dieser Punktfolgen ist in einem Komplex $\tilde{\Delta}_{1+i}$ $(i = 0, 1)$ erster oder zweiter Ordnung enthalten, welcher auch eine Punktfolge von $A_c(\sum M(\Delta)) \subset \tilde{\Delta}_2$ enthält. Es ist also $\Delta_{1+i} \cdot \Delta_2 \neq 0$. Ist $i = 0$, so muß $\tilde{\Delta}_{1+i}$ in $\tilde{\Delta}_2$ enthalten sein. Anderenfalls (für $i = 1$) gilt $\tilde{\Delta}_{1+i} = \tilde{\Delta}_2$. Der Komplex $\tilde{\Delta}_2$ genügt also unserer Behauptung.

4. Die Invarianzeigenschaften der Komplexe beliebiger Ordnung und ihrer unbewallten Grenzfolgen.

Es sei Δ_ϱ ein Komplex beliebiger (endlicher oder transfiniter) Ordnung $\varrho \geqq 1$ und $\mathfrak{L}(\Delta_\varrho)$ seine unbewallte f-Grenzmenge. In den beiden folgenden Sätzen beschäftigen wir uns zunächst mit dem Verhalten der (regulären) unbewallten f-Grenzmenge $\mathfrak{L}(\Delta_\varrho)$ bei der Abbildung.

V. *Es sei Δ_ϱ ein Komplex beliebiger (endlicher oder transfiniter) Ordnung $\varrho \geqq 1$, welcher der Bedingung $\mathfrak{L}_\alpha(\Delta_\varrho) \neq 0$ genügt. Ist die reguläre Bildgesamtheit $A_c(\Delta_\varrho)$ in einem Komplex $\tilde{\Delta}_{\varrho^*}$ von einer Ordnung $\varrho^* \geqq 1$ in $\mathfrak{G}$ enthalten, so ist $A_c(\mathfrak{L}_\alpha(\Delta_\varrho))$ im abgeschlossenen Komplex $\tilde{\Delta}_{\varrho^*}^0$ enthalten.*

Nebst den unbewallten f-Gesamtheiten von $\mathfrak{L}_\alpha(\Delta)$ sind die ihnen entsprechenden einpunktigen Endgebilde in bezug auf die Abbildung A invariant. $\tilde{\xi}_\mathfrak{P}$ sei ein solches der unbewallten f-Gesamtheit $\mathfrak{P}_f \subset A_c(\mathfrak{L}_\alpha(\Delta))$ entsprechendes einpunktiges Endgebilde in $\mathfrak{G}$. $(\tilde{\mathfrak{H}}_\nu)$ sei eine $\tilde{\xi}_\mathfrak{P}$ bestimmende

Gebietsfolge in $\mathfrak{G}$. Das Urbildgebiet $\mathfrak{H}_\nu$ eines jeden Gebietes $\tilde{\mathfrak{H}}_\nu$ enthält eine Punktfolge von Δ_ϱ. Entsprechend muß ein jedes Gebiet $\tilde{\mathfrak{H}}_\nu$ eine Punktfolge von $A_c(\Delta_\varrho)$ enthalten. $\tilde{\mathfrak{H}}_\nu$ muß also für jedes ν eine Punktfolge von $\tilde{\Delta}_{\varrho^*}$ enthalten. Demnach muß $\mathfrak{P}_f$ in $\tilde{\Delta}_{\varrho^*}$ oder in $\mathfrak{L}_\alpha(\tilde{\Delta}_{\varrho^*})$ enthalten sein.

VI. *Es sei Δ_ϱ ein Komplex beliebiger (endlicher oder transfiniter) Ordnung $\varrho \geqq 1$, welcher der Bedingung $\mathfrak{L}_\beta(\Delta_\varrho) \neq 0$ genügt, wobei die reguläre Bildgesamtheit $A_c(\Delta_\varrho)$ in einem Komplex $\tilde{\Delta}_{\varrho^*}$ von der Ordnung $\varrho^* \geqq 1$ enthalten ist. Wir behaupten, es existiert ein Komplex $\tilde{\Delta}_{\varrho^*+i}$ $(i = 0, 1)$ von einer Ordnung ϱ^* oder ϱ^*+1, welcher gleichzeitig $\tilde{\Delta}_{\varrho^*}$ und $A_c(\mathfrak{L}_\beta(\Delta_\varrho))$ enthält.*

Der Beweis dieses Satzes ist im wesentlichen demjenigen des Satzes III verwandt. Eine beliebige Punktfolge $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \ldots, \tilde{R}_n, \ldots = (\tilde{R}_n)$ der Bildgesamtheit $A_c(\mathfrak{L}_\beta(\Delta_\varrho))$ ist in der konjugierten Ausgangsmenge eines Komplexes $\tilde{\Delta}_1$ erster Ordnung enthalten. Die Urbildfolge (R_n) der Punktfolge $(\tilde{R}_n)$ ist entweder in $\mathfrak{L}_\beta(\Delta_\varrho)$ oder in Δ_ϱ enthalten. In beiden Fällen können wir eine gegen einen Randpunkt ζ von $\mathfrak{G}$ konvergierende Gebietsfolge

$$\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_\nu, \ldots \to \zeta$$

mit folgenden Eigenschaften bestimmen:

1. Ein jedes Gebiet $\mathfrak{H}_\nu$ der Folge $(\mathfrak{H}_\nu)$ enthält eine Folge (A_n^ν) des Komplexes Δ_ϱ.

2. Eine Teilfolge $R_1^*, R_2^*, \ldots, R_\nu^*, \ldots = (R_\nu^*)$ der Punktfolge (R_ν^*) ist der Folge $(\mathfrak{H}_\nu)$ untergeordnet.

Aus der letzten Bedingung folgt insbesondere, daß auch eine jede der Gebietsfolge $(\mathfrak{H}_\nu)$ untergeordnete Punktfolge eine β-Folge sein muß.

Für jedes $\nu = 1, 2, \ldots$ sei $\tilde{\mathfrak{H}}_\nu$ der Bildbereich des Teilgebietes $\mathfrak{H}_\nu$ und $(\tilde{A}_n^\nu)$ die Bildpunktfolge der Punktfolge (A_n^ν). $(\tilde{R}_n^*)$ sei die Bildpunktfolge von (R_n^*). Die Gebietsfolge

$$\tilde{\mathfrak{H}}_1, \tilde{\mathfrak{H}}_2, \ldots, \tilde{\mathfrak{H}}_\nu, \ldots = (\tilde{\mathfrak{H}}_\nu)$$

kann evtl. gegen ein Kontinuum oder auch eine beliebige auf dem Rande liegende abgeschlossene Punktmenge konvergieren. Es ist aber (ähnlich wie in III) sehr wesentlich, daß sämtliche in der Gebietsfolge $(\tilde{\mathfrak{H}}_\nu)$ gegen ihr Grenzgebilde konvergierenden Punktfolgen β-Punktfolgen sind, was sich unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaft der Gebietsfolge $(\mathfrak{H}_\nu)$ ergibt.

Wir konstruieren jetzt ein einschließendes Ende $\tilde{\mathfrak{E}}_3$ in bezug auf den Komplex $\tilde{\Delta}_{\varrho^*}^0$. Ähnlich wie in III können wir uns überzeugen, daß eine reguläre Punktfolge $(\tilde{X}_\nu)$, welche einer Teilfolge der Gebietsfolge $(\tilde{\mathfrak{H}}_\nu)$ untergeordnet ist, gegen $\tilde{\mathfrak{E}}_3$ konvergiert. Diese Punktfolge muß in einem Komplex

$\tilde{\Delta}_{\varrho^*+i} \supset \tilde{\Delta}_{\varrho^*}$ $(i=0,1)$ ϱ^*-ter oder ϱ^*+1-ter Ordnung enthalten sein. Auf Grund der oben erwähnten Eigenschaft der Gebietsfolge $(\tilde{\mathfrak{H}}_\nu)$ können wir zeigen, daß die Punktfolge $(\tilde{X}_\nu)$ im Komplex $\tilde{\Delta}_1$ enthalten sein muß. Es gilt also die Beziehung

$$\tilde{\Delta}_1 \cdot \tilde{\Delta}_{\varrho^*+i} \neq 0.$$

Im Falle $\varrho^*+i=1$ sind die beiden Komplexe $\tilde{\Delta}_1$ und $\tilde{\Delta}_{\varrho^*+i}$ entweder identisch oder in der Grundmenge eines Komplexes zweiter Ordnung enthalten. Für $\varrho^*+i>1$ ist $\tilde{\Delta}_1$ in $\tilde{\Delta}_{\varrho^*+i}$ enthalten. $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_1)$ sei die Gesamtheit aller Komplexe erster Ordnung in $\tilde{\mathfrak{G}}$, deren konjugierten Ausgangsmengen mindestens eine Punktfolge von $A_c(\mathfrak{L}_\beta(\Delta_\varrho))$ enthalten. Da unsere Betrachtung von der Wahl der Punktfolge $(\tilde{R}_n)$ unabhängig ist, so können wir leicht folgern, daß für $\varrho^*+i=1$ sämtliche Komplexe von $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_1)$ mit $\tilde{\Delta}_{\varrho^*}$ identisch oder in der Grundmenge eines Komplexes zweiter Ordnung enthalten sein müssen. Für $\varrho^*+i>1$ müssen sämtliche Komplexe von $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_1)$ in $\tilde{\Delta}_{\varrho^*+i}$ enthalten sein. Somit ist gezeigt, daß $A_c(\mathfrak{L}_\beta(\Delta_\varrho))$ in $\tilde{\Delta}_{\varrho^*+i}$ enthalten ist.

VII. *Es sei Δ_ϱ ein Komplex beliebiger (endlicher oder transfiniter) Ordnung $\varrho>1$ in $\mathfrak{G}$. Wir behaupten, die reguläre Bildgesamtheit $A_c(\Delta_\varrho)$ ist in einem Komplex $\tilde{\Delta}_{\varrho\pm i}$ $(i=0,1)$ von der Ordnung $\varrho-1$, ϱ oder $\varrho+1$ in $\tilde{\mathfrak{G}}$ enthalten. (Ist ϱ insbesondere eine Limeszahl, so ist $i=0$.)*

In IV wurde der Satz für den Fall $\varrho=1$ bewiesen. Wir setzen seine Gültigkeit für alle Ordnungszahlen $<\varrho$ voraus und werden den Beweis mit Hilfe der vollständigen (gewöhnlichen und transfiniten) Induktion führen.

1. Fall einer Ordnungszahl ϱ mit einem unmittelbaren Vorgänger. Es sei $M(\Delta_\eta)$ die Grundmenge des Komplexes Δ_ϱ. Nach dem Erzeugungsprinzip der Komplexe (Pth. § 7, Satz IV) läßt sich die Grundmenge $M(\Delta_\eta)$ in der Form darstellen

$$M(\Delta_\eta) = M({}_1\Delta_\eta) + M({}_2\Delta_\eta) + \ldots + M({}_n\Delta_\eta) + \ldots,$$

wobei $M({}_1\Delta_\eta)$ einen einzigen Komplex enthält und jeder Komplex von $M({}_n\Delta_\eta)$ zu mindestens einem Komplex der Gesamtheit $M({}_{n-1}\Delta_\eta)$ benachbart ist.

Wegen Voraussetzung der Gültigkeit unseres Satzes für alle Werte $<\varrho$ muß die reguläre Bildgesamtheit $A_c(\Delta_\eta)$ eines jeden Komplexes $\Delta_\eta \,\varepsilon\, M(\Delta_\eta)$ in einem Komplex $\tilde{\Delta}_{\eta\pm i}$ $(i=0,1)$ von der Ordnung $\eta \pm i$ im Bildbereich enthalten sein. Wir ordnen auf diese Weise einem jeden Komplex der Gesamtheit $M(\Delta_\eta)$ einen ihn enthaltenden Komplex $\tilde{\Delta}_{\eta\pm i}$ zu und bezeichnen die $M(\Delta_\eta)$ entsprechende Gesamtheit solcher Komplexe in $\tilde{\mathfrak{G}}$ mit $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{\eta\pm i})$. — Jetzt können wir aus den Sätzen V und VI folgern, daß die reguläre Bildgesamtheit $A_c(\Delta_\eta^0)$ eines jeden abgeschlossenen Komplexes $\Delta_\eta^0 \,\varepsilon\, M(\Delta_\eta^0)$ in

einem nicht abgeschlossenen Komplex $\tilde{\Delta}_{(\eta\pm i)+i}$ $(i=0,1)$ von der Ordnung $(\eta\pm i)+i$ enthalten ist, wobei dieser letztere den Δ_η zugeordneten Komplex $\tilde{\Delta}_{\eta\pm i}$ enthält. — Einem jeden Komplex $\Delta_\eta^0 \varepsilon M(\Delta_\eta^0)$ ordnen wir einen solchen Komplex $\tilde{\Delta}_{(\eta\pm i)+i}$ zu. Der Gesamtheit $M(\Delta_\eta)$ wird dadurch eine Gesamtheit $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{(\eta\pm i)+i})$ in umkehrbar eindeutiger Weise zugeordnet. Wir berücksichtigen jetzt, daß die Ordnung der Komplexe in $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{(\eta\pm i)+i})$ $\leqq \varrho+1$ sein muß. Ein jeder dieser Komplexe ist in einem in bezug auf $\varrho+2$ gesättigten nicht abgeschlossenen Komplex $\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}}$ $\bar{\eta}$-er Ordnung enthalten. Auf diese Weise wird auch jedem Komplex $\Delta_\eta^0 \varepsilon M(\Delta_\eta^0)$ ein ihn enthaltender Komplex $\Delta_{\bar{\eta}}$ zugeordnet. Der Gesamtheit $M(\Delta_\eta)$ bzw. ihren Teilgesamtheiten $M({}_n\Delta_\eta)$ entsprechen in umkehrbar eindeutiger Weise die Gesamtheiten in bezug auf $\varrho+2$ gesättigter Komplexe $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}})$ bzw. $\mathfrak{M}({}_n\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}})$.

Wir werden jetzt zeigen, daß sämtliche Komplexe der Gesamtheit $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}})$ identisch sein müssen.

Zunächst bemerken wir, daß der durch das Erzeugungsprinzip gegebenen Darstellung der Grundmenge $M(\Delta_\eta)$ die folgende Darstellung der Gesamtheit $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}})$ entspricht:

$$\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}}) = \mathfrak{M}({}_1\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}}) + \mathfrak{M}({}_2\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}}) + \ldots + \mathfrak{M}({}_n\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}}) + \ldots$$

Ist ${}_n\Delta_\eta$ ein beliebiger Komplex von $M({}_n\Delta_\eta)$ $(n>1)$ und ${}_{n-1}\Delta_\eta$ ein zu ihm benachbarter Komplex von $M({}_{n-1}\Delta_\eta)$, so können wir aus der Beziehung ${}_{n-1}\Delta_\eta^0 \cdot {}_n\Delta_\eta^0 \neq 0$ sofort die Beziehung

$$A_c({}_{n-1}\Delta_\eta^0) \cdot A_c({}_n\Delta_\eta^0) \neq 0$$

folgern. Wir ziehen jetzt in Betracht, daß zwei nicht abgeschlossene in bezug auf eine Zahl >2 gesättigte Komplexe immer einen leeren Durchschnitt bilden oder identisch sein müssen, und können folgern, daß die Komplexe ${}_{n-1}\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}}$ und ${}_n\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}}$ identisch sind. Mit Hilfe eines gewöhnlichen Induktionsschlusses können wir, von $\mathfrak{M}({}_1\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}})$ ausgehend, folgern, daß sämtliche Komplexe von $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}})$ identisch sein müssen. Es handelt sich hier offenbar um einen und denselben Komplex $\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}}$ fester Ordnung $\bar{\eta}$, in welchem die reguläre Bildgesamtheit $A_c(\Delta_\varrho)$ enthalten ist.

Wir werden uns jetzt überzeugen, daß $\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}}$ unserem Satz genügt. Dies erfordert nur noch den Nachweis, daß $\bar{\eta} = \varrho \pm i$ ist. — Zunächst folgt aus der Definition von $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}})$ unmittelbar, daß $\bar{\eta} \leqq \varrho+1$ sein muß. Es muß also gezeigt werden, daß $\bar{\eta}$ niemals $< \varrho-1$ sein kann. Für $\varrho=2$ ist dies ohne weiteres klar. Für den allgemeinen Fall $\varrho>2$ berücksichtigen wir, daß (laut Annahme) unser Satz für Ordnungszahlen $<\varrho$ gilt, auch dann natürlich, wenn wir die inverse Abbildung A^{-1} in Betracht ziehen. Wäre also $\bar{\eta} < \varrho-1$, so müßte die reguläre Urbildgesamtheit $A_c^{-1}(\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}})$ in einem Komplex $\Delta_{\bar{\eta}\pm i}$ in $\mathfrak{G}$ von einer Ordnung $\bar{\eta}\pm i < \varrho$ enthalten sein.

Berücksichtigen wir, daß $A_c^{-1}(A_c(\Delta_\varrho))$ mindestens je eine Teilfolge einer jeden Punktfolge von Δ_ϱ enthält, so können wir aus der Beziehung $A_c^{-1}(\tilde{\Delta}_{\bar{\eta}}) \subset \Delta_{\bar{\eta}\pm i}$ sofort folgern, daß je eine Teilfolge einer jeden Punktfolge von Δ_ϱ in $\Delta_{\bar{\eta}\pm i}$ enthalten sein muß. Andererseits muß $\Delta_{\bar{\eta}\pm i}$ in einem in bezug auf ϱ gesättigten Komplex der Grundmenge von Δ_ϱ enthalten sein. Da aber die Grundmenge eines Komplexes ϱ-ter Ordnung für $\varrho > 2$ mindestens zwei zueinander fremde gesättigte Komplexe enthält, so muß auch Δ_ϱ einen zu $\Delta_{\bar{\eta}\pm i}$ fremden gesättigten Komplex enthalten. Es ergibt sich demnach ein Widerspruch zu der Annahme $\bar{\eta} < \varrho - 1$, und können wir folgern, daß $\bar{\eta} = \varrho \pm 1$ sein muß.

2. Fall einer Limeszahl ϱ. (P_n) sei eine Ausgangspunktfolge von Δ_ϱ und $M(\Delta_\eta)$ die Gesamtheit aller Komplexe von einer Ordnung $< \varrho$, welche (P_n) enthalten. Laut Annahme ist die reguläre Bildgesamtheit $A_c(\Delta_\eta)$ eines jeden Komplexes $\Delta_\eta \varepsilon M(\Delta_\eta)$ in einem Komplex $\tilde{\Delta}_{\eta\pm i}$ $(i = 0, 1)$ des Bildbereiches enthalten. Ordnen wir auf diese Weise einem jeden Komplex Δ_η einen $A_c(\Delta_\eta)$ enthaltenden Komplex $\tilde{\Delta}_{\eta\pm i}$ im Bildbereich zu, so erhalten wir eine $M(\Delta_\eta)$ entsprechende Komplexgesamtheit $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{\eta\pm i})$. Eine jede reguläre Teilfolge der Bildfolge von (P_n) ist in jedem Komplex $\tilde{\Delta}_{\eta\pm i} \varepsilon \mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{\eta\pm i})$ enthalten. Der Durchschnitt aller Komplexe der Gesamtheit $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{\eta\pm i})$ ist also nicht leer. Die geordnete Menge aller Ordnungszahlen der Komplexe von $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{\eta\pm i})$ ist mit dem durch ϱ bestimmten Zahlenabschnitt konfinal; nach der Definition C der Komplexe müssen sämtliche Komplexe der Gesamtheit $\mathfrak{M}(\tilde{\Delta}_{\eta\pm i})$ in einem Komplex $\tilde{\Delta}_\varrho$ ϱ-ter Ordnung enthalten sein. Für den Fall einer Limeszahl ϱ ist also $A_c(\Delta_\varrho)$ in einem Komplex $\tilde{\Delta}_\varrho$ derselben Ordnung enthalten.

Korollar. Ein Komplex Δ_ϱ ist nebst seiner Ordnung ϱ in bezug auf die Abbildung A invariant, falls ϱ eine Limeszahl ist.

$A_c(\Delta_\varrho)$ ist nach dem obigen Satz in einem Komplex $\tilde{\Delta}_\varrho$ ϱ-ter Ordnung enthalten. Umgekehrt muß $A_c^{-1}(\tilde{\Delta}_\varrho)$ ebenfalls in einem Komplex ϱ-ter Ordnung in $\mathfrak{G}$ enthalten sein. Dieser Komplex muß mit Δ_ϱ identisch sein. Insbesondere kann $A_c^{-1}(\tilde{\Delta}_\varrho)$ nicht in einem Komplex niederer Ordnung enthalten sein, da sonst gewisse Punktfolgen von Δ_ϱ zu diesem fremd sein müßten.

5. Die Invarianz der vollkommen gesättigten Komplexe.

Die weiteren Sätze ergeben sich im wesentlichen aus dem Satz VI.

VII. *Ist Δ_τ ein vollkommen gesättigter Komplex beliebiger (endlicher oder transfiniter) Ordnung τ in $\mathfrak{G}$ und $\tilde{\Delta}_{\bar{\tau}}$ ein die reguläre Bildgesamtheit $A_c(\Delta_\tau)$ enthaltender Komplex in $\mathfrak{G}$ $\bar{\tau}$-ter Ordnung, so ist auch die reguläre Urbildgesamtheit $A^{-1}(\tilde{\Delta}_{\bar{\tau}})$ in Δ_τ enthalten.*

Wir ziehen in Betracht, daß der Satz VI auch für die inverse Abbildung A^{-1} gilt. Es muß deshalb auch die Urbildgesamtheit $A_c^{-1}(\tilde{\Delta}_{\bar{\tau}})$ in einem Komplex $\Delta_{\bar{\tau}\pm i}$ $(i=0,1)$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ enthalten sein. Dieser letztere genügt offenbar der Beziehung

$$\Delta_{\bar{\tau}\pm i}\cdot\Delta_{\tau}\neq 0.$$

Aus dieser Beziehung ergibt sich

$$\Delta_{\bar{\tau}\pm i}\subset\Delta_{\tau},$$

da Δ_{τ} vollkommen gesättigt ist.

Aus dem Satz VI ergibt sich insbesondere, *daß die vollkommen gesättigten Komplexe erster Ordnung nebst ihrer Ordnungszahl in bezug auf die Abbildung invariant sind.*

Ein vollkommen gesättigter Komplex Δ_1 erster Ordnung enthält entweder nur α- oder nur β-Punktfolgen und ist mit einer in bezug auf A invarianten (vgl. Satz I) zyklischen konjugierten f-Menge Δ identisch.

VIII. *Es sei Δ_{τ} ein vollkommen gesättigter Komplex in $\mathfrak{G}$ und $\Delta_{\tau\pm i}$ $(i=0,1)$ ein Komplex in $\mathfrak{G}$, welcher $A_c(\Delta_{\tau})$ enthält. Ist $\tau\pm i>1$, so ist $\tilde{\Delta}_{\tau\pm i}$ ebenfalls ein vollkommen gesättigter Komplex; ist $\tau\pm 1=1$,*[11]) *so kann $\tilde{\Delta}_1$ höchstens in einem vollkommen gesättigten Komplex $\tilde{\Delta}_2$ zweiter Ordnung enthalten sein.*

Angenommen, es gäbe einen $\tilde{\Delta}_{\tau\pm i}$ enthaltenden Komplex $\Delta_{\bar{\tau}}$ von einer Ordnung $\bar{\tau}>\tau\pm i$ im Falle $\tau\pm i>1$, und $\bar{\tau}>2$ im Falle $\tau\pm i=1$. Der Komplex $\tilde{\Delta}_{\bar{\tau}}$ enthält mindestens zwei (zueinander fremde) in bezug auf $\bar{\tau}$ gesättigte Komplexe, wobei in einem der beiden keine Punktfolgen von $\tilde{\Delta}_{\tau\pm i}$ enthalten sind. Es gibt deshalb mindestens eine Punktfolge $(\tilde{P}_n)$ in $\tilde{\Delta}_{\bar{\tau}}$, von welcher keine Teilfolge in $\tilde{\Delta}_{\tau\pm i}$ enthalten ist. Nach dem Satz VII muß die reguläre Urbildgesamtheit $A_c^{-1}(\tilde{\Delta}_{\bar{\tau}})$ in Δ_{τ} enthalten sein. Es muß also auch eine reguläre Teilfolge der Urbildfolge (P_n) von $(\tilde{P}_n)$ in Δ_{τ} enthalten sein. In Widerspruch zu unserer Annahme müßte eine Teilfolge von $(\tilde{P}_n)$ in $A_c(\Delta_{\tau})$ bzw. $\tilde{\Delta}_{\tau\pm i}$ enthalten sein.

Ist $\tilde{\Delta}_{\tau\pm i}$ für $\tau\pm i=1$ in einem Komplex $\tilde{\Delta}_2$ zweiter Ordnung des Bildbereiches enthalten, so folgt aus der obigen Betrachtung, daß $\tilde{\Delta}_{\tau\pm i}$ je eine Teilfolge einer jeden Punktfolge von $\tilde{\Delta}_2$ enthalten muß.

IX. *Ist Δ_{τ} ein vollkommen gesättigter Komplex von einer Ordnung τ, so ist $A_c(\Delta_{\tau})$ jedenfalls in einem vollkommen gesättigten Komplex $\tilde{\Delta}_{\tau\pm i}$ von der Ordnung $\tau\pm i$ in $\mathfrak{G}$ enthalten, wobei auch die reguläre Urbildgesamtheit $A_c^{-1}(\tilde{\Delta}_{\tau\pm i})$ in dem vollkommen gesättigten Komplex Δ_{τ} enthalten ist.*

---

[11]) Für $\tau=1$, $i=0$ ist Δ_1, wie oben bemerkt wurde, auch in bezug auf die Ordnung invariant, d. h. $A_c(\Delta_{\tau})$ ist in einem vollkommen gesättigten Komplex $\tilde{\Delta}_1$ enthalten; es kommt also nur der Fall $\tau-1=1$ in Frage.

Dieses Resultat ergibt sich unmittelbar aus dem Satz VIII. Insbesondere entsprechen zwei verschiedenen vollkommen gesättigten Komplexen Δ_τ und $\Delta_{\tau'}$ in $\mathfrak{G}$ immer zwei verschiedene vollkommen gesättigte Komplexe $\tilde{\Delta}_{\tau\pm i}$ und $\tilde{\Delta}_{\tau'\pm i}$ in $\tilde{\mathfrak{G}}$ und umgekehrt.

Ordnen wir einem jeden vollkommen gesättigten Komplex Δ_τ in $\mathfrak{G}$ den seine reguläre Bildgesamtheit enthaltenden vollkommen gesättigten Komplex $\tilde{\Delta}_{\tau\pm i}$ in $\tilde{\mathfrak{G}}$ zu, so erhalten wir auch *eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der durch die vollkommen gesättigten Komplexe bestimmten Primenden der beiden Gebiete*[12]). Es ist somit gezeigt, *daß die Primenden in bezug auf die Abbildung A invariant bleiben, wobei die Ordnung zweier einander zugeordneten Primenden sich höchstens um eins unterscheiden kann.*

---

[12]) Bezeichnen wir mit E_ϑ^τ und $\tilde{E}_\vartheta^{\tau\pm i}$ die durch Δ_τ bzw. $\tilde{\Delta}_{\tau\pm i}$ bestimmten, einander zugeordneten Primenden in $\mathfrak{G}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}$, und mit E_f bzw. $\tilde{E}_f$ die Gesamtheiten aller gegen E_ϑ^τ bzw. $\tilde{E}_\vartheta^{\tau\pm i}$ konvergierenden Punktfolgen, so müssen die beiden Beziehungen gelten

$$A(E_f) = \tilde{E}_f \quad \text{bzw.} \quad A^{-1}(\tilde{E}_f) = E_f.$$

(Eingegangen am 26. Dezember 1931.)

Unendlichviele Rotationsflächen, die einander längs derselben Kurve berühren.

Von

Georg Scheffers in Berlin-Dahlem.

Daß es Paare von Rotationsflächen gibt, die einander längs Kurven berühren, leuchtet ohne weiteres ein. Einen besonderen hierher gehörigen Fall habe ich schon früher zur Sprache gebracht[1]). Wenn man sich nun die Frage nach *drei* Rotationsflächen vorlegt, die einander längs ein und derselben Kurve berühren, kommt man zu dem merkwürdigen Ergebnisse, daß dann allemal sogar unendlichviele Rotationsflächen von dieser besonderen Art vorhanden sind. Der Beweis dafür ist so einfach, daß ich glauben möchte, er sei schon früher vorgekommen. Aber mir ist nichts darüber bekannt. Deshalb möchte ich ihn hier in aller Kürze geben auf die Gefahr hin, daß doch irgendwem sonst die Priorität gebührt.

Die Rotationsflächen sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Normalen ein und dieselbe Gerade — die Rotationsachse — schneiden[2]). Wenn also zwei Rotationsflächen mit windschiefen Achsen h_1 und h_2 einander in einem Punkte P berühren, ist die einzige durch P gehende Gerade, die h_1 und h_2 schneidet, die gemeinsame Normale der beiden Flächen im Punkte P. Will man haben, daß die Rotationsflächen einander längs einer Kurve berühren, so stelle man eine geradlinige Fläche her, deren Erzeugende die Achsen h_1 und h_2 schneiden, und bestimme eine orthogonale Trajektorie t der Erzeugenden. Durch Drehen von t um h_1 und h_2 entstehen dann Flächen von der verlangten Art. Die orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden lassen sich bekanntlich[3]) durch Quadratur ermitteln.

---

[1]) Ebene Berührungskurven zweier Rotationsflächen, Math. Zeitschrift **11** (1921), S. 315—16.

[2]) G. Monge, Application de l'analyse à la géométrie, etwa 5. Aufl. Paris 1850, S. 18.

[3]) Siehe z. B. G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 1. Bd. Paris 1887, S. 82.

Nun seien h_1, h_2, h_3 *drei* windschiefe Achsen. Dann gibt es nur eine geradlinige Fläche, deren Erzeugende g alle drei Achsen schneiden, ein *einschaliges Hyperboloid*[4]), und die Achsen h_1, h_2, h_3 gehören zu den Erzeugenden h der zweiten Schar. Eine orthogonale Trajektorie t der Erzeugenden g wird also nicht nur dann, wenn sie sich um h_1 oder h_2 oder h_3 dreht, sondern auch dann, wenn sie sich um irgendeine der Erzeugenden h dreht, eine Rotationsfläche geben, derart, daß alle diese Rotationsflächen einander längs der Kurve t berühren. Daher:

Wenn drei verschiedene Rotationsflächen einander längs einer Kurve berühren, gibt es einfach unendlichviele Rotationsflächen, die dasselbe tun.

Um die Trajektorien t zu finden, stellen wir das einschalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

mittels zweier Parameter u und v so dar:

$$x = a\frac{\sin(u-v)}{\cos(u+v)}, \qquad y = b\frac{\cos(u-v)}{\cos(u+v)}, \qquad z = c\,\mathrm{tg}(u+v).$$

Die Parameterlinien sind dann die geradlinigen Erzeugenden der Fläche. Wenn zur Abkürzung

$$P = a^2\cos^2 2v + b^2\sin^2 2v + c^2,$$
$$Q = -a^2\cos 2u\cos 2v + b^2\sin 2u\sin 2v + c^2,$$
$$R = a^2\cos^2 2u + b^2\sin^2 2u + c^2$$

gesetzt wird, sind die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche die mit $\cos^4(u+v)$ dividierten Größen P, Q, R. Mithin ist

$$Q\,du + R\,dv = 0$$

die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien t der Geraden $u = \text{konst.}$ des Hyperboloids. Daß sich die Gleichung wie gesagt durch Quadratur integrieren läßt, beruht darauf, daß jede Integralkurve wieder in eine Integralkurve übergeht, wenn ihre Punkte gleichlange Wege auf den durch sie gehenden Geraden $u = \text{konst.}$ zurücklegen. Da $\sqrt{R}\,dv : \cos^2(u+v)$ das Bogenelement auf den Geraden $u = \text{konst.}$ ist, schließt man hieraus, daß

$$dJ = \frac{Q\,du + R\,dv}{\sqrt{R}\cos^2(u+v)}$$

---

[4]) Wenn man zwei einander längs einer Kurve berührende Rotationsflächen betrachtet, denkt man unwillkürlich an den bekannten Fall des Hyperboloid-Räderpaares. Das Hyperboloid des Textes hat damit nichts zu tun.

das vollständige Differential eines Integrals J sein muß[5]). Danach ist es leicht, das Integral zu berechnen:

$$J = \operatorname{tg}(u+v)\sqrt{a^2\cos^2 2u + b^2\sin^2 2u + c^2} - 2\int \frac{(a^2\cos^2 2u + b^2\sin^2 2u)\,du}{\sqrt{a^2\cos^2 2u + b^2\sin^2 2u + c^2}}.$$

Man darf a, b, c positiv und a größer als b annehmen. Wenn man dann $2u$ und $2v$ mit φ und ψ bezeichnet und

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2} = k^2, \qquad \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi$$

setzt, bekommt man nach Multiplikation des Integrals mit der Konstante $\sqrt{a^2+c^2}$

$$J = (a^2+c^2)\left[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\,\Delta\varphi - E(\varphi)\right] + c^2 F(\varphi),$$

ausgedrückt mittels der elliptischen Integrale

$$E(\varphi) = \int \Delta\varphi\, d\varphi, \qquad F(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Der Sonderfall, wo das Hyperboloid ein *Rotationshyperboloid* ist, verdient Beachtung, da sich in diesem Falle die Trajektorien t auf einfache Weise herstellen lassen. Im Falle $a = b$ ergibt sich zunächst einfach:

$$J = (a^2+c^2)\operatorname{tg}(u+v) - 2a^2u.$$

Da jetzt alle orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden $u =$ konst. kongruent sind, genügt es, die durch $J = 0$ bestimmte Trajektorie t ins Auge zu fassen, also die Trajektorie:

$$(a^2+c^2)\operatorname{tg}(u+v) = 2a^2u.$$

Der Kehlkreis des Rotationshyperboloids ergibt sich, wenn man $v = -u$ setzt:

$$x_0 = a\sin 2u, \qquad y_0 = a\cos 2u, \qquad z_0 = 0.$$

Zu $u = 0$ gehört der Schnittpunkt P_0 des Kehlkreises mit der positiven y-Achse. Wenn u wächst, wird der Kreis im Sinne von der positiven y-Achse nach der positiven x-Achse hin durchlaufen. In diesem Sinne gemessen ist $2au$ die Länge des Kreisbogens vom Punkte P_0 bis zu dem zu u gehörigen Punkte P. Wird diese Länge als Strecke auf der Kreistangente im rückwärtigen Sinne vom Berührungspunkte P an aufgetragen, so geht ein Punkt

$$\xi = a\sin 2u - 2au\cos 2u, \qquad \eta = a\cos 2u + 2au\sin 2u, \qquad \zeta = 0$$

---

[5]) Nach S. Lie, Zur Theorie des Integrabilitätsfaktors, Christ. Forh. 1874, S. 242—254, Gesammelte Abhandlungen, 3. Bd., Leipzig und Christiania, S. 176—186.

derjenigen *Kreisevolvente* hervor, deren Spitze der Punkt P_0 ist. Eine Erzeugende $u = \text{konst.}$ des Rotationshyperboloids hat Richtungskosinus proportional zu

$$-a\cos 2u, \quad a\sin 2u, \quad c,$$

und demnach ist in den laufenden Koordinaten x, y, z

$$-a\cos 2u(x-\mathfrak{x}) + a\sin 2u(y-\mathfrak{y}) + c(z-\mathfrak{z}) = 0$$

die Gleichung derjenigen Ebene, die durch den Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ der Kreisevolvente geht und überdies zur Erzeugenden $u = \text{konst.}$ des Hyperboloids senkrecht ist. Diese Gleichung schreibt sich einfacher so:

$$-ax\cos 2u + ay\sin 2u + cz = 2a^2u.$$

Setzt man nun hierin die Koordinaten des Punktes (u, v) des Rotationshyperboloids ein, so kommt

$$(a^2+c^2)\,\mathrm{tg}\,(u+v) = 2a^2u.$$

Dies aber ist wieder die Gleichung der ins Auge gefaßten orthogonalen Trajektorie t der Erzeugenden $u = \text{konst.}$

Um also eine orthogonale Trajektorie t der Erzeugenden $u = \text{konst.}$ des Rotationshyperboloids zu bekommen, und zwar diejenige, die durch einen bestimmten Punkt P_0 des Kehlkreises geht, stellt man diejenige Evolvente dieses Kehlkreises her, die P_0 als Spitze hat. Ist dann $\mathfrak{P}$ der auf der Tangente eines Kreispunktes P gelegene Punkt der Evolvente, so fälle man das Lot von $\mathfrak{P}$ auf die durch den Punkt P gehende Erzeugende $u = \text{konst.}$ des Hyperboloids. Der Fußpunkt ist ein Punkt der orthogonalen Trajektorie t, und so bekommt man alle Punkte der Trajektorie.

Diese hiernach leicht herstellbare Kurve t hat also die besondere Eigenschaft, daß durch ihr Drehen um irgendeine Erzeugende $v = \text{konst.}$ des Rotationshyperboloids eine Rotationsfläche hervorgeht, die alle unendlichvielen ebenso zu gewinnenden Rotationsflächen längs derselben Kurve t berührt.

Aber das ist immerhin nur ein Sonderfall des allgemeineren Falles, in dem die Kurve t durch elliptische Integrale gewonnen wird.

Schließlich ist noch ein anderer Sonderfall erwähnenswert: Das Hyperboloid kann in ein *hyperbolisches Paraboloid* ausarten, und insbesondere in eines, dessen geradlinige Erzeugende g der einen Schar sämtlich senkrecht sind zu einer geradlinigen Erzeugenden h_0 der anderen Schar. Man bemerkt dann, daß die orthogonalen Trajektorien der Erzeugenden g durch diejenigen Rotationszylinder ausgeschnitten werden, die h_0 als Achse haben. Die Trajektorien sind dann also zylindrische Kurven. Sie gehen, wie nur kurz bemerkt sei, so hervor: Man zeichne in der Ebene eine *Tangenslinie*

$$y = \text{konst.}\,\mathrm{tg}\,x$$

und verbiege die Ebene zu einem Rotationszylinder derart, daß aus einer Periode 2π ein Kreisumlauf um den Zylinder wird. Dann geht die Tangenslinie in eine der orthogonalen Trajektorien t der Erzeugenden g des hyperbolischen Paraboloids über. Wieder liefert diese Kurve, gedreht um die Erzeugenden h der zweiten Schar des Paraboloids, unendlichviele Rotationsflächen, die einander längs der Kurve t berühren. Wir kommen somit zu einer bemerkenswerten Eigentümlichkeit der Tangenslinie.

Die soeben aus der Tangenslinie entstandene Kurve ist übrigens algebraisch. Sie hat, nebenbei bemerkt, noch diese besondere Eigenschaft: Sie ist der *Schnitt von zwei kongruenten, aber unendlichwenig verschieden gelegenen Rotationszylindern.*

Berlin-Dahlem, 8. Februar 1932.

(Eingegangen am 9. Februar 1932.)

Über einen Satz von Herrn Jarník.

Von

Felix Behrend in Berlin.

Es sei

$$a_1 + a_2 + \ldots$$

eine unendliche Reihe; ihre Glieder a_k seien hyperkomplexe Zahlen mit n Einheiten (Vektoren, Punkte im n-dimensionalen Raum R_n). Unter der *Grenzmenge* $\Lambda(a_1 + a_2 + \ldots)$ der Reihe verstehe man die Menge der Häufungspunkte ihrer Partialsummen

$$s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Man ordne nun die Glieder der Reihe $\sum_1^\infty a_k$ auf alle möglichen Arten um; die Vereinigungsmenge aller Grenzmengen Λ, die man so erhält, heiße der *Summenbereich* der Reihe. Er werde mit $M = M(a_1, a_2, \ldots)$ bezeichnet.

Im Falle *konvergenter* Reihen stimmt M mit dem Summenbereich, wie ihn Steinitz[1]) definiert, überein; *M ist* in diesem Fall *eine lineare Mannigfaltigkeit*[2]).

Herr Jarník[3]) hat über die Gestalt des Summenbereichs folgenden Satz angegeben: *Ist die Folge a_k beschränkt, und sind die a_k gewöhnliche komplexe Zahlen, so ist der Summenbereich $M(a_1, a_2, \ldots)$*

1. *entweder leer,*

2. *oder er besteht aus einem einzigen Punkt*

---

[1]) E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journal für die reine und angewandte Mathematik **143** (1913), S. 128—175, **144** (1914), S. 1—40.

[2]) Vgl. hierzu: W. Groß, Bedingt konvergente Reihen, Monatshefte für Mathematik und Physik **28** (1917), S. 221—237. V. Bergström, Ein neuer Beweis eines Satzes von Steinitz, Abhandlungen aus dem Math. Seminar Hamburg **8** (1931), S. 148—152.

[3]) V. Jarník, Über die Umordnung unendlicher Reihen, Věstník Královské České Společnosti Nauk, Třída Matematicko-Přírodovědecká (1927), 8, S. 1—45.

3. *oder aus äquidistanten Punkten einer Geraden*

4. *oder aus allen Punkten einer Geraden*

5. *oder aus allen Punkten eines ebenen Zahlengitters*

6. *oder aus allen Punkten einer Schar von äquidistanten parallelen Geraden*

7. *oder aus allen Punkten der komplexen Zahlenebene.*

Herr Jarník gewinnt auch Kriterien, wann die einzelnen Fälle eintreten; aber sein Beweis ist ziemlich kompliziert, da jeder Fall einzeln untersucht wird, und da eine ganze Reihe von Hilfsbetrachtungen benutzt wird.

Verzichtet man auf die Angabe von Kriterien, so kann man den Beweis des Satzes von Herrn Jarník wesentlich vereinfachen. Das will ich — einer Anregung von Herrn G. Feigl nachgehend — im folgenden zeigen. Dabei wird sich gleichzeitig ergeben, daß man die Beschränktheit der a_k nicht vorauszusetzen braucht. Ferner spreche ich den Satz für hyperkomplexe a_k im R_n aus. Er lautet so:

Der Summenbereich einer Reihe $\sum_1^\infty a_k$ *mit beliebigen hyperkomplexen Gliedern ist entweder leer, oder er ist ein Bereich, den ich ein Gitter linearer Mannigfaltigkeiten nennen will.*

Unter einem *Gitter linearer Mannigfaltigkeiten* (kurz: Gitter l. M.) verstehe ich dabei folgendes. Ein Gitter l. M. im R_1 (auf der Geraden) ist entweder ein Punkt oder ein Punktgitter oder die ganze Gerade. Der Begriff sei im R_{n-1} bereits erklärt. Ein Gitter l. M. im R_n ist dann entweder ein Gitter l. M. eines R_{n-1}, oder ein Bereich, den man erhält, indem man ein solches Gitter l. M. um alle ganzzahligen Vielfache $g \cdot \tau$ $(g = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ eines Vektors τ verschiebt, der nicht in den R_{n-1} des Gitters hineinfällt, oder der ganze R_n.

Zum Beweise zeigt man, daß der Summenbereich, falls er überhaupt Zahlen enthält, im wesentlichen (d. h. bis auf eine Parallelverschiebung) ein abgeschlossener Modul (im Dedekindschen Sinn) ist und daß ein abgeschlossener Modul die oben angegebene Gestalt besitzt.

Man stützt den Beweis am besten auf einen Hilfssatz von Herrn Jarník, dessen Beweis der Vollständigkeit wegen kurz wiedergegeben sei:

Ist $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *eine höchstens abzählbare Menge von Zahlen aus dem Summenbereich M, so kann man die Reihe* $\sum_1^\infty a_k$ *so zu einer Reihe* $\sum_1^\infty b_k$ *umordnen, daß alle* μ_i *in der Grenzmenge* $\Lambda(b_1 + b_2 + \ldots)$ *der umgeordneten Reihe enthalten sind*[4]).

[4]) a. a. O. [3]) S. 4—5.

Für jedes μ_i gibt es eine Reihenanordnung

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots \quad \text{mit} \quad \mu_i < \Lambda(a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots).$$

Nennt man die Partialsummen dieser Reihe $s_k^{(i)}$, so kann man eine Folge

$$s_{k_{11}}^{(1)},\ s_{k_{12}}^{(1)},\ s_{k_{22}}^{(2)},\ s_{k_{13}}^{(1)},\ s_{k_{23}}^{(2)},\ s_{k_{33}}^{(3)},\ s_{k_{14}}^{(1)},\ s_{k_{24}}^{(2)},\ s_{k_{34}}^{(3)},\ s_{k_{44}}^{(4)},\ \ldots$$

angeben derart, daß

$$\lim_{l \to \infty} s_{k_{ll}}^{(i)} = \mu_i$$

und daß jede Partialsumme alle Glieder der vorhergehenden und noch mindestens ein weiteres enthält. Die gesuchte Reihe $\sum_1^\infty b_k$ erhält man, indem man zunächst die Glieder von $s_{k_{11}}^{(1)}$, sodann die noch fehlenden von $s_{k_{12}}^{(1)}$, dann die noch fehlenden von $s_{k_{22}}^{(2)}$ nimmt usf.

Wegen der Abgeschlossenheit von Λ folgt aus dem Hilfssatz:

Der Summenbereich M ist abgeschlossen[5]).

Ferner folgt aus dem Hilfssatz:

Sind μ, ν, ϱ drei (nicht notwendig verschiedene) Zahlen aus dem Summenbereich M, so ist auch $\varrho + \mu - \nu < M$.

Wählt man also irgendeine Zahl ϱ aus M, und verschiebt man M um den Vektor $-\varrho$, so geht M in einen Modul M^* über.

Beweis. Nach dem Hilfssatz gibt es eine Reihenanordnung:

$$\begin{aligned}
&b_1 + \ldots + b_{m_1} + (b_{m_1+1} + \ldots + b_{n_1}) + (b_{n_1+1} + \ldots + b_{r_1}) \\
&+ b_{r_1+1} + \ldots + b_{m_2} + (b_{m_2+1} + \ldots + b_{n_2}) + (b_{n_2+1} + \ldots + b_{r_2}) \\
&+ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&+ b_{r_{k-1}+1} + \ldots + b_{m_k} + (b_{m_k+1} + \ldots + b_{n_k}) + (b_{n_k+1} + \ldots + b_{r_k}) \\
&+ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

derart, daß

$$s_{m_k} \to \mu, \qquad s_{n_k} \to \nu, \qquad s_{r_k} \to \varrho,$$

wo

$$s_l = b_1 + b_2 + \ldots + b_l.$$

Vertauscht man in jeder Zeile die Klammern miteinander, und betrachtet man in der neuen Reihenanordnung die Partialsummen t_k, die bis zum Glied b_{r_k} reichen, so wird

$$t_k = s_{r_k} - (s_{n_k} - s_{m_k}),$$

$$\lim_{k \to \infty} t_k = \varrho + \mu - \nu.$$

---

[5]) a. a. O. [3]) S. 6.

Es genügt jetzt, folgenden Satz zu beweisen:

Ein abgeschlossener Modul M^* hyperkomplexer Zahlen im R_n ist ein Gitter linearer Mannigfaltigkeiten[6]).

1. Ist nämlich 0 nicht Häufungspunkt von M^*, und besteht M^* nicht nur aus der 0, so zeigt man in bekannter Weise, daß M^* ein p-dimensionales Punktgitter $(1 \leqq p \leqq n)$ ist[7]).

2. Ist 0 Häufungspunkt von M^*, so wähle man in M^* eine Nullfolge μ_i derart, daß

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\mu_i}{|\mu_i|} = \lambda$$

existiert. Es gehört dann die ganze Gerade $t \cdot \lambda$ $(-\infty < t < +\infty)$ zu M^*. Denn für jedes feste t wird

$$\lim_{i \to \infty} \left[\frac{t}{|\mu_i|}\right] \cdot \mu_i = \lim_{i \to \infty} \left(\frac{t}{|\mu_i|} - \vartheta_i\right) \cdot \mu_i \qquad (0 \leqq \vartheta_i < 1)$$
$$= t \cdot \lambda.$$

Da mit μ_i auch $\left[\frac{t}{|\mu_i|}\right] \cdot \mu_i \subset M^*$, und da M^* abgeschlossen ist, ist also $t \cdot \lambda \subset M^*$.

Man nehme den Satz im R_{n-1} bereits als bewiesen an (für $n = 1$ ist er durch das Obige bewiesen). Man betrachte einen R_{n-1} durch 0, in dem die Gerade $t \cdot \lambda$ nicht liegt. Die Punkte von M^*, die diesem R_{n-1} angehören, bilden einen abgeschlossenen Teilmodul N^* von M^*. N^* ist nach Induktionsvoraussetzung ein Gitter linearer Mannigfaltigkeiten. Man erhält M^*, indem man durch alle Punkte von N^* die Parallelen zum Vektor λ legt. (Denn ist $\nu \subset N^*$, so ist $\nu + t \cdot \lambda \subset M^*$. Ist $\mu \subset M^*$, so gehört der Schnittpunkt ν_1 der Geraden $\mu + t \cdot \lambda$ mit dem R_{n-1} zu N^*, und μ ist von der Form $\mu = \nu_1 + t_1 \cdot \lambda$.) M^* ist also auch ein Gitter linearer Mannigfaltigkeiten.

Es sei noch bemerkt, daß der Steinitzsche Satz nicht aus dem Satz von Herrn Jarník folgt, daß sein Beweis auch nicht durch die obigen Betrachtungen vereinfacht wird[8]).

---

[6]) Vgl. zu diesem Satz auch: L. Kronecker, Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen, Sitzungsberichte der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1884) II, S. 1179—1193 und S. 1271—1299. Ferner: P. Koebe, Untersuchung der birationalen Transformationen usf. und G. Hessenberg, Über die Projektion des räumlichen Punktgitters, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft **4** (1905), S. 57—64 bzw. S. 64—70.

[7]) Siehe z. B. Hurwitz-Courant, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie, Berlin: Julius Springer, 3. Aufl. (1929), S. 148—152.

[8]) Der Fall konvergenter Reihen würde zusätzliche Betrachtungen erfordern, wie sie sich a. a. O. [2]) finden; mit diesen kann man aber den Steinitzschen Satz beweisen, ohne die obigen Resultate zu benutzen.

(Eingegangen am 11. Februar 1932.)

Asymptotische Abschätzung der Argumentvariation einer Funktion, die die Werte 0 und 1 nicht annimmt.

Von

Alexander Ostrowski in Basel.

Es sei $p(z)$ eine Funktion, die für $|z|<1$ regulär ist und weder den Wert 0, noch den Wert 1 annimmt. Wir bezeichnen mit $S(\alpha, r)$ bzw. $\Phi(\alpha, r)$ die obere Grenze von $|p(z)|$ bzw. $|\arg p(z) - \arg p(0)|$ (für stetige Fortsetzung des Arguments) für $|z| \leqq r < 1$ und für alle Funktionen $p(z)$ mit $p(0) = \alpha$. Daß $S(\alpha, r)$ und $\Phi(\alpha, r)$ für jedes $\alpha \neq 0, \neq 1$ und jedes $r < 1$ endlich sind, ist der Inhalt des Schottkyschen Satzes.

Der natürlichste Beweis dieses Satzes ergibt sich, wenn man die bekannte elliptische Modulfunktion $\lambda(z)$ benutzt, die man heute wohl am einfachsten mit Hilfe der konformen Abbildung einführt. Zu dem Zwecke bilde man das 0-winklige Dreieck D_1, das von den beiden Halbstrahlen $\Re z = 0$, $\Re z = 1$ $(\Im z > 0)$ und dem Halbkreis $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $\Im z > 0$ begrenzt wird (siehe Fig. 6 im § 9), so auf die obere λ-Halbebene ab, daß dabei die drei Spitzen 0, 1, ∞ von D_1 auf die Punkte 0, 1, ∞ der reellen Achse abgebildet werden. Die Abbildungsfunktion $\lambda(z)$ ist dann aus dem Dreieck D_1 in die ganze obere z-Halbebene fortsetzbar. Ihre Umkehrung $\omega(z)$ ist in der ganzen Ebene regulär, bis auf $z = 0, 1, \infty$, und unendlich vieldeutig. Wir werden im folgenden insbesondere unter $\omega(z)$ denjenigen Zweig der Umkehrung von $\lambda(z)$ verstehen, der die λ-Ebene auf den Fundamentalbereich von $\lambda(z)$, bestehend aus D_1 und seinem Spiegelbild D_1' in bezug auf die imaginäre Achse konform abbildet (vgl. Fig. 6 im § 9).

In einer an anderer Stelle erscheinenden Mitteilung[1]) leiten wir asymptotisch sehr genaue Formeln für $S(\alpha, r)$ her. Es ergibt sich

$$\text{(I)} \qquad S(\alpha, r) \sim \frac{1}{16} e^{\pi \Im \omega(\alpha) \frac{1+r}{1-r}} \quad \text{für} \quad \frac{\Im \omega(\alpha)}{1-r} \to \infty,$$

[1]) A. Ostrowski, Asymptotische Abschätzung des absoluten Betrages einer Funktion, die die Werte 0 und 1 nicht annimmt, Commentarii mathematici helvetici, 1932.

und damit insbesondere für feste α und $r \uparrow 1$:

$$(I^*) \qquad (1-r)\lg(16\,S(\alpha,r)) \to 2\pi\,\Im\,\omega(\alpha).$$

Andererseits gilt für $\alpha \to 0$:

$$(II) \qquad \frac{S(\alpha,r)}{16} \sim \left(\frac{\alpha}{16}\right)^{\frac{1-r}{1+r}} \quad \text{für} \quad |\alpha|^{1-r} \to 0.$$

In der vorliegenden Mitteilung soll eine analoge Abschätzung für $\Phi(\alpha, r)$ hergeleitet werden. Bekannt ist bisher durch Herrn P. Lévy[2])

$$\Phi(\alpha,r) \leqq \frac{c(\alpha)}{1-r}, \qquad c(\alpha) > 0,$$

sowie, wiederum durch P. Lévy,

$$|\lg S(\alpha,r) + i\,\Phi(\alpha,r)| \geqq \frac{c_1(\alpha)}{1-r} - \text{konst.}$$

Wir werden nun für festes α sogar für $r \to 1$

$$(III) \qquad (1-r)\,\Phi(\alpha,r) \to \pi\,\mathrm{Max}\left(\Im\,\omega(\alpha), \Im\frac{-1}{\omega(\alpha)}\right)$$

herleiten, was übrigens aus der folgenden ungewöhnlich scharfen Relation

$$(IV) \qquad \left|\Phi(\alpha,r) - \frac{2\pi r}{1-r^2}\,\mathrm{Max}\left(\Im\,\omega(\alpha), \Im\frac{-1}{\omega(\alpha)}\right)\right| < 11$$

unmittelbar folgt. (Die Konstante $3{,}5\,\pi < 11$, die wir bekommen, ließe sich noch um ein weniges weiter reduzieren.)

Der Beweis von (IV) verlangt allerdings sehr ausführliches Eingehen auf die der Funktion $\lambda(z)$ entsprechende Einteilung der oberen Halbebene, die sogenannte Modulfigur. Es sind dabei viel genauere Abschätzungen der Größenordnungen der Dreiecke dieser Figur nötig, als bisher bekannt waren. Insbesondere reicht die genaueste uns bekannte, von R. Fricke[3]) herrührende Abschätzung (es ist dies unsere Formel (7)) für unsere Zwecke lange nicht aus. Um diese Abschätzungen durchzuführen, benutzen wir ein anscheinend neues Hilfsmittel. Wir führen nämlich, um die „Öffnung" einer Spitze zu messen, das *Berührungsmaß* ein, d. h. Differenz oder Summe der Krümmungen der sich berührenden Kurvenbögen. Mit Hilfe dieses Berührungsmaßes läßt sich dann recht leicht ein Überblick über die geometrischen

---

[2]) P. Lévy, Bullet. de la soc. math. de France (1912). Einen anderen Beweis gibt J. E. Littlewood, Proc. Lond. Math. Soc. (2), **23** (1924), S. 490, 509–510.

[3]) R. Fricke, Die ellipt. Funkt. u. ihre Anwendungen **1** (1916), S. 289–290. Der Frickesche Beweis von (7) ist allerdings komplizierter als der unten gegebene, da Fricke nicht erkannt hat, daß die reziproken Durchmesser aller Dreiecke der Modulfigur ganze Zahlen sind, woraus ja (7) unmittelbar folgt.

Verhältnisse in der Modulfigur erhalten. Wir hätten unsere Abschätzungen allerdings auch auf einem zahlentheoretischen Wege erhalten können, nämlich mit Hilfe der sogenannten Farey- und Brocot-Reihen[4]). Doch schien uns die geometrische Betrachtungsweise in diesem Falle Vorzug zu verdienen.

§ 1.

Das Berührungsmaß.

Berühren sich zwei Kreise k_1, k_2 mit den Radien r_1 und r_2 $(r_1 \geqq r_2)$, so bezeichnen wir als ihr Berührungsmaß $\beta(k_1, k_2)$ die Differenz oder die Summe der reziproken Radien $\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}$ oder $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$, je nachdem die Berührung von innen oder von außen stattfindet. Wir behaupten nun:

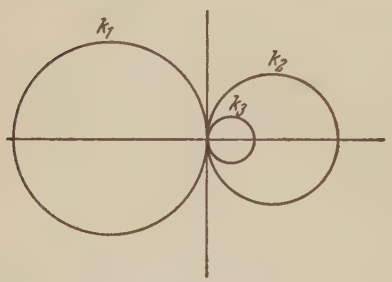


Fig. 1.

Berühren sich zwei Kreise k_1, k_2, und spiegelt man k_1 an k_2, so gilt für den entstehenden Kreis k_3

$$\beta(k_2, k_3) = \beta(k_1, k_2). \tag{1}$$

Zum Beweise spiegele man die ganze aus drei Kreisen k_1, k_2, k_3 mit den Radien r_1, r_2, r_3 bestehende Figur (Fig. 1) an dem um den Berührungspunkt O beschriebenen Kreise mit dem Radius 1. Dann gehen k_1, k_2, k_3 in drei parallele Geraden g_1, g_2, g_3 über, die die Verlängerung des gemeinsamen Durchmessers von k_1, k_2, k_3 in den Punkten $\frac{\varepsilon_1}{2r_1}, \frac{\varepsilon_2}{2r_2}, \frac{\varepsilon_3}{2r_3}$ senkrecht schneiden, wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ $+1$ oder -1 sind, je nachdem ob der betreffende Kreis rechts oder links von der gemeinsamen Tangente liegt. Da aber dann g_3 aus g_1 durch Spiegelung an g_2 entsteht, so ist

$$\frac{\varepsilon_1}{r_1} - \frac{\varepsilon_2}{r_2} = \frac{\varepsilon_2}{r_2} - \frac{\varepsilon_3}{r_3}, \tag{2}$$

woraus die Behauptung sofort folgt.

---

[4]) Die Möglichkeit, hier Farey- und Brocot-Reihen heranzuziehen, beruht auf der Tatsache, daß zwei Punkte α, β der reellen Achse dann und nur dann auf einem und demselben Halbkreis der Modulfigur liegen, wenn $\alpha = \frac{p}{u}$, $\beta = \frac{s}{v}$ mit $(p, u) = (s, v) = 1$, $pv - su = \pm 1$ ist. Wir gehen hierauf sowie auf die Theorie der Berührungsmaße in einer demnächst im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erscheinenden Arbeit ein.

§ 2.

Berührungsmaße in der Modulfigur.

Wir betrachten nun die daneben zum Teil gezeichnete Modulfigur (Fig. 2). Sie besteht erstens aus den senkrecht auf der x-Achse in allen Punkten mit ganzzahligen Abszissen nach oben errichteten Loten. Zweitens aus Halbkreisen mit den Radien $\frac{1}{2}$, die jeweils die x-Achse orthogonal in zwei benachbarten, ganzzahligen Punkten schneiden und in der oberen Halbebene verlaufen. Die Kreisbogendreiecke, die von zwei benachbarten Loten und einem solchen Halbkreis begrenzt sind, bezeichnen wir als Dreiecke erster Ordnung. Spiegeln wir nun Dreiecke erster Ordnung ins Innere der Halbkreise, d. h. an den Halbkreisen, so entsteht je ein Dreieck zweiter Ordnung, das von einem Halbkreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$ und zwei Halbkreisen mit dem Radius $\frac{1}{4}$ begrenzt wird. Die Dreiecke zweiter Ordnung spiegeln wir nun ins Innere der zwischen ihnen und der x-Achse liegenden Halbkreise, d. h. an ihren kleineren Begrenzungskreisen. Die so entstehenden Kreisbogendreiecke bezeichnen wir als Dreiecke dritter Ordnung. Die beiden kleineren „Seiten" eines Dreiecks dritter Ordnung begrenzen nun mit der x-Achse zusammen je einen Halbkreis. Spiegeln wir jedes Dreieck dritter Ordnung an seinen beiden kleineren Seiten ins Innere der zugehörigen Halbkreise, so entstehen je zwei Dreiecke vierter Ordnung. Indem wir dieses Verfahren fortsetzen, bezeichnen wir allgemein Dreiecke unserer Figur, die durch Spiegelung eines Dreiecks n-ter Ordnung an seinen beiden kleineren Seiten entstehen, als Dreiecke $(n+1)$-ter Ordnung.

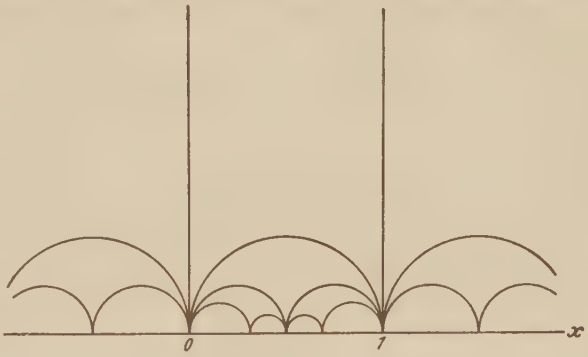


Fig. 2.

Die drei Seiten eines Dreiecks n-ter Ordnung unserer Figur berühren sich auf der X-Achse. Was läßt sich über die zugehörigen Berührungsmaße sagen?

Bei den Dreiecken erster Ordnung sind die Berührungsmaße offenbar 0, 2, 2. Bei den Dreiecken zweiter Ordnung sind sie gleich 2, 2, 8. Wir behaupten nun allgemein,

1) daß bei einem Dreieck n-ter Ordnung $(n > 1)$ alle Berührungsmaße wenigstens gleich 2 sind und (für $n > 2$) nur eines unter ihnen gleich 2 sein kann.

Beim Beweise wird sich zugleich ergeben,

2) daß für $n \geqq 1$ die reziproken Durchmesser aller Kreise unserer Figur und daher auch alle Berührungsmaße ganze Zahlen sind (die Berührungsmaße sogar gerade Zahlen).

Zum Beweise betrachten wir ein Dreieck n-ter Ordnung D_n $(n \geqq 2)$ (vgl. Fig. 3, wo D_n einfach mit D bezeichnet ist) und untersuchen die beiden Dreiecke $(n+1)$-ter Ordnung (in der Figur D' und D''), die aus ihm durch Spiegelung entstehen.

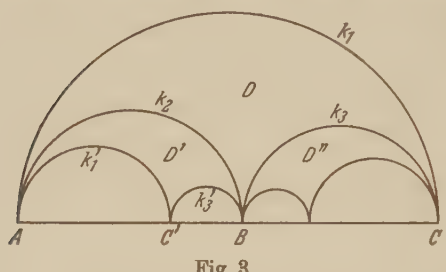


Fig. 3.

Die Behauptung 2) ist für $n = 1$ und 2 und die Behauptung 1) für $n = 2$ aus den obigen Angaben unmittelbar als richtig einzusehen. Wir nehmen nun an, daß die Behauptung 2) für alle ν mit $1 \leqq \nu \leqq n$ und die Behauptung 1) für alle ν mit $2 \leqq \nu \leqq n$ bewiesen sind.

Es seien die Durchmesser der drei Begrenzungskreise k_1, k_2, k_3 von D_n bzw. $d_1 > d_2 \geqq d_3$. Wir spiegeln zunächst an k_2 und betrachten das entstehende Dreieck $D'_{n+1} \equiv AC'B$ mit den Seiten $k_1', k_2' = k_2, k_3'$. Wegen $d_1 > d_2 \geqq d_3$ sind die drei Berührungsmaße bei D_n gleich

$$\frac{2}{d_2} - \frac{2}{d_1}, \quad \frac{2}{d_2} + \frac{2}{d_3}, \quad \frac{2}{d_3} - \frac{2}{d_1}. \tag{3}$$

Aus dem in 1. über das Berührungsmaß Bewiesenen folgt, daß die reziproken Durchmesser von k_1' und k_3' bzw. gleich sind

$$\frac{2}{d_2} - \frac{1}{d_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2}{d_2} + \frac{1}{d_3}, \tag{4}$$

und die Berührungsmaße von D'_{n+1} bei A, C', B ergeben sich als

$$\frac{2}{d_2} - \frac{2}{d_1}, \quad \frac{8}{d_2} - \frac{2}{d_1} + \frac{2}{d_3}, \quad \frac{2}{d_2} + \frac{2}{d_3}. \tag{5}$$

Wir sehen, daß $\frac{2}{d_2} - \frac{2}{d_1}$ das kleinste Berührungsmaß von D'_{n+1} und zugleich eines der Berührungsmaße von D_n (und zwar das Berührungsmaß der Spitze A in D_n) ist, so daß das kleinste Berührungsmaß von D'_{n+1} wenigstens gleich dem kleinsten Berührungsmaß von D_n ist und bei D'_{n+1} nur einmal vorkommt. Beachten wir nun, daß die Ausdrücke (4) der reziproken Durchmesser von k_1' und k_3' ganze Zahlen sind, wenn dies für $\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \frac{1}{d_3}$ der Fall ist, so sehen wir, daß unsere drei Behauptungen für D'_{n+1} zutreffen, wenn sie für D_n zutreffen. Analoges gilt für D''_{n+1}.

Ist aber D der Figur ein allgemeines Dreieck der Modulfigur, so bleiben offenbar die in (3), (4) und (5) angegebenen Werte der Berührungsmaße und der reziproken Durchmesser richtig. Wir können dann aus diesen

Angaben die folgende allgemeine Folgerung ziehen: Wir wollen von D' sagen, es entstehe aus D durch Spiegelung an der Spitze A (und analog D'' durch Spiegelung an der Spitze C). Dann ergibt sich, daß alle Berührungsmaße im durch Spiegelung entstehenden Dreieck wenigstens gleich dem Berührungsmaß der betreffenden Spitze sind. Daher sind auch die Berührungsmaße bei allen etwa aus D' durch weitere Spiegelung entstehenden Dreiecken höherer Ordnung wenigstens gleich dem Berührungsmaß der Spitze A in D, und zwar gilt die Gleichheit nur bei den in A liegenden Spitzen (und nur solange es solche Spitzen gibt).

§ 3.

Eine Abschätzung für die Lage eines Punktes der Modulfigur.

Es sei nun ein Punkt $z = x + iy$, $y > 0$ gegeben. Wir wollen die Ordnung n des Dreiecks der Modulfigur, in dem z liegt, abschätzen. Wir zeigen zunächst, daß bei einem Dreieck D_n n-ter Ordnung die Durchmesser aller Begrenzungskreise $\leqq \frac{1}{n-1}$ sind. Denn sind $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ diejenigen Dreiecke $1, 2, \ldots, (n-1)$-ter Ordnung, aus denen durch sukzessive Spiegelung, wie oben beschrieben, D_n entsteht, $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ die Halbkreise, an denen jedesmal gespiegelt wird und die offenbar die größten Seiten von $D_2, D_3, \ldots, D_n$ sind, und ihre Durchmesser $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$, so gilt

$$d_1 = 1 > d_2 > d_3 > \ldots > d_{n-1},$$

so daß, da jedes $d_\nu = \frac{1}{m}$ mit ganzem positiven m ist,

$$d_{n-1} \leqq \frac{1}{n-1}. \tag{6}$$

Liegt nun z in D_n, so kann y nicht größer sein als der Radius des größten Begrenzungskreises von D_n und also erst recht nicht größer als $\frac{1}{2(n-1)}$. Daher ist $2(n-1) \leqq \frac{1}{y}$,

$$n \leqq 1 + \frac{1}{2y}. \tag{7}$$

Diese Abschätzung ist allerdings für unsere Zwecke noch zu grob, und wir müssen in den nächsten Paragraphen die Struktur der Modulfigur etwas genauer diskutieren.

§ 4.

Weitere Abschätzungen für Dreiecke der Modulfigur.

a) Dreiecke D_m innerhalb K_n'.

Für spätere Zwecke brauchen wir weitere Abschätzungen. Wir heben in der beistehenden Abbildung (Fig. 4) des zwischen 0 und 1 liegenden Halbstreifens der Modulfigur zuerst die Kreisbögen hervor, die in den

Punkten 0 und 1 berühren. Es sind dies die Kreisbögen mit den reziproken Durchmessern $1, 2, 3, \ldots$ — sie sind in der Figur und im folgenden einfach mit entsprechenden Zahlen bezeichnet. — Je zwei solche aufeinanderfolgende Bögen n, $n+1$ $(n \geqq 2)$ werden zu einem Moduldreieck durch einen dritten Kreisbogen mit dem Durchmesser $\frac{1}{n(n+1)}$ ergänzt, den wir in der linken Hälfte der Figur mit K_n' bezeichnen, in der rechten Hälfte mit K_n. Wir wollen nun die Seiten eines innerhalb K_n' liegenden Dreiecks m-ter

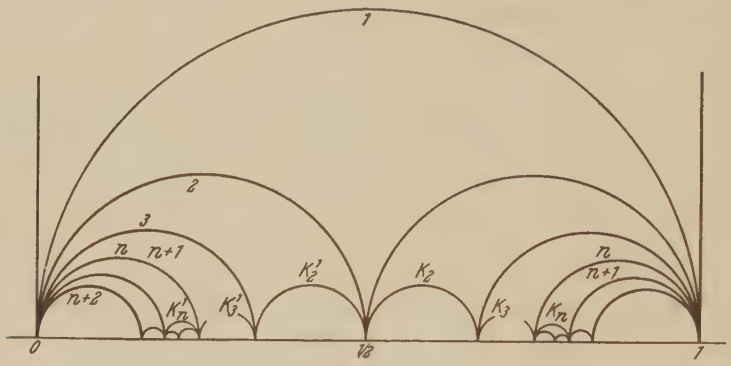


Fig. 4.

Ordnung $(m \geqq n+2)$ abschätzen. Dazu beachten wir, daß die halben Berührungsmaße des Dreiecks $D_{n+1}(n, n+1, K_n')$ in den Endpunkten von K_n' die Werte $n+1+n(n+1)=(n+1)^2$ und $n(n+1)-n=n^2$ haben[5]). Ein innerhalb K_n' liegendes Dreieck D_m $(m \geqq n+2)$ entsteht nun aus D_{n+1} durch $(m-n-1)$-malige Spiegelung, so daß die reziproken Durchmesser seiner Seiten wenigstens gleich

$$n(n+1)+(m-n-2)n^2 \tag{8}$$

sind. Bezeichnen wir für $n>2$ den Quotienten der reziproken Durchmesser dieser Seiten durch m mit q, so folgt

$$q \geqq n^2 - \frac{n(n^2+n-1)}{m}.$$

Für $n>2$, $m \geqq n+2$ ist nun

$$n^2 - \frac{9}{4} - \frac{n(n^2+n-1)}{m} \geqq \frac{n^3+2n^2-\frac{9}{4}n-\frac{9}{2}-n^3-n^2+n}{n+2}$$

$$= \frac{n^2-\frac{5}{4}n-\frac{9}{2}}{n+2} = \frac{n(n-3)+\frac{7}{4}(n-3)+\frac{3}{4}}{n+2},$$

[5]) Daß dies Quadratzahlen sind, ist kein Zufall. Die Berührungsmaße in der Modulfigur sind durchweg doppelte Quadratzahlen, wie ich in der oben (Fußnote [4])) zitierten Arbeit zeige.

so daß für $n > 2$, $m \geqq n+2$

$$q \geqq \frac{9}{4} = \left(1-\frac{1}{3}\right)^{-2}, \quad n > 2, \tag{9}$$

ist.

Für $n = 2$ aber sei $m - 2 = \mu \geqq 2$ gesetzt, und die Quotienten der reziproken Durchmesser der Seiten von D_m durch μ seien mit q_1 bezeichnet. Dann gilt nach (8)

$$q_1 \geqq 4 - \frac{2}{\mu}, \quad m = \mu + 2, \quad n = 2, \quad \mu \geqq 2. \tag{10}$$

§ 5.

Weitere Abschätzungen für Dreiecke der Modulfigur.

b) Dreiecke vom Range m innerhalb K_n.

Wir betrachten nun die Dreiecke, die innerhalb des in der Fig. 4 rechts mit K_n bezeichneten Halbkreises liegen. K_n ergänzt die Spitze zwischen den im Punkte 1 einander berührenden Bögen n, $n+1$ zu einem Moduldreieck. Die halben Berührungsmaße in den Endpunkten von K_n sind die gleichen wie oben bei K_n': n^2 und $(n+1)^2$. Wir heben in der Fig. 5 die für uns besonders in Betracht kommenden Halbkreise innerhalb K_n hervor. In dieser Figur sind die $A_1 = K_n$, A_2, A_3, ... die einander im Punkte $1 - \frac{1}{n}$ berührenden Halbkreise der Modulfigur, wobei A_ν mit $A_{\nu-1}$ das halbe Berührungsmaß n^2 bildet. Ebenso sind $B_1 = K_n$, B_2, ... die einander in $1 - \frac{1}{n+1}$ berührenden Halbkreise, wobei das halbe Berührungsmaß von $B_{\nu-1}$ und B_ν gleich $(n+1)^2$ ist. Daher ist der reziproke Durchmesser von A_ν um $(\nu-1)n^2$ größer als der reziproke Durchmesser $n(n+1)$ von K_n, also gleich $(\nu-1)n^2 + n(n+1) = \nu n^2 + n$.

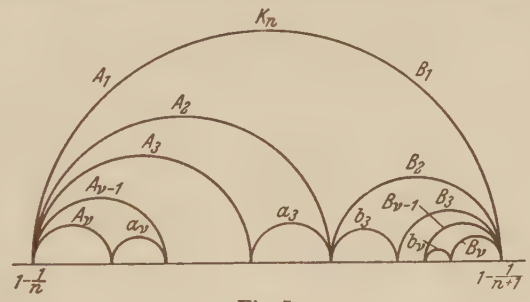


Fig. 5.

Ebenso ist der reziproke Durchmesser von B_ν gleich

$$(\nu-1)(n+1)^2 + (n+1)n = \nu(n+1)^2 - n - 1.$$

Die Spitze zwischen $A_{\nu-1}$ und A_ν wird durch den Halbkreis a_ν zu einem Moduldreieck ergänzt, wobei der Durchmesser von a_ν gleich

$$\frac{1}{(\nu-1)n^2+n} - \frac{1}{\nu n^2+n} = \frac{1}{((\nu-1)n+1)(\nu n+1)}$$

ist. Da daher der reziproke Durchmesser von a_ν den Wert $((\nu-1)n+1)(\nu n+1)$ hat, ist das kleinere der beiden halben Berührungsmaße des Dreiecks $(A_{\nu-1}A_\nu a_\nu)$ bei den Endpunkten von a_ν gleich

$$(11)\qquad ((\nu-1)n+1)(\nu n+1)-(\nu-1)n^2-n=((\nu-1)n+1)^2.$$

Analog erhalten wir für den reziproken Durchmesser von b_ν den Wert

$$((\nu-1)(n+1)-1)(\nu(n+1)-1).$$

Das kleinere der halben Berührungsmaße des Dreiecks $(B_{\nu-1}B_\nu b_\nu)$ bei den Endpunkten von b_ν hat hier den Wert

$$(12)\qquad \begin{aligned}&((\nu-1)(n+1)-1)(\nu(n+1)-1)-((\nu-1)(n+1)^2-n-1)\\&\quad=((\nu-1)(n+1)-1)^2.\end{aligned}$$

Wir bezeichnen nun das Dreieck $(K_n A_2 B_2)$ als vom Range 1, die beiden daraus durch Spiegelung an den kleineren Seiten entstehenden Dreiecke $(A_2 A_3 a_3)$, $(B_2 B_3 b_3)$ als vom Range 2, und allgemein die durch $(m-1)$-malige wiederholte Spiegelung an den kleineren Seiten aus $(K_n A_2 B_2)$ hervorgehenden Dreiecke als vom Range m. Wir haben nun Abschätzungen für reziproke Durchmesser und die Mittelpunkte der größten Seiten eines Dreiecks vom Range m innerhalb K_n aufzustellen.

Wir unterscheiden dabei drei Klassen von Dreiecken. Dreiecke erster Klasse sind die Dreiecke $(A_{\nu-1}A_\nu a_\nu)$, die der zweiten Klasse sind die Dreiecke $(B_{\nu-1}B_\nu b_\nu)$, die der dritten Klasse sind endlich die Dreiecke, die im Innern eines der Halbkreise a_ν, b_ν $(\nu=3,4,\ldots)$ liegen. Es gibt nur ein Dreieck vom Range m $(m\geqq 1)$ erster Klasse, und zwar $(A_m A_{m+1} a_{m+1})$. Seine größte Seite A_m hat nach dem Obigen den reziproken Durchmesser

$$(13)\qquad mn^2+n=Qm,\qquad Q=n^2+\frac{n}{m}.$$

Der Mittelpunkt ξ von A_m ist

$$(14)\qquad \xi=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2mn^2+2n}=1-\frac{2mn+1}{2mn^2+2n}.$$

Ebenso ist für das einzige Dreieck m-ten Ranges zweiter Klasse $(B_m B_{m+1} b_{m+1})$ der reziproke Durchmesser

$$(15)\qquad m(n+1)^2-n-1=Qm,\qquad Q=(n+1)^2-\frac{n+1}{m}$$

und der Mittelpunkt ξ:

$$(16)\qquad \xi=1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2m(n+1)^2-2n-2}=1-\frac{2m(n+1)-1}{2m(n+1)^2-2n-2}.$$

Gehört ein Dreieck D vom Range m zur dritten Klasse, so liegt es innerhalb a_ν oder b_ν, und es ist auf jeden Fall $m \geqq \nu$ und $\nu \geqq 3$. Es liege D in a_ν. D entsteht dann aus $(A_{\nu-1} A_\nu a_\nu)$ durch $(m-\nu+1)$-malige Spiegelung, seine größte Seite also gehört zu einem Dreieck des Ranges $m-1$, das aus $(A_{\nu-1} A_\nu a_\nu)$ durch $(m-\nu)$-malige Spiegelung entsteht, und hat daher den reziproken Durchmesser wenigstens um $(m-\nu)$ mal (11) größer als der reziproke Durchmesser von a_ν, d. h. wenigstens gleich

$$(17) \qquad (m-\nu)((\nu-1)n+1)^2+((\nu-1)n+1)(\nu n+1)=Qm,$$

wo

$$(18) \qquad Q=\left(1-\frac{\nu}{m}\right)((\nu-1)n+1)^2+\frac{((\nu-1)n+1)(\nu n+1)}{m}$$

ist, und dies ist offenbar auch für $m=\nu$ richtig, da ja dann (17) gerade den reziproken Durchmesser von a_ν liefert. Für Dreiecke m-ten Ranges, die in einem b_ν liegen, gilt analog für den reziproken Durchmesser der größten Seite die Abschätzung nach unten durch $(m \geqq \nu)$

$$(m-\nu)((\nu-1)(n+1)-1)^2+((\nu-1)(n+1)-1)(\nu(n+1)-1)=Qm,$$

wo

$$(19) \qquad Q=\left(1-\frac{\nu}{m}\right)((\nu-1)(n+1)-1)^2+\frac{((\nu-1)(n+1)-1)(\nu(n+1)-1)}{m}$$

ist. Wir behaupten nun, daß in beiden Fällen, d. h. für alle Dreiecke vom Range m der dritten Klasse

$$(20) \qquad Q \geqq (n+1)^2$$

ist. Dies braucht nur für den Ausdruck (18) bewiesen zu werden, da der Ausdruck (19) größer als (18) ist. In der Tat gilt, wegen $\nu \geqq 3$,

$$(\nu-1)(n+1)-1=(\nu-1)n+\nu-2 \geqq (\nu-1)n+1,$$

$$\nu(n+1)-1=\nu n+\nu-1>\nu n+1.$$

Der Quotient des Ausdrucks (18) durch $(n+1)^2$ läßt sich aber so schreiben:

$$(21) \qquad \left(1-\frac{\nu}{m}\right)\left(\nu-1-\frac{\nu-2}{n+1}\right)^2+\frac{1}{m}\left(\nu-1-\frac{\nu-2}{n+1}\right)\left(\nu-\frac{\nu-1}{n+1}\right).$$

Hier erkennt man aber unmittelbar (da alle Klammern positiv oder 0 sind), daß unser Ausdruck für $n \geqq 2$ am kleinsten für $n=2$ wird. Wir brauchen also nur (20) für $n=2$ zu beweisen, d. h.

$$(22) \qquad \left(\frac{m-\nu}{m}\right)(2\nu-1)^2+\frac{4\nu^2-1}{m} \geqq 9.$$

Multipliziert man hier beide Seiten mit m und bringt alle Glieder auf die linke Seite, so ergibt sich

$$((2\nu-1)^2-9)m-\nu(2\nu-1)^2+4\nu^2-1\geqq 0, \tag{23}$$

und da dies für $\nu\geqq 3$ monoton in m ist und $m\geqq\nu$ ist, genügt es, (23) für $m=\nu$ zu beweisen. Dann ergibt sich aber (23) aus

$$4\nu^2-9\nu-1=3\nu(\nu-3)+\nu^2-1>0 \tag{24}$$

für $\nu\geqq 3$. Damit ist (20) bewiesen.

Was die Mittelpunkte ξ der Dreiecke dritter Klasse anbetrifft, so gilt ja die Relation (siehe Fig. 5) $\xi\leqq 1-\frac{1}{n+1}$, so daß wegen (20)

$$1-\xi\geqq\frac{1}{n+1}\geqq\frac{1}{\sqrt{Q}} \tag{25}$$

ist.

§ 6.

Eine Hilfsabschätzung eines quadratischen Ausdrucks.

Wir schieben jetzt eine Hilfsbetrachtung ein: Es seien ξ und q positive Zahlen, und wir betrachten den Ausdruck

$$q((x-\xi)^2+y^2). \tag{26}$$

Es fragt sich, für welche Werte von ξ und q dieser Ausdruck stets $\geqq 1$ ist, sobald $x^2+y^2\geqq 1$ ist. Hierzu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß der Kreis $\mathfrak{K}$

$$(x-\xi)^2+y^2-\left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^2=0 \tag{27}$$

mit dem Mittelpunkt ξ und dem Radius $\frac{1}{\sqrt{q}}$ innerhalb des Kreises (E) $x^2+y^2-1=0$ liegt. Da die Mittelpunkte beider Kreise auf der x-Achse liegen, läuft unsere Bedingung darauf hinaus, daß die beiden Schnittpunkte $x_1=\xi+\frac{1}{\sqrt{q}}$ und $x_2=\xi-\frac{1}{\sqrt{q}}$ von $\mathfrak{K}$ mit der x-Achse in E liegen, d. h. daß

$$-1\leqq\xi-\frac{1}{\sqrt{q}}<\xi+\frac{1}{\sqrt{q}}\leqq 1 \tag{28}$$

ist.

Ist insbesondere

$$\xi>0,\quad q\geqq 1, \tag{29}$$

so reduziert sich (28) auf

$$\xi+\frac{1}{\sqrt{q}}\leqq 1. \tag{30}$$

Diese Bedingung ist insbesondere in den folgenden Fällen erfüllt:

a) $$q \geqq \frac{9}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{-2}, \quad 0 < \xi < \frac{1}{3};$$

b) $$q \geqq 4 - \frac{2}{\mu}, \quad 0 < \xi \leqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2q\mu}, \qquad (\mu \geqq 1).$$

Denn in diesem Falle ist (30) wegen

$$\xi + \frac{1}{\sqrt{q}} - 1 \leqq \frac{1}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2q\mu} - \frac{1}{2} = -\frac{(\sqrt{q})^2\mu - 2\sqrt{q}\,\mu + 1}{2q\mu}$$

erfüllt, sobald die größte Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\mu x^2 - 2\mu x + 1 = 0$$

kleiner als $\sqrt{4 - \frac{2}{\mu}}$. Diese Wurzel ist aber $\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \mu}}{\mu} = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\mu}}$, so daß es genügt,

$$\sqrt{4 - \frac{2}{\mu}} > 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\mu}}, \quad 4 - \frac{2}{\mu} > 2 - \frac{1}{\mu} + 2\sqrt{1 - \frac{1}{\mu}},$$

$$2 - \frac{1}{\mu} > 2\sqrt{1 - \frac{1}{\mu}}, \quad 1 - \frac{1}{2\mu} > \sqrt{1 - \frac{1}{\mu}}$$

zu beweisen. Dies ergibt sich aber durch Quadrieren sofort.

c) $$q \geqq (n+1)^2, \quad 0 < \xi \leqq 1 - \frac{1}{n+1};$$

d) $$q = n^2 + \frac{n}{m}, \quad \xi = 1 - \frac{2mn+1}{2mn^2+2n}, \qquad (|m| \geqq 1, \ n \geqq 2).$$

Denn wir haben nur $q \geqq \frac{1}{(1-\xi)^2}$ zu beweisen, und dies reduziert sich hier auf

$$n^2 + \frac{n}{m} \geqq \left(\frac{2mn^2+2n}{2mn+1}\right)^2, \quad 1 + \frac{1}{mn} \geqq \left(1 + \frac{1}{2mn+1}\right)^2,$$

$$\frac{1}{mn} \geqq \frac{2}{2mn+1} + \frac{1}{(2mn+1)^2}, \quad \frac{1}{mn(2mn+1)} \geqq \frac{1}{(2mn+1)^2},$$

und dies ist wegen $n \geqq 2$ für $m \geqq 1$ klar, für $m \leqq -1$ aber reduziert sich dies auf

$$\frac{1}{|m|n(2|m|n-1)} \geqq \frac{1}{(2|m|n-1)^2},$$

und dies folgt aus $|m|n \leqq 2|m|n - 1$.

e) $$q = (n+1)^2 - \frac{n+1}{m}, \quad \xi = 1 - \frac{2m(n+1)-1}{2m(n+1)^2 - 2(n+1)}$$
$$(m \geqq 1, \ n \geqq 2).$$

Dies geht aus d) hervor, wenn dort m durch $-m$, n durch $n+1$ ersetzt wird.

§ 7.

Abschätzung von $|\arg\lambda(c) - \arg\lambda(c')|$, wenn c im Haupthalbstreifen, c_0 in Δ und c' in H liegt.

Wir bezeichnen von nun an den Halbstreifen $0 \leqq \Re z \leqq 1$, $\Im z > 0$ als den *Haupthalbstreifen*, ferner das Dreieck erster Ordnung H aus dem Haupthalbstreifen $(0 \leqq \Re z \leqq 1, \ |z - \frac{1}{2}| \geqq \frac{1}{2})$ als das *Hauptdreieck*.

Es sei nun $c_0 = \omega = x + iy$ ein Punkt innerhalb des Bereiches Δ:

$$0 \leqq \Re\omega \leqq 1, \quad |\omega| \geqq 1; \tag{31}$$

es sei ferner $0 < r < 1$, und c_1 der Punkt $x + iy\frac{1+r^2}{1-r^2} = x + i\eta$. Um c_1 beschreiben wir mit dem Radius $R = y\frac{2r}{1-r^2}$ eine Kreisscheibe K, die c_0 im Innern enthält. Dann ist $\eta^2 - R^2 = y^2$. Es sei c ein Punkt von K, der innerhalb eines Moduldreiecks aus dem Haupthalbstreifen liegt. Wir wollen

$$|\arg\lambda(c) - \arg\lambda(c')| \leqq (R + 2{,}5)\pi \tag{32}$$

beweisen, wo c' ein beliebiger Punkt innerhalb des Hauptdreiecks ist.

Es sei der von c_1 nach c führende Radius mit R_c bezeichnet. Dann beachte man vor allem, daß wenn R_c zwischen c_1 und c einen Kreisbogen der Modulfigur zweimal durchsetzt, dadurch kein Beitrag zur totalen Argumentvariation entsteht. Liegt c in einem Dreieck D_k k-ter Ordnung, das durch sukzessive Spiegelung aus Dreiecken D_{k-1} $(k-1)$-ter, D_{k-2} $(k-2)$-ter usw. Ordnung entsteht, so brauchen zur Abschätzung der Argumentvariation nur die Durchsetzungen durch die $k-2$ Dreiecke $D_{k-1}, \ldots, D_2$ und daneben die Argumentvariation in D_1 und D_k herangezogen zu werden. Es seien nun der Mittelpunkt und der Radius des größten Kreisbogens von D_k bzw. mit ξ, ϱ bezeichnet. Damit nun K mit diesem Kreisbogen Punkte gemeinsam hat, ist notwendig und hinreichend, daß die Radiensumme $R + \varrho \geqq$ der Mittelpunktsdistanz ist:

$$(R + \varrho)^2 \geqq (x - \xi)^2 + \eta^2, \tag{33}$$

$$2\varrho\left(R + \frac{\varrho}{2}\right) \geqq (x - \xi)^2 + \eta^2 - R^2 = (x - \xi)^2 + y^2,$$

$$\frac{1}{2\varrho} \leqq \frac{R + \frac{\varrho}{2}}{(x - \xi)^2 + y^2}, \tag{34}$$

und *diese Bedingung ist sogar für sämtliche Halbkreise der Modulfigur notwendig und hinreichend und nicht nur für diejenigen, die im Haupthalbstreifen liegen.* Ist aber insbesondere

$$\xi = \frac{1}{2n}, \qquad \varrho = \frac{1}{2n},$$

so daß wir es mit einem der im Nullpunkte berührenden Bögen zu tun haben (vgl. Fig. 4), so liefert (33)

$$\left(R+\frac{1}{2n}\right)^2 \geqq \left(x-\frac{1}{2n}\right)^2+\eta^2 = x^2-\frac{x}{n}+\frac{1}{4n^2}+R^2+y^2,$$

$$\frac{R+x}{n} \geqq x^2+y^2,$$

$$n \leqq \frac{R+x}{x^2+y^2} \leqq R+1. \tag{35}$$

Die Strecke von R_c vom Schnittpunkt mit dem Halbkreis $|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$ bis c durchsetzt nun $k-2$ Dreiecke, die in Betracht zu ziehen sind. Jeder Durchsetzung entspricht höchstens eine Argumentänderung um π, außerdem ist die Argumentänderung von c' bis zum Schnittpunkt mit 1 höchstens π und ebenso die Argumentänderung innerhalb von D_k, so daß sich ergibt

$$|\arg\lambda(c)-\arg\lambda(c')| \leqq k\pi. \tag{36}$$

Hieraus folgt *erstens* (32) für $\xi=\frac{1}{2n}$, $\varrho=\frac{1}{2n}$, $n=k-1$ wegen (35) unmittelbar.

Liegt *zweitens* c in einem der Halbkreise K_n' $(n>2)$, und zwar innerhalb eines Dreiecks D_m m-ter Ordnung, so gilt für den reziproken Durchmesser qm und den Mittelpunkt ξ der größten Seite von D_m nach Fig. 4 und nach (9)

$$\xi<\frac{1}{3}, \qquad q \geqq \left(1-\frac{1}{3}\right)^{-2}. \tag{37}$$

Da hier $\varrho=\frac{1}{2qm}$ ist, folgt aus (34)

$$m \leqq \frac{R+\frac{1}{2}}{q((x-\xi)^2+y^2)}. \tag{38}$$

Da hier aber $\xi+\frac{1}{\sqrt{q}} \leqq 1$ ist, ist nach (30) die rechte Seite von (38) $\leqq R+\frac{1}{2}$, so daß $m \leqq R+\frac{1}{2}$ ist, und daher nach (36) für $k=m$ (32) gilt.

Liegt *drittens* c innerhalb K_2', so gilt nach (10) für die größte Seite des zugehörigen Dreiecks D_m, $m-2=\mu$ gesetzt,

$$\varrho=\frac{1}{2q_1\mu}, \qquad q_1 \geqq 4-\frac{2}{\mu}, \qquad \xi \leqq \frac{1}{2}-\varrho=\frac{1}{2}-\frac{1}{2q_1\mu}. \tag{39}$$

Für dieses ϱ folgt aus (34)

$$m-2=\mu \leqq \frac{R+\frac{1}{2}}{q_1((x-\xi)^2+y^2)} \leqq R+\frac{1}{2},$$

da auch hier die Bedingung (30) nach Fall b) von § 6 für $q=q_1$ erfüllt ist.

Daher ist $m \leqq R + 2{,}5$, und damit gilt, wegen (36) für $k = m$, (32). Die Relation (32) ist offenbar auch erfüllt, wenn c in einem der beiden an den Halbkreis 1 anstoßenden Dreiecke D_1 und D_2 liegt.

Liegt allgemeiner — *viertens* — c im Bereich zwischen den Halbkreisen 1, 2 und $K_2, K_3, \ldots$ (vgl. Fig. 4), so gilt in jedem Falle (32). Denn dann kommen nur die Schnittpunkte von R_c mit den im Punkte 1 berührenden Bögen n $(n = 1, 2, \ldots)$ in Betracht, denen in der λ-Ebene Teile der *positiven* x-Achse entsprechen. Dabei wird die negative x-Achse kein einziges Mal erreicht, so daß danach auch in diesem Falle (32) richtig ist.

Es bleiben nur noch *fünftens* die Punkte c zu untersuchen, die innerhalb der Halbkreise K_n liegen. Für diese Punkte ist, da die Argumentänderung von c' bis zum Schnittpunkt von R_c mit K_n höchstens 2π ist, die Gesamtänderung des Arguments höchstens gleich $(m+2)\pi$, wo m nunmehr der *Rang* des Moduldreiecks D_n ist, in dem c liegt. (Siehe die Definition des Ranges in § 5.) Für den Radius $\varrho = \frac{1}{2Qm}$ und den Mittelpunkt ξ dieses Dreiecks gilt (34), so daß

$$m \leqq \frac{R + \frac{1}{2}}{Q((x-\xi)^2 + y^2)} \leqq R + \frac{1}{2}$$

ist, da nach (25), (20), (13), (14), (15), (16) in den Fällen c), d), e) die Bedingung (30) für $q = Q$ erfüllt ist, mag D_m 3., 1. oder 2. Klasse sein. Daher gilt (32) auch hier, und damit allgemein.

§ 8.

Abschätzung von $|\arg \lambda(c) - \arg \lambda(c')|$ für c_0 in Δ und beliebige c.

Wir behalten in diesem Paragraphen unsere Annahmen über c_0 und c' bei, dagegen soll jetzt c beliebig in K sein. Wir wollen beweisen, daß dann gilt:

$$|\arg \lambda(c) - \arg \lambda(c')| \leqq (R + 3{,}5)\pi. \tag{40}$$

Das Resultat (32) des vorigen Paragraphen gilt offenbar auch allgemeiner für jede Konfiguration c_0, c', c, die aus der dort betrachteten Konfiguration durch Spiegelung an den Geraden $\Re z = 0$, $\Re z = 1$ hervorgeht. Daraus folgt aber (40) für den Fall, daß c im Bereiche $-1 \leqq \Re c \leqq 2$ und zugleich im Kreise K liegt. Denn liegt c etwa im Streifen $-1 \leqq \Re c < 0$, so sei c_1^* der aus c_1 durch Spiegelung an der Geraden $\Re z = 0$ entstehende Punkt. Dann liegt c näher an c_1^* als an c_1, und daher sicher innerhalb des um c_1^* mit dem Radius R beschriebenen Kreises. Da der Punkt $z = i$ in den beiden Halbstreifen liegt, gilt

$$|\arg \lambda(c) - \arg \lambda(i)| \leqq (R + 2{,}5)\pi, \qquad |\arg \lambda(i) - \arg \lambda(c')| \leqq \pi,$$

woraus (40) folgt. Und analog beweist man (40), wenn c im Streifen $1 \leqq \Re z \leqq 2$ liegt.

Es sei jetzt endlich c außerhalb des Streifens $-1 \leqq \Re z \leqq 2$ gelegen. Die Strecke s von c' nach c möge X $(1 \leqq X \leqq R)$ Halbstreifen $n \leqq \Re z \leqq n+1$ voll durchsetzen, wobei $n = 0$ nicht mitgezählt wird. Ist c^* der Austrittspunkt von s aus dem letzten volldurchsetzten Streifen, so ist sicher

$$|\arg \lambda(c') - \arg \lambda(c^*)| \leqq (1+X)\pi.$$

Wir haben nur $|\arg \lambda(c^*) - \arg \lambda(c)|$ abzuschätzen. Liegt aber c in einem Moduldreieck D_m m-ter Ordnung, so ist sicher

$$|\arg \lambda(c^*) - \arg \lambda(c)| \leqq m\pi.$$

Es sei zuerst $m > 1$. Ist dann ϱ der Radius, ξ der Mittelpunkt der größten Seite von D_m, so gilt nach (34) und (6) $2\varrho \leqq \frac{1}{m-1}$, $\frac{1}{2\varrho} \geqq m-1$,

$$m - 1 \leqq \frac{R+\frac{1}{2}}{(x-\xi)^2+y^2}. \tag{41}$$

Nun gilt offenbar $(c_0 = x+iy)$

$$1 \leqq X \leqq |x-\xi|,$$

so daß aus (41), auch für $m = 1$,

$$m - 1 \leqq \frac{R+\frac{1}{2}}{X^2} \leqq \frac{R}{X^2} + \frac{1}{2}$$

folgt. Daher folgt schließlich

$$|\arg \lambda(c) - \arg \lambda(c')| \leqq \left(\frac{R}{X^2} + X + 2{,}5\right)\pi.$$

Die rechte Seite hiervon ist aber für $X = 1$ gleich $(R+3{,}5)\pi$, für $R \leqq 4$, $X \geqq 2$ höchstens gleich $\left(\frac{R}{4} + R + 2{,}5\right)\pi \leqq (R+3{,}5)\pi$, für $R > 4$ aber: für $2 \leqq X \leqq \frac{R}{2}$ höchstens gleich $\left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2} + 2{,}5\right)\pi < (R+3)\pi$, für $\frac{R}{2} < X \leqq R$ höchstens gleich

$$\left(\frac{R}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} + R + 2{,}5\right)\pi = \left(\frac{4}{R} + R + 2{,}5\right)\pi < (R+3{,}5)\pi,$$

womit (40) bewiesen ist.

Andererseits gibt es aber im Kreise K sicher einen Punkt c, so daß

$$|\arg \lambda(c) - \arg \lambda(c_1)| \geqq (R-2)\pi \tag{42}$$

ist. Denn die beiden zur x-Achse parallelen Radien von K durchsetzen wenigstens $R-2$ volle Halbstreifen $n \leqq \Re z \leqq n+1$. Sind dann c' bzw.

c'' resp. die Punkte c, in denen diese Radien den letzten volldurchsetzten Halbstreifen verlassen, so gilt offenbar

$$|\arg\lambda(c') - \arg\lambda(c_1)| \geqq (R-2)\pi,$$
$$|\arg\lambda(c'') - \arg\lambda(c_1)| \geqq (R-2)\pi,$$

und die Vorzeichen der beiden Argumentdifferenzen sind entgegengesetzt.

§ 9.

Die Abschätzung der Argumentvariation einer p-Funktion.

Ist nun $p(z)$ eine für $|z|<1$ reguläre Funktion, die im Innern des Einheitskreises nicht verschwindet und $\neq 1$ ist, und wird das Argument von $p_0 = p(0)$ etwa so gewählt, daß

$$2\pi > \arg p_0 \geqq 0$$

ist, so ist damit $\arg p(z)$ im ganzen Innern des Einheitskreises eindeutig als stetige Funktion des Ortes festgelegt.

Wir wollen nun für ein $p_0 \neq 0, \neq\infty, \neq 1$ und $r<1$ unter $\Phi(p_0, r)$ die obere Grenze von

$$|\arg p(z) - \arg p_0|$$

verstehen, für $|z| \leqq r$ und für alle Funktionen $p(z)$ mit $p(0) = p_0$, die für $|z|<1$ regulär sind und *weder verschwinden, noch den Wert* 1 *annehmen*. Offenbar gilt

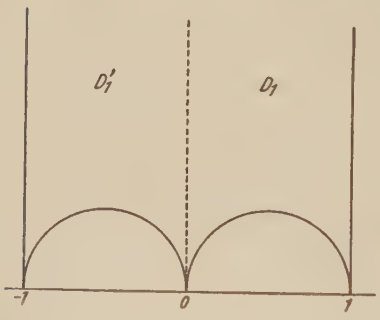


Fig. 6.

$$(43)\quad \Phi(p_0, r) = \Phi\left(\frac{1}{p_0}, r\right) = \Phi(\bar{p}_0, r).$$

Es sei zunächst $\Im p_0 \geqq 0$. Zur Abschätzung von $\Phi(p_0, r)$ machen wir Gebrauch von der Tatsache, daß $p(z)$ sich in der Form darstellen läßt

$$p(z) = \lambda(C(z)),$$

wo $C(z)$ für $|z|<1$ regulär ist und durchweg $\Im C(z) > 0$ gilt. Ist insbesondere $\Im p_0 \geqq 0$, so können und wollen wir $C(z)$ so wählen, daß $C(0) = c_0$ im Hauptdreieck $H = D_1$ der Modulfigur (Fig. 6) liegt. Dann ist $c_0 = \omega(p_0)$, wo $\omega(\lambda)$ der Zweig der Umkehrfunktion von $\lambda(\omega)$ ist, dessen Werte für $\Im\lambda \geqq 0$ im Hauptdreieck liegen, und für $\Im\lambda < 0$ innerhalb des Spiegelbildes D_1' von H in bezug auf die imaginäre Achse (Fig. 6). Für $C(z)$ gilt nun eine bekannte, im vorliegenden Zusammenhang vielfach benutzte Tatsache, daß für $|z| \leqq r$ alle Werte von $C(z)$ in einem Kreise K liegen, dessen Mittelpunkt c_1 auf derselben vertikalen Geraden liegt wie c_0, so daß

$\Re c_0 = \Re c_1$ ist, und dessen höchster und tiefster Punkte bzw. sind

$$\Re c_0 + i \Im c_0 \frac{1+r}{1-r} \quad \text{und} \quad \Re c_0 + i \Im c_0 \frac{1-r}{1+r}.$$

Dann ist der Mittelpunkt c_1 von K gleich $\Re c_0 + i \Im c_0 \frac{1+r^2}{1-r^2}$, der Radius R von K ist aber gleich $\Im c_0 \frac{2r}{1-r^2}$. Insbesondere liegt auch c_1 im Hauptdreieck H. Setzen wir also $C(z) = c$ für $|z| \leqq r$, so können auf

$$|\arg p(z) - \arg p_0| = |\arg \lambda(c) - \arg \lambda(c_0)|$$

die Abschätzungen (40), (42) angewandt werden, wenn $|c_0| = |\omega(p_0)| \geqq 1$ ist (so daß c_0 in Δ liegt), und es folgt

$$\pi\left(\Im \omega(p_0) \frac{2r}{1-r^2} - 2\right) \leqq \Phi(p_0, r) \leqq \pi\left(\Im \omega(p_0) \frac{2r}{1-r^2} + 3{,}5\right),$$

$$(44) \qquad \left|\Phi(p_0, r) - \frac{2\pi r}{1-r^2} \Im \omega(p_0)\right| \leqq 3{,}5\pi, \quad \Im p_0 \geqq 0, \quad |\omega(p_0)| \geqq 1.$$

Nun gilt aber bekanntlich $\lambda\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{\lambda(\omega)}$, so daß, wenn $|\omega(p_0)| \leqq 1$, $\left|\omega\left(\frac{1}{p_0}\right)\right| = \frac{1}{|\omega(p_0)|} \geqq 1$ ist, und wegen (43) und (44)

$$\left|\Phi(p_0, r) - \frac{2\pi r}{1-r^2} \Im \frac{-1}{\omega(p_0)}\right| \leqq 3{,}5\pi, \quad \Im p_0 \geqq 0, \quad |\omega(p_0)| \leqq 1.$$

Wegen $\Phi(p_0, r) = \Phi(\bar{p}_0, r)$ und $\Im \omega(\bar{p}_0) = \Im \omega(p_0)$ folgt endlich für alle $p_0 \neq 0, \pm 1$:

$$(45) \qquad \left|\Phi(p_0, r) - \frac{2\pi r}{1-r^2} \operatorname{Max}\left(\Im \omega(p_0), \Im \frac{-1}{\omega(p_0)}\right)\right| \leqq 3{,}5\pi < 11,$$

da aus $|\omega| > 1$ für $\Im \omega > 0$ stets $\Im \omega > \Im \frac{-1}{\omega}$ folgt.

Wie hängt nun die Größenordnung von $\Im \omega(p_0)$ mit derjenigen von $|p_0|$ zusammen? Darüber orientieren die folgenden Formeln, die über das asymptotische Verhalten von $\lambda(z)$ in den Spitzen des Hauptdreiecks bei $z = \infty$ und 0 Auskunft geben und für etwa in D_1 und D_1' (siehe Fig. 6) bleibendes z gelten:

$$\lambda(z) \sim -\frac{1}{16} e^{-\pi i z}, \quad z = x + iy, \quad y \uparrow \infty, \quad |x| \leqq 1,$$

$$\lambda(z) \sim -16\, e^{-\frac{\pi i}{z}}, \quad z \to 0.$$

Aus diesen Relationen folgt:

$$p_0 \sim -\frac{1}{16} e^{-i\pi c_0}, \qquad \omega(p_0) = \frac{\lg(-16\, p_0)}{\pi i} + \varepsilon(p_0),$$

$$\varepsilon(p_0) \to 0 \quad \text{für} \quad p_0 \to \infty;$$

$$p_0 \sim -16\, e^{-\frac{\pi i}{c_0}}, \qquad \frac{-1}{\omega(p_0)} = \frac{\lg\left(\frac{-p_0}{16}\right) + \varepsilon(p_0)}{\pi i}, \qquad \varepsilon(p_0) \to 0 \quad \text{für} \quad p_0 \to 0.$$

Für $\Im c_0$ ergibt sich in den beiden Fällen

$$(46)\qquad \begin{aligned} |\Im \omega(p_0)| &= \frac{1}{\pi} \lg |16 p_0| + \varepsilon(p_0), \\ \left| \Im \frac{1}{\omega(p_0)} \right| &= \frac{1}{\pi} \lg \left| \frac{16}{p_0} \right| + \varepsilon(p_0), \end{aligned}$$

wo $\varepsilon(p_0)$ resp. mit $p_0 \to \infty$, $p_0 \to 0$ gegen 0 konvergiert. Damit folgt aus (45):

$$(47)\qquad \Phi(p_0, r) = \frac{2r}{1-r^2} \operatorname{Max}\left(\lg(16|p_0|), \lg \frac{16}{|p_0|}\right) + \frac{r\varepsilon(p_0)}{1-r^2} + O(1).$$

Die ε-Summanden in diesen Abschätzungen sind nur von p_0 abhängige, mit $|p_0|$ oder $\frac{1}{|p_0|}$ gegen 0 konvergierende Größen.

(Eingegangen am 14. März 1932.)

The Structure of the Number of Representations Function in a Positive Binary Quadratic Form.

By

Gordon Pall,

National Research Fellow in Mathematics, the University of Chicago.

We shall investigate the structure of the arithmetic function $f(n)$ defined by the number of representations of n in any positive, binary, quadratic form f with integer coefficients. The methods developed will allow us to find simple formulæ for the number of representations in *any* such form, reducing the problem to knowing first, the structure of the discriminant under composition, and second, in which of the forms of that discriminant the various primes dividing n are represented. But there will remain essentially undisturbed the question of determining the aggregate of primes represented in a binary quadratic form except in the rare cases when the genus contains only one class or only two improperly equivalent classes.

1. Introduction.

In 1840 Dirichlet gave, for n prime to d, a simple function[1]) of the divisors of n as the number of representations $\varrho(n)$ of n by a representative set of positive, primitive, integral, binary, quadratic forms of negative discriminant d. This seems never to have been developed for n not prime to d. (For example see Theorem 64, p. 78, of L. E. Dickson's Introduction to the Theory of Numbers.) The value of $\varrho(n)$ is tabulated in section 3 for general n, together with the values of three related functions.

We shall use both of the notations $f(n)$ and $N(n=f)$ for the number of representations of n in a form f. A representative set of p. p. i. b. q. forms of discriminant d (<0) will be denoted by $f_0, \ldots, f_{h-1}$. Hence, by definition,

$$\varrho(n) = f_0(n) + \ldots + f_{h-1}(n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1}$$

[1]) Cf. 3 (6).

The number ot automorphs of a primitive f is known to be

$$(2) \qquad w=2 \text{ if } d<-4, \quad w=4 \text{ if } d=-4, \quad w=6 \text{ if } d=-3.$$

It will be proved in section 2 that $r(n)\equiv w^{-1}\varrho(n)$ is a factorable function of n.

We call a function $f(n)$ *reducible* if 1) $f(1)\neq 0$, and 2) for every prime p and integer $a>0$ there exists a number $\psi(p,a)$ such that

$$(3) \qquad f(p^a m)=\psi(p,a)f(m)$$

holds for every positive integer m prime to p. That is, $f(n)/f(1)$ is factorable. Hence $\varrho(n)$ is reducible. Unless $h=1$ the individual functions $f_i(n)$ are not reducible. But we shall find that the system $\{f_0(n),\ldots,f_{h-1}(n)\}$ is reducible according to the following natural definition: 1) $(f_0(1),\ldots,f_{h-1}(1))\neq(0,\ldots,0)$, and 2) for every prime p such that $p^2\nmid d$ and for every integer $a>0$ there exists a matrix of h^2 numbers

$$(4) \qquad \psi_{ij}(p,a) \qquad (i,j=0,\ldots,h-1)$$

such that the relations

$$(5) \qquad f_i(p^a m)=\sum_{j=0}^{h-1}\psi_{ij}(p,a)f_j(m)$$

hold for every positive integer m prime to p.

The exclusion of the finite set of primes such that $p^2\mid d$ is accompanied by even simpler reduction formulæ for $f_i(p^a m)$. For we shall see in section 5 that if f is primitive and of discriminant d and if 5 (6) holds, then, for every integer n and every m prime to p,

$$(6) \qquad f(pm)=0, \quad f(p^2 n)=g(n),$$

where g is a form of discriminant d/p^2 characterized as representing any prime which f represents.

Let f be primitive and of negative discriminant d. If $p\mid d$ but 5 (6) does not hold then Theorem 5 specifies a primitive form g of discriminant d such that

$$(7) \qquad f(pn)=g(n) \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

If $(d\mid p)=-1$ it is almost trivial that

$$(8) \qquad f(pm)=0 \quad (p\nmid m), \qquad f(p^3 n)=f(n).$$

Our principal contribution is to the case $(d\mid p)=1$. Then there is a primitive form g of discriminant d such that $g(p)>0$. Let fg denote any *form* of the class obtained by composition of f and g; g^{-1} denoting the opposite form to g let fg^{-1}, and generally $f^r g^s$, have the evident interpretation.

Then[2]*), for every integer* n,

$$f(pn)+f(n/p)=fg(n)+fg^{-1}(n). \tag{9}$$

We recapitulate: (9) holds for any primitive forms f, g of the same negative discriminant d, p being any prime not dividing d and represented in g. The proof of (9) is given in section 6.

From (9) is derived by induction on a an equivalent equation which brings out the reducibility feature, namely

$$f(p^a m)=\sum_{\alpha=0}^{a} fg^{a-2\alpha}(m), \tag{10}$$

valid for f, g, and p as in the preceding paragraph, every integer $a \geqq 0$, and every integer m prime to p.

Given the structure of $f_0, \ldots, f_{h-1}$ under composition, (10) may be expressed in the form of (5). Then the reduction formulæ may be combined to give a formula for each $f_i(n)$.

By the *exponent* of a form or class f we mean the least positive integer s such that $f^s = f_0$, where f_0 denotes the principal form or class. We may suppose the forms $f_0, \ldots, f_{h-1}$, which are an abelian group under composition, expressed in terms of a basis of independent generators $g_1, \ldots, g_r$ of respective exponents $h_1, \ldots, h_r$, where the h_j are integers >1. That is, $g_j^{h_j} = f_0$ $(j=1, \ldots, r)$, $h = h_1 h_2 \ldots h_r$, and each f_i is expressible uniquely in the form

$$g_1^{x_1} g_2^{x_2} \ldots g_r^{x_r}, \tag{11}$$

where x_j runs over a complete set of residues modulo h_j $(j=1, \ldots, r)$. The independence is included in the uniqueness, whence

$$g_1^{x_1} \ldots g_r^{x_r} = f_0 \text{ if and only if } x_j \equiv 0 \pmod{h_j} \qquad (j=1, \ldots, r). \tag{12}$$

A class of exponent 1 or 2 is an ambiguous class, and conversely. It is recalled that the number of ambiguous classes is equal to the number of genera. Hence, if each of the r generators is of exponent 2, there is but one class in each genus. The reader may examine for himself this simplest of all cases. The reduction formula (10) for $(d|p)=1$ becomes

$$\begin{aligned} f(p^a m) &= (a+1) f(m) && (a \text{ even}), \\ &= (a+1) fg(m) && (a \text{ odd}), \end{aligned}$$

p being represented in the form g.

We shall use the term "n semi-prime to d" to mean n divisible by no prime p satisfying 5 (6). Then $r(n)$ is given by 3 (6).

---

[2]) $f(n/p)=0$ if $p \nmid n$.

We shall now give the final formulæ for n semi-prime to d in the two simplest cases with more than one class in each genus.

I) Case $h = 3$. — There is one genus. The classes may be represented by the principal form g^0 and two opposite forms g^1 and g^2. For example if $d = -44$ we can take

$$(13)\quad g^0 = x^2 + 11y^2,\quad g^1 = 3x^2 + 2xy + 4y^2,\quad g^2 = 3x^2 - 2xy + 4y^2.$$

Further examples occur for $d = -P$, $P = 23, 31, 83, 107, \ldots$; $d = -4P$, $P = 11, 19, 23, 27, 31, 43, 67, \ldots$.

Trivially, $g^1(n) = g^2(n)$. Write

$$(14)\qquad n = n_0 p_1^{a_1} \ldots p_v^{a_v}$$

where the p_i are the various distinct primes dividing n and represented by g^1, $v \geqq 0$. Let j_i denote the least absolute residue of $a_i + 1 \pmod 3$, that is: $a_i + 1 = 3\alpha_i + j_i$; $j_i = -1, 0$, or 1; $(i = 1, \ldots, v)$. Then (§ 9) if n is semi-prime to d,

$$(15)\qquad g^0(n) = \frac{2}{3} r(n) \left\{ 1 + 2 \prod_{i=1}^{v} \frac{j_i}{a_i + 1} \right\},$$

while $g^1(n) = r(n) - \frac{1}{2} g^0(n)$. In example (13), (15) holds if n is odd, $N(n = x^2 + 11y^2) = g^0(n)$, $r(n) = r(n, -44)$.

II) Case of a single generator, of exponent 4. Then $h = 4$ and the forms are representable as g^0, g^1, g^2, g^3. There are two genera since there are two ambiguous classes. The principal genus consists of g^0 and g^2.

For example, if $d = -56$, we can take

$$(16)\qquad \begin{aligned} g^0 &= x^2 + 14y^2, & g^1 &= 3x^2 + 2xy + 5y^2, \\ g^2 &= 2x^2 + 7y^2, & g^3 &= 3x^2 - 2xy + 5y^2. \end{aligned}$$

Other examples occur for $d = -39, -55, -63, -68, \ldots$.

Trivially, $g^1(n) = g^3(n) = \frac{1}{2}\{1 - (-1)^w\} r(n)$, where w denotes the number of components p^a in n with $g^1(p) > 0$ and a odd. If $w > 0$, then

$$(17)\qquad g^0(n) = g^2(n) = \frac{1}{2}\{1 + (-1)^w\} r(n).$$

But if $w = 0$ define also t as the number of components p^a with $g^2(p) > 0$, a odd; u as the number of components p^a with $g^1(p) > 0$, $a \equiv 0 \pmod 4$; v as the number with $g^1(p) > 0$, $a \equiv 2 \pmod 4$; and $p_1^{a_1}, \ldots, p_{u+v}^{a_{u+v}}$ as the components p^a with $g^1(p) > 0$, a even: then

$$(18)\qquad g^0(n) = \left\{ 1 + \frac{(-1)^{t+v}}{(a_1 + 1) \ldots (a_{u+v} + 1)} \right\} r(n),$$

while $g^2(n) = 2r(n) - g^0(n)$.

The results of section 12 are of special interest. They furnish the means of solution to such problems as determining all numbers represented only in a given form of discriminant d assuming a knowledge of the primes represented in each of the forms. In section 13 we find cases in which $f(n)$ is of the form $cr(n)$, c constant, for special linear forms of n.

2. Factorability.

Sections 2 and 3 are devoted to the function

$$r(n) = r(n, d) = \frac{1}{w}\{f_0(n) + \ldots + f_{h-1}(n)\}, \tag{1}$$

and three analogous functions, where w was defined in 1(2). For uniformity we define the symbol $M(n = f)$, where f is a binary form, to mean $N(n = f)$ unless f is equivalent to one of $a(x^2 + xy + y^2)$, $a(x^2 + y^2)$, and then to denote $\frac{1}{3}N(n = f)$, $\frac{1}{2}N(n = f)$ respectively. Let $f_0, \ldots, f_{h-1}, \ldots, f_{H-1}$ be a representative system (a single form from each class) of positive, integral, binary, quadratic forms of discriminant d. Then

$$r(n) = \frac{1}{2}\sum_i M(n = f_i) \qquad (i = 0, \ldots, h-1).$$

Write also

$$R(n) = \frac{1}{2}\sum_j M(n = f_j) \qquad (j = 0, \ldots, H-1).$$

Theorem 1. *$r(n)$ and $R(n)$ are factorable functions of n.*

We need an obvious lemma:

Lemma 1. If $\varphi(n)$ is a factorable function of n the same is true of $\psi(n) \equiv \sum \varphi(n/q^2)$, summed for the square divisors q^2 of n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. In fact

$$\psi(n) = \prod[\varphi(p^a) + \varphi(p^{a-2}) + \ldots], \tag{2}$$

where $n = \prod p^a$ in powers of distinct primes.

Now write $M'(n = f)$ for the number of proper representations of n in f, unless f is equivalent to $a(x^2 + xy + y^2)$ or $a(x^2 + y^2)$, and then for $\frac{1}{3}$ or $\frac{1}{2}$ this number respectively. Hence

$$M(n = f) = \sum_{q^2 \mid n} M'(n/q^2 = f). \tag{3}$$

Summing both for f_i and f_j and using lemma 1 we see that Theorem 1 follows from

Theorem 2. *$r'(n)$ and $R'(n)$ are factorable functions, where*

$$r'(n) = \frac{1}{2}\sum_i M'(n = f_i), \qquad R'(n) = \frac{1}{2}\sum_j M'(n = f_j). \tag{4}$$

By Theorem 59 of Dickson's *Introduction*[3]), first, for any discriminant $d<0$, $R'(n)$ is equal to one half the number of integers $y \pmod{4n}$ satisfying

$$y^2 \equiv d \pmod{4n}; \tag{5}$$

second, $r'(n)$ is equal to one half the number of integers $y \pmod{4n}$ satisfying

$$y^2 \equiv d \pmod{4n}, \quad \text{g. c. d. of } y, n, (y^2-d)/(4n) \text{ is } 1. \tag{6}$$

Hence let m, n be relative prime positive integers, m odd. We can choose integers A, B so that

$$4An \equiv 1 \pmod{m}, \qquad Bm \equiv 1 \pmod{4n}. \tag{7}$$

Every solution $z \pmod{4mn}$ of $z^2 \equiv d \pmod{4mn}$ is obtained once and only once from $z = 4Anx + Bmy$, as $x \pmod{m}$ and $y \pmod{4n}$ run through all solutions of $x^2 \equiv d \pmod{m}$ and $y^2 \equiv d \pmod{4n}$. Replacing x by $x+m$ if necessary we can suppose that x runs through one half the solutions of $x^2 \equiv d \pmod{4m}$. Hence $R'(mn) = R'(m)R'(n)$.

Write

$$4mns = z^2 - d, \qquad 4mq = x^2 - d, \qquad 4nr = y^2 - d.$$

Then

$$s = 2ABxy + 16A^2nq + B^2mr + dE/(4mn), \tag{8}$$

where $E = 16A^2n^2 + B^2m^2 - 1$. By (7), E is divisible by both the relative prime numbers $m, 4n$. By (7), (8), and $z = 4Anx + Bmy$ it is easy to verify that z, mn, s, and d have no common prime factor if and only if this is true of both the quadruplets

$$x, m, q, \text{ and } d; \qquad y, n, r, \text{ and } d.$$

Hence $r'(mn) = r'(m)r'(n)$, completing the proof of Theorem 2.

3. Evaluation of, and relations among $r(n)$, $R(n)$, $r'(n)$, $R'(n)$.

It suffices to find the values when $n = p^a$, where p is a prime $\geqq 2$, and a is an integer $\geqq 1$. Evidently $r(1) = \ldots = R'(1) = 1$. Since the value of $R'(p^a)$, as one half the number of solutions of 2(5) for $n = p^a$, is well known, and the others are related to it in the following fashion, we need not give the details of the calculation. It is evident that

$$r'(p^a) = R'(p^a), \qquad r(p^a) = R(p^a) \qquad (\text{if } p \nmid d). \tag{1}$$

Let α denote the greatest integer $\leqq \frac{1}{2}a$. As in lemma 1,

$$r(p^a) = r'(p^a) + r'(p^{a-2}) + \ldots + r'(p^{a-2\alpha}), \tag{2}$$

[3]) L. E. Dickson, Introduction to the Theory of Numbers, 1930.

and similarly for R. Finally, it is easy to see that

(3) $r'(p^a)=R'(p^a)-p^{-1}R'(p^{a+1})$, $r(p^a)=R(p^a)-p^{-1}[R(p^{a+1})-1]$ if $p|d$.

I) $d\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,8)$, $p=2$; or $(d|p)=1$, $p>2$:

$$r(p^a)=R(p^a)=a+1; \quad r'(p^a)=R'(p^a)=2.$$

II) $d\equiv 5\,(\mathrm{mod}\,8)$, $p=2$; or $(d|p)=-1$, $p>2$:

$$r(p^a)=R(p^a)=\tfrac{1}{2}\{1+(-1)^a\}; \quad r'(p^a)=R'(p^a)=0.$$

From I and II we shall now deduce the familiar formula for $r(n)$ when n is prime to d. We use the Kronecker symbol $(d|p)$. Hence, in I and II,

(4) $$r(p^a)=1+(d|p)+\ldots+(d|p)^a.$$

If $d<-4$, and n is prime to d,

$$\begin{aligned}\varrho(n)=2\,r(n)&=2\prod r(p^a)\\&=2\prod\{1+(d|p)+\ldots+(d|p)^a\}\\&=2\sum(d|\nu),\end{aligned}$$

where p^a ranges over the primary components of n, and ν over all positive divisors of n. From III, IV, VI and VII below it follows that, if $d=p^cD$, $c\geqq 1$, and $p\nmid D$, then (4), which is now $r(p^a)=1$, still holds if and only if:

(5) $p>2$, $c=1$; $p=2$, $c=3$; $p=2$, $c=2$, $D\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)$;

or

$$p=2,\ c=2,\ D\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,8),\ a=2.$$

Hence the formula

(6) $$r(n)=\sum_{\nu|n}(d|\nu)$$

is true if merely n is not divisible by any odd primes p such that $p^2|d$, or by 2 if $d\equiv 0$ or $4\,(\mathrm{mod}\,16)$; except, as to the last condition, that n may be $\equiv 4\,(\mathrm{mod}\,8)$ if $d\equiv 4\,(\mathrm{mod}\,32)$.

Corollary: (6) holds for all integers n if and only if d is a fundamental discriminant, that is

(7) $p^2|d$ for no odd p, and $d\not\equiv 0$ or $4\,(\mathrm{mod}\,16)$.

In III, ..., IX, α and γ denote the greatest integers $\leqq\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}c$ respectively. In III, ..., VI, $d=2^cD$, D odd, $c\geqq 2$. In VII, VIII and IX, $p>2$, $d=p\,D$, $p\nmid D$, $c\geqq 1$. In each case we list only those values of $r(p^a)$, $R(p^a)$, $r'(p^a)$, $R'(p^a)$ which are >0. Hence all further values

in each division are zero. As frequently, $\zeta_1(n)$ denotes the sum of the positive divisors of n.

III) c odd, $(p=2)$:

$r : 2^\alpha$ if $a \leqq c-3$, a even; $2^{\gamma-1}$ if $a \geqq c-3$;
$R : \zeta_1(2^\alpha)$ if $a \leqq c-2$; $\zeta_1(2^{\gamma-1})$ if $a \geqq c-3$;
$r' : 2^\alpha$ if $a = c-2$; $2^{\alpha-1}$ if $a \leqq c-3$, a even;
$R' : 2^\alpha$ if $a \leqq c-2$.

IV) c even, $D \equiv 3 \pmod 4$, $(p=2)$:

Replace c by $c+1$, γ by $\frac{1}{2}c$ in the four lines of III.

V) c even, $D \equiv 5 \pmod 8$, $(p=2)$:

$r : 2^\alpha$ if $a \leqq c-2$, a even; $3 \cdot 2^{\gamma-1}$ if $a \geqq c$, a even;
$R : \zeta_1(2^\alpha)$ if $a \leqq c$; $\zeta_1(2^{\gamma-1})$ if $a > c$, a odd; $\zeta_1(2^\gamma)$ if $a \geqq c$, a even;
$r' : 2^\alpha$ if $a = c$; $2^{\alpha-1}$ if $a \leqq c-2$, a even;
$R' : 2^\alpha$ if $a \leqq c$.

VI) c even, $D \equiv 1 \pmod 8$, $(p=2)$:

$r : 2^\alpha$ if $a \leqq c-2$, a even; $(a-c+1)2^{\gamma-1}$ if $a \geqq c$;
$R : \zeta_1(2^\alpha)$ if $a \leqq c$; $(a-c)2^\gamma + \zeta_1(2^\gamma)$ if $a \geqq c$;
$r' : 2^{\alpha-1}$ if $a \leqq c-2$, a even; 2^γ if $a > c$;
$R' : 2^\alpha$ if $a \leqq c$, $2^{\gamma+1}$ if $a > c$.

VII) c odd:

$r : p^\alpha$ if $a < c$, a even; p^γ if $a \geqq c$;
$R : \zeta_1(p^\alpha)$ if $a \leqq c$; $\zeta_1(p^\gamma)$ if $a \geqq c$;
$r' : p^\alpha$ if $a = c$; $p^\alpha - p^{\alpha-1}$ if $a < c$, a even;
$R' : p^\alpha$ if $a \leqq c$.

VIII) c even, $(D|p) = -1$:

$r : p^\alpha$ if $a < c$, a even; $p^\gamma + p^{\gamma-1}$ if $a \geqq c$, a even;
$R : \zeta_1(p^\alpha)$ if $a \leqq c$; $\zeta_1(p^\gamma)$ if $a \geqq c$, a even; $\zeta_1(p^{\gamma-1})$ if $a \geqq c$, a odd;
r' and R' as in VII.

IX) c even, $(D|p) = 1$:

$r : p^\alpha$ if $a < c$, a even; $(a-c+1)(p^\gamma - p^{\gamma-1})$ if $a \geqq c$;
$R : \zeta_1(p^\alpha)$ if $a \leqq c$; $(a-c)p^\gamma + \zeta_1(p^\gamma)$ if $a > c$;
$r' : p^\alpha - p^{\alpha-1}$ if $a < c$, a even; $p^\alpha - 2p^{\alpha-1}$ if $a = c$; $2p^\gamma - 2p^{\gamma-1}$ if $a > c$;
$R' : p^\alpha$ if $a \leqq c$, $2p^\gamma$ if $a > c$.

In calculating $r(n)$ it is simplest to multiply together the values $r(p^a)$. These values are 0, 1, or $a+1$, in accordance with I, II, and (4), unless p satisfies 5 (6) below. Then the values may be read from the suited case III, ..., IX.

It is useful to note that

$$(8) \qquad \begin{aligned} r(2^a) &= 0 \quad \text{if} \quad d = 4D,\ D \equiv 5 \pmod 8,\ a \text{ odd};\\ &= 3 \quad \text{if} \quad d = 4D,\ D \equiv 5 \pmod 8,\ a \text{ even and } > 0. \end{aligned}$$

We close this section with a definition. A function $f(n)$ is said to behave like $r(n)$ for p^a if, for every integer m prime to p,

$$(9) \qquad f(p^a m) = r(p^a) f(m).$$

(See Section 12.)

4. Representation of a prime or a product of two primes.

In this section, d is fixed, < -4, and $\equiv 0$ or $1 \pmod 4$; p, q denote distinct primes; g and h designate forms of discriminant d representing p and q respectively; G and H are the classes of forms equivalent respectively to g and h; G^{-1} and H^{-1} are the inverse classes.

It is known[4]) that a prime p is represented by at most one class G of discriminant d and its inverse class G^{-1}; that, if p and q are as above, the only classes which represent pq are

$$(1) \qquad GH,\ GH^{-1},\ G^{-1}H,\ G^{-1}H^{-1}$$

(under composition in the ordinary sense). If $p \mid d$, G is ambiguous, that is $G = G^{-1}$.

By the preceding section $2r(p)$ has the value 0 if $(d \mid p) = -1$ or 5 (6) holds, 4 if $(d \mid p) = 1$, 2 if $p \mid d$ and not 5 (6); and $2r(pq) = 8$ if $(d \mid p) = (d \mid q) = 1$.

Theorem 3. *If* $(d \mid p) = 1$ *and* $f(p) > 0$, *then*

$$(2) \qquad \begin{cases} f(p) = 4 \text{ or } 2 \text{ according as } f \text{ is equivalent to an ambiguous form} \\ \text{or not.} \end{cases}$$

If $(d \mid p) = (d \mid q) = 1$, *and* G, H, g, h *are as above, let* f *denote any form of the product class* GH. *Then*

$$(3) \qquad \begin{cases} f(pq) = 8, 4, \text{ or } 2 \text{ according as } GH \text{ coincides with all, just} \\ \text{one, or none of the classes } GH^{-1},\ G^{-1}H,\ G^{-1}H^{-1}. \end{cases}$$

We shall use Dickson's Theorem 59 (*loc. cit.*) in the proof. Accordingly if $(d \mid p) = 1$ every form representing p is equivalent to one or both of

$$(4) \qquad g = [p, x, \ldots], \quad g' = [p, 2p - x, \ldots],$$

[4]) These facts are included in the value of $r(p)$ given next, and (2).

and according as $g \sim g'$ or not the number of representations is 4 or 2. Here x is either root of

$$x^2 \equiv d \pmod{4p} \qquad (0 \leqq x < 2p). \tag{5}$$

Hence (2) follows.

Similar facts hold for $h = [q, y, \ldots]$, $h' = [q, -y, \ldots]$, where

$$y^2 \equiv d \pmod{4q} \qquad (0 \leqq y < 2q). \tag{6}$$

We can suppose without loss of generality that p is odd. Write $z = 4Aqx + Bpy$, where A, B are integers such that

$$4Aq \equiv 1 \pmod{p}, \qquad Bp \equiv 1 \pmod{4q}.$$

Then $z \equiv x \pmod{2p}$, $z \equiv y \pmod{2q}$ whether d is odd or even. Hence by parallel transformations,

$$g \sim [p, z, \ldots], \qquad h \sim [q, z, \ldots],$$

where the third coefficients are of the forms qC, pC respectively. By composition $gh \sim f$ where

$$f = [pq, z, C],$$

and f is a form belonging to GH. Similarly GH^{-1}, $G^{-1}H$, $G^{-1}H^{-1}$ contain the forms $[pq, 4Aqx - Bpy, \ldots]$, $[pq, -4Aqx + Bpy, \ldots]$, $[pq, -4Aqx - Bpy, \ldots]$. But (Cf. Section 2) the middle coefficients of these four forms are all incongruent mod $2pq$, and hence are congruent mod $4pq$ to the four solutions z of

$$z^2 \equiv d \pmod{4pq} \qquad (0 \leqq z < 2pq). \tag{7}$$

Thus (3) also follows from Theorem 59. For two representations of pq are associated with each root of (7).

5. Reduction formulæ for primes dividing d.

These are relatively simple. Consider the equation

$$ax^2 + bxy + cy^2 = pn, \tag{1}$$

where $d = b^2 - 4ac$, $d < 0$, $p \mid d$, g. c. d. of a, b, c is 1. Then p does not divide a or c, say $p \nmid a$. Postponing the case $p = 2$ we write (1) in the equivalent form

$$(2ax + by)^2 - dy^2 = 4apn, \tag{2}$$

and conclude that

$$x = -Aby + pX \qquad (X \text{ integral}),$$

where A is chosen so that $2aA \equiv 1 \pmod{p}$. Hence the number ν of solutions (x, y) of (1) is equal to the number of solutions (x, y) of

$$g(x, y) = n, \tag{3}$$

where g is the following form of discriminant d:

$$g = [ap, bQp, R], \tag{4}$$

where $2aA - 1 = Qp$, $aA^2b^2 - Ab^2 + c = pR$.

Since $p \nmid a$ we verify that $p \mid R$ (so that g is not primitive) if and only if $p^2 \mid d$.

Now let $p = 2$. Hence b is even, and either a or c is odd, say a. Then (1) implies $x \equiv cy \pmod 2$. Hence in the preceding discussion g is replaced by

$$g = \left[2a, b, \tfrac{1}{2}c\right] \quad \text{or} \quad g = \left[2a, 2a + b, \tfrac{1}{2}(a + b + c)\right] \tag{5}$$

according as c is even or odd.

It is easily verified that g is not primitive, that is that 4 divides that one of c, $a + b + c$ which is even, if and only if $d \equiv 0$ or $4 \pmod{16}$.

Theorem 4. *Let f be a positive primitive form of discriminant $d < 0$. Let p be a prime such that either*

$$p^2 \mid d \text{ and } p > 2, \quad \text{or} \quad p = 2 \text{ and } d \equiv 0 \text{ or } 4 \pmod{16}. \tag{6}$$

Then $f(pm) = 0$ for every m prime to p. Let h denote any primitive form of discriminant d/p^2 and representing any prime represented by f.[5]) *Then, for every integer n,*

$$f(p^2 n) = h(n). \tag{7}$$

Theorem 5. *Let f be a positive primitive form of discriminant $d < 0$, and let the prime p divide d but not satisfy (6). Then there exists a primitive ambiguous class C of forms of discriminant d representing p. Let F denote the class of forms equivalent to f. Let g denote a form of the class CF or CF^{-1}. Then, for every integer n,*

$$f(pn) = g(n). \tag{8}$$

In Theorem 4, h is plainly any form equivalent to $[a, bQ, R/p]$ if $p > 2$, or $\left[a, \tfrac{1}{2}b, \tfrac{1}{4}c\right]$ or $\left[a, a + \tfrac{1}{2}b, \tfrac{1}{4}(a + b + c)\right]$ if $p = 2$. But a may be chosen as any prime distinct from p and represented by f. By the preceding section this prime determines the class of h (or its inverse)[6]).

---

[5]) Or representing 1 if f is the principal form.

[6]) This uncovers a rather surprising situation relating forms of discriminant d and d/p^2 as to the primes represented thereby. Namely, to each primitive form φ of discriminant d/p^2 corresponds a set of one or more primitive forms $\psi_1, \ldots, \psi_r$ of discriminant d such that the class of primes represented by φ is the logical sum of the classes of primes represented by $\psi_1, \ldots, \psi_r$, except that φ in addition may represent p.

In Theorem 5 the class of g may readily be established by composition of the forms $[a, -bQp, Rp]$ (equivalent to f), and $[p, bQp, Ra]$. It is also obtainable from (8) as a functional equation, a solution of which has been shown to exist, and the considerations of the preceding section.

Repeated application of (8) gives

Theorem 5′. *With the hypotheses and notations of Theorem* 5, *the equation*

$$f(p^a m) = f(m) \tag{9}$$

holds for every integer m *prime to* p, *if and only if* 1) a *is even, or* 2) a *is odd and* p *represented in* 1 *or* F^2. *If* a *is odd, and* p *is not represented in* 1 *or* F^2,

$$f(p^a m) = g(m), \tag{10}$$

where g *belongs to* CF *or the inverse class.*

6. Reduction formulæ for primes not dividing d.

It is trivial that if $(d|p) = -1$,

$$f(p^{2\alpha+1} m) = 0, \quad f(p^{2\alpha} m) = f(m) \qquad (p \nmid m). \tag{1}$$

Throughout the rest of this section, d is a given integer < 0, $d \equiv 0$ or $1 \pmod 4$, and p, q are primes such that $(d|p) = (d|q) = 1$. Forms are designated by the letters f, g, φ, ψ; classes of forms by F, G, H; the inverse classes by F^{-1}, G^{-1}, H^{-1}. All forms are positive, primitive, and of discriminant d. G^r will denote the rth power under composition of G for every integer r. The principal class is denoted by 1. The exponent of G is the least positive integer s such that

$$G^s = 1. \tag{2}$$

Our first object is to prove formula (9) of Section 1. The proof uses, of previous sections, only Theorem 3.

Theorem 6. *Let* $f = [a, b, c]$, $d = b^2 - 4ac < 0$, $a > 0$, p *any prime not dividing* a *such that* $(d|p) = 1$, f *primitive. Let* m_1, m_2 *be the two*[7]) *roots of*

$$am^2 + bm + c \equiv 0 \pmod p \qquad (0 \leqq m < p). \tag{3}$$

Let $f_i = [ap, 2am_i + b, p^{-1}(am_i^2 + bm_i + c)]$ $(i = 1, 2)$. *Then the* f_i *are of discriminant* d *and primitive. Also*

$$f(pn) + f(n|p) = f_1(n) + f_2(n) \tag{4}$$

for every integer n.

---

[7]) It is easy to see that, with our hypotheses, $m_1 \neq m_2$.

For let ν be the number of solutions (x, y) of

$$ax^2+bxy+cy^2=pn \qquad (p \nmid y). \tag{5}$$

Every solution satisfies one and only one of the conditions $x \equiv m_1 y$, $x \equiv m_2 y \pmod p$. On the one hand, $\nu = f(pn) - f(n/p)$, and on the other $\nu = \nu_1 + \nu_2$, where

$$\begin{aligned}\nu_i &= N[pn = a(pX+m_iy)^2+b(pX+m_iy)y+cy^2;\ p \nmid y] \\ &= N[n = apX^2+(2am_i+b)Xy+p^{-1}(am_i^2+bm_i+c)y^2] \\ &\quad - N[n/p = a(X+m_iy)^2+b(X+m_iy)y+cy^2].\end{aligned}$$

Hence (4) is clear.

We shall now show that the forms φ and ψ satisfying the functional equation

$$f(pn)+f(n/p)=\varphi(n)+\psi(n) \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{6}$$

depend only on the class F of forms equivalent to f and the class G of forms representing p.

Theorem 7. *Let $(d|p)=1$. Let F be the class of forms equivalent to the primitive form f, and G the class representing p. Then* (6) *holds with φ any form in FG and ψ any form in FG^{-1}.*

For solutions φ and ψ exist by Theorem 6. Let φ belong to class H, and let q be a prime $\neq p$ but represented by H. By (6) for $n=q$, f represents pq. Hence F is one of the classes 4 (1). Hence H is one of the classes

$$FG, \quad FG^{-1}, \quad F^{-1}G, \quad F^{-1}G^{-1}.$$

By taking the inverse classes if necessary we can suppose that each of φ, ψ belongs to one or other of the classes FG, FG^{-1}.

Suppose first F or G ambiguous. Then either $FG^{-1}=(FG)^{-1}$ or $FG^{-1}=FG$, so that the theorem is obvious: we can take $\varphi=\psi$.

Suppose second that F and G are both not ambiguous. We may suppose φ in FG (the case φ in FG^{-1} following by parity). We shall prove ψ not in FG. For F is one of the four classes 4 (1), with $H=FG$. If FG is not ambiguous F is distinct from the other three classes, since

$$F \neq F^{-1}, \quad F \neq FG^2, \quad F \neq F^{-1}G^{-2}.$$

By Theorem 3, and (6) for $n=q$, $2+0=2+\psi(q)$, whence $\psi(q)=0$, and ψ must belong to FG^{-1}. Similarly, if FG is ambiguous, $f(pq)=4$, and we get $4+0=4+\psi(q)$, with the same conclusion, q. e. d.

Recalling the notations of Section 1 we have

$$f(pn)+f(n/p)=fg(n)+fg^{-1}(n) \qquad (p \text{ in } g). \tag{7}$$

Hence we have the cases $a = 0, 1$ of

$$f(p^a m) = \sum_{\alpha=0}^{a} f g^{a-2\alpha}(m) \qquad (p \nmid m,\ p \text{ in } g). \tag{8}$$

Assuming the truth for $a = A - 1$ and A, and applying (7), we have the truth of (8) for $a = A + 1$. Hence (8) holds for every $a \geqq 0$.

Suppose we have formulæ for $f_i(n)$, $(i = 0, \ldots, h-1)$, when n is a product of primes p such that $(d|p) = 1$. Then by 6(1) and section 5, we can extend these formulæ to any n not divisible by the square of a prime satisfying 5(6) by a mere permutation of the indices i; and if n is divisible by such a square p^2 the problem reduces to that for discriminant d/p^2 and is presumably simpler. The only difficulty is therefore to combine the reduction formulæ for components p^a with $(d|p) = 1$.

The method of performing such combination illustrated in section 11 for $h = 8$ and two generators may be used in any given case. We proceed in section 8 to the development of formulæ which give a very neat solution in the cases h equal to a prime or the double of a prime. But we first interpolate a result (Theorem 8) of theoretical interest.

7. A general but unused formula.

Consider

$$n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k} n_0 \tag{1}$$

where the $p_\varkappa$ are all the distinct primes dividing n such that $(d|p_\varkappa) = 1$. Let $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$ denote primitive forms (section 4) representing $p_1, \ldots, p_k$ respectively. By 6(8), applied repeatedly,

$$f(p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k} n_0) = \sum_{\alpha_1=0}^{a_1} \ldots \sum_{\alpha_k=0}^{a_k} f \mathfrak{g}_1^{a_1-2\alpha_1} \ldots \mathfrak{g}_k^{a_k-2\alpha_k}(n_0). \tag{2}$$

In the notations of section 1, paragraph of (11), let

$$f = g_1^{x_1} \ldots g_r^{x_r}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{g}_\varkappa = g_1^{x_{1\varkappa}} \ldots g_r^{x_{r\varkappa}} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

Let $n_0 = 1$ and abbreviate

$$s_\varrho \equiv s_\varrho(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \equiv x_\varrho + \sum_\varkappa x_{\varrho\varkappa}(a_\varkappa - 2\alpha_\varkappa) \quad (\varrho = 1, \ldots, r). \tag{4}$$

Then (2) becomes

$$f(p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}) = \sum_{\alpha_1} \ldots \sum_{\alpha_k} g_1^{s_1} \ldots g_r^{s_r}(1). \tag{5}$$

Now $f_0 = g_1^0 \ldots g_k^0$ is the only class representing 1. Hence by 1(12), we have

Theorem 8. *Let $p_1, \ldots, p_k$ be distinct primes such that each $(d|p_\varkappa) = 1$. Let $a_1, \ldots, a_k$ be positive integers. Let f and $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_k$*

be given by (3) *in terms of a basis* $g_1, \ldots, g_r$ *of respective exponents* $h_1, \ldots, h_r$. *Let* $\mathfrak{g}_\varkappa(p_\varkappa) > 0$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$. *Then* $f(p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k})$ *is equal to the number of integer sets* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *satisfying the system of congruences and conditions*

$$x_\varrho + \sum_\varkappa x_{\varrho\varkappa}(a_\varkappa - 2\alpha_\varkappa) \equiv 0 \pmod{h_\varrho}, \tag{6}$$

$$(0 \leqq \alpha_\varkappa \leqq a_\varkappa; \quad \varrho = 1, \ldots, r; \quad \varkappa = 1, \ldots, k).$$

8. Case of one generator of odd exponent.

In 6(8) let g^2 be of exponent h. Then the sum of h consecutive terms at the right of 6(8) is $\varrho(m)$. Let $a + 1 \equiv j \pmod h$, and let $\operatorname{sgn} j$ denote 1, 0, or -1 according as $j > 0$, $j = 0$, $j < 0$. Then 6(8) becomes

$$f(p^a m) = \frac{a+1-j}{h}\varrho(m) + \operatorname{sgn} j \cdot \sum_{\alpha=0}^{|j|-1} f g^{|j|-1-2\alpha}(m). \tag{1}$$

Let m_0 denote a product exclusively of components p^a for which every $f_i(n)$ behaves like $r(n)$ (Theorem 16). By 3(9), $f_i(m_0) = r(m_0) f_i(1)$; hence:

$$f_0(m_0) = \varrho(m_0), \qquad f_1(m_0) = \ldots = f_{h-1}(m_0) = 0.$$

Let G denote a fixed class of exponent h. Then each class is uniquely represented by G^i, i determined $\bmod h$. Suppose that $f = G^x$, $g = G^y$. By our hypothesis on g^2, y is prime to h. Recalling that $\varrho(p^a m) = (a+1)\varrho(m)$, we obtain from (1) the equation

$$f(p^a m_0) = \frac{\varrho(p^a m_0)}{h}\left\{1 + \operatorname{sgn} j \frac{\lambda(x, y, j)h - |j|}{a+1}\right\} \tag{2}$$

where $\lambda(x, y, j)$ denotes the number of multiples of h in the sequence of $|j|$ numbers

$$x + y(|j| - 1 - 2\alpha) \quad (\alpha = 0, 1, \ldots, |j| - 1) \tag{3}$$

It is noted that λ is 0 or 1 if $|j| < h$.

Theorem 9. *Let* $p_\varkappa$, $a_\varkappa$ *be defined as in Theorem* 8, m_0 *and* G *as above. Let* x *and* $y_1, \ldots, y_k$ *be integers, each* $y_\varkappa$ *being prime to* h. *Let* f *denote a form in* G^x, $\mathfrak{g}_\varkappa$ *a form in* $G^{y_\varkappa}$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$. *Suppose* $\mathfrak{g}_\varkappa(p_\varkappa) > 0$. *Let* $j_\varkappa$ *be any residue of* $a_\varkappa + 1 \pmod h$. *Then*

$$f(n) = \frac{\varrho(n)}{h}\left\{1 + \operatorname{sgn}(j_1 \ldots j_k)\frac{\lambda(x; y_1, \ldots, y_k; j_1, \ldots, j_k)h - |j_1 \ldots j_k|}{(a_1+1)\ldots(a_k+1)}\right\}, \tag{4}$$

where $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k} m_0$ *and* $\lambda(x; y_1, \ldots, y_k; j_1, \ldots, j_k)$ *denotes the number of multiples of* h *in the sequence of* $|j_1 \ldots j_k|$ *terms*

$$x + \sum_\varkappa y_\varkappa(|j_\varkappa| - 1 - 2\alpha_\varkappa) \quad (\alpha_\varkappa = 0, 1, \ldots, |j_\varkappa| - 1, \ \varkappa = 1, \ldots, k). \tag{5}$$

This can be proved by a noteworthy induction on k, through (1) and (2).

9. Formulæ when h is an odd prime.

Let h be an odd prime. Then all the forms may be represented in powers of a single generator G^i, i determined only mod h.

Theorem 10. *If h is an odd prime, 8(4) gives the value of $f(n)$ for any n semi-prime to d.*

For there is but one genus and hence d is of the form $-4P^{2v+1}$ or $-P^{2v+1}$ where P is a prime $4w+3$. Hence the only prime dividing d and represented in some primitive form of discriminant d is P; when P is represented, $v=0$ and $f_0(P)>0$. Hence by Theorem 16 every $f_i(n)$ behaves like $r(n)$ except for the primes represented in G^y with y not divisible by h. But 8(4) takes account of all such primes.

In particular let $h=3$. If any $j_\varkappa$ vanishes, both λ and $\operatorname{sgn}(j_1\dots j_k)$ vanish. If no $j_\varkappa$ is zero we may suppose that $|j_\varkappa|=1$ $(\varkappa=1,\dots,k)$, and $\operatorname{sgn}(j_1\dots j_k)\cdot 1=j_1\dots j_k$. Then each $\alpha_\varkappa$ has the single value 0 and λ is the number of multiples of 3 in x, namely 0 if $3\nmid x$, 1 if $3\mid x$. Hence in section 1, formula (15) holds for any n semi-prime to d.

The method of evaluating λ next illustrated for $h=5$ shows the main features for any prime h.

Let $h=5$. The components with $|j_\varkappa|=1$ do not affect λ. We can suppose $1\leqq y_\varkappa<\frac{1}{2}h$. Let $p_\tau^{a_\tau}$ $(\tau=1,\dots,t)$ denote the components of n such that $a_\tau+1\equiv\pm 2 \pmod 5$ and $G^{y_\tau}(p_\tau)>0$ with $y_\tau=1$ or 2. Exclude the trivial case when some $j_\varkappa$ vanishes. Then λ is the number of multiples of 5 in the 2^t terms $x+\sum_\tau(\pm)_\tau y_\tau$ where, for each τ, $(\pm)_\tau$ takes each value ± 1. Let r values y_τ be 1 and s values 2, $r+s=t$. Hence λ is the number of multiples of 5 in the $2^r\cdot 2^s$ numbers

$$x+\Sigma(\pm)_\varrho+2\,\Sigma(\pm)_\sigma,$$

that is to say, the number of multiples of 5 in

$$x+\Big[r\,(\text{once}),\ r-2\,(r\text{ times}),\ \dots,\ r-2n\,\Big(\tbinom{r}{n}\text{ times}\Big),\ \dots\Big]$$
$$+2\Big[s\,(\text{once}),\ s-2\,(s\text{ times}),\ \dots,\ s-2n\,\Big(\tbinom{s}{n}\text{ times}\Big),\ \dots\Big].$$

Let (δ,ε) run over all integer pairs satisfying

$$x+r+2s\equiv 4\varepsilon s+2\delta r \pmod 5,\quad 0\leqq\varepsilon\leqq 4,\quad 0\leqq\delta\leqq 4.$$

Then, if $h=5$,

$$\lambda=\sum_{(\delta,\varepsilon)}\left\{\binom{r}{\delta}+\binom{r}{5+\delta}+\binom{r}{10+\delta}+\dots\right\}\left\{\binom{s}{\varepsilon}+\binom{s}{5+\varepsilon}+\binom{s}{10+\varepsilon}+\dots\right\}.$$

In particular, if $r \equiv s \equiv 0$, then $\lambda = 0$ unless $x \equiv 0$ and then $\lambda = 2^t$; if $r \not\equiv 0$, $s \equiv 0$, and δ is the unique solution of

$$x + r \equiv 2\delta r \pmod 5, \qquad 0 \leqq \delta \leqq 4,$$

then $\lambda = 2^s \left\{ \binom{r}{\delta} + \binom{r}{5+\delta} + \ldots \right\}$; and so on. Now 8(4) takes the form

$$G^x(p_1^{a_1} \ldots p_t^{a_t} \ldots p_k^{a_k} m_0) = \frac{\varrho(\ldots m_0)}{5} \left\{ 1 + \operatorname{sgn}(j_1 \ldots j_k) \frac{5\lambda - 2^t}{\Pi(a_\varkappa + 1)} \right\}.$$

10. Case of one generator of even exponent.

Let h be even and let the classes be representable by $G^0 = 1, G^2, G^4, \ldots, G^{h-2}, G, G^3, \ldots, G^{h-1}$ as powers of a single generator G of exponent h. There are then two genera, the squared classes forming the principal genus. Let f_i denote a form in G^i.

Let $\varrho_t(n)$ denote

(1) $\quad f_0(n) + f_2(n) + \ldots + f_{h-2}(n)$ or $f_1(n) + f_3(n) + \ldots + f_{h-1}(n)$

according as t is even or odd. Let m be semi-prime to d.[8]) Then it is plain by the nature of genus that, if p is represented in the principal genus,

$$\varrho_t(p^a m) = r(p^a)\, \varrho_t(m); \tag{2}$$

but if p is represented in the secondary genus,

$$\varrho_t(p^a m) = r(p^a)\, \varrho_{t+a}(m). \tag{3}$$

In the rest of this section m_0 denotes a product of components p^a for which every $f_i(n)$ behaves like $r(n)$ but p does not satisfy 5(6) (Theorem 16). Then, since $d < -4$ and m_0 is represented only in f_0,

$$\varrho_t(m_0) = \tfrac{1}{2}\{1 + (-1)^t\}\, \varrho(m_0) = \{1 + (-1)^t\}\, r(m_0). \tag{4}$$

Write $l = h$ if $\frac{1}{2}h$ is even, $l = \frac{1}{2}h$ if $\frac{1}{2}h$ is odd. Then by the preceding facts

$$\begin{aligned} f_s(m_0) &= \varrho_s(m_0) \quad \text{if} \quad s \equiv 0 \pmod l, \\ &= \quad 0 \qquad \text{if} \quad s \not\equiv 0 \pmod l. \end{aligned} \tag{5}$$

Let p be a prime such that $f_y(p) > 0$ and $(d \mid p) = 1$ where y is prime to $\frac{1}{2}h$. If $g = f_y$ in 6(8) and $f = f_x$ then the sum of $\frac{1}{2}h$ consecutive

[8]) Integers n semiprime to d are represented in at most one primitive genus of discriminant d. For this is evident by definition of genus if n is prime to d. Let then n be represented only in the genus I, and suppose $p \mid d$ but not 5(6). Then by Theorem 5, $p\,n$ is represented only in the genus $I\,C$. This proves our statement. But if n is divisible by the square of a prime satisfying 5(6) then n may be represented in more than one genus (Cf. Theorem 4).

terms is $\varrho_{x+ya}(m)$. Let a be a positive integer, and choose integers j and j' such that $a+1 \equiv j \pmod{\frac{1}{2}h}$, $a+1 \equiv j' \pmod{h}$, $jj' \geqq 0$. Then

$$(6) \qquad f_x(p^a m) = \frac{a+1-j}{\frac{1}{2}h}\varrho_{x+ya}(m) + \operatorname{sgn} j \sum_{\alpha=0}^{|j|-1} f_{x+y(|j'|-1-2\alpha)}(m),$$

since $|j'| \equiv a+1$ or $-a-1 \pmod{h}$.

Theorem 11. *Let x and $y_1, \ldots, y_k$ be integers, the $y_\varkappa$ prime to $\frac{1}{2}h$. Let $a_1, \ldots, a_k$ be positive integers, $a_\varkappa + 1 \equiv j_\varkappa \pmod{\frac{1}{2}h}$, $a_\varkappa + 1 \equiv j'_\varkappa \pmod{h}$, $j_\varkappa j'_\varkappa \geqq 0$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$. Let $p_\varkappa$ be represented in $G^{y_\varkappa}$. If $l\,(=\frac{1}{2}h)$ is odd define λ_k as the number of multiples of l in the $|j_1 \ldots j_k|$ terms*

$$(7) \qquad x + \sum_\varkappa y_\varkappa(|j_\varkappa| - 1 - 2\alpha_\varkappa) \qquad \begin{pmatrix}\alpha_\varkappa = 0, \ldots, |j_\varkappa| - 1,\\ \varkappa = 1, \ldots, k\end{pmatrix}.$$

But if $l\,(=h)$ is $\equiv 0 \pmod 4$ define λ_k as the number of multiples of h in the $|j_1 \ldots j_k|$ terms

$$(8) \qquad x + \sum_\varkappa y_\varkappa(|j'_\varkappa| - 1 - 2\alpha_\varkappa) \qquad \begin{pmatrix}\alpha_\varkappa = 0, \ldots, |j_\varkappa| - 1,\\ \varkappa = 1, \ldots, k\end{pmatrix}.$$

Then, writing $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k} m_0$, we have

$$(9) \qquad f_x(n) = \frac{\varrho_x(n)}{\frac{1}{2}h}\left\{1 + \operatorname{sgn}(j_1 \ldots j_k)\frac{\frac{1}{2}\lambda_k h - |j_1 \ldots j_k|}{(a_1+1)\ldots(a_k+1)}\right\}.$$

The proof is again by induction on k. To establish (9) for $k=1$ we set $m = m_0$ in (6). Then by (5) and the definition of $\varrho_t(m)$ we can replace $f_t(m_0)$ where $t = x + y(|j'|-1-2\alpha)$ by 0 unless t is divisible by l, and then by $\varrho_{x+ya}(m_0)$. Also, by (2) and (3), $(a+1)\varrho_{x+ya}(m_0) = \varrho_x(p^a m_0)$. Hence

$$f_x(p^a m_0) = \frac{\varrho_x(p^a m_0)}{\frac{1}{2}h}\left\{1 + \operatorname{sgn} j \frac{\frac{1}{2}\lambda_1 h - |j|}{a+1}\right\}.$$

Assume the truth of (9) for k components and substitute $m = n$ in (6). Then it is easy to complete the induction, if we note finally that the number of multiples of l in the $|j|$ sets of $|j_1 \ldots j_k|$ terms [for $\alpha = 0, 1, \ldots, |j|-1$]

$$x + y(|j'|-1-2\alpha) + \sum_\varkappa y_\varkappa(|j'_\varkappa| - 1 - 2\alpha_\varkappa)^9)$$

is precisely the value λ corresponding to $k+1$ components $p^a, p_1^{a_1}, \ldots, p_k^{a_k}$.

---

9) We can in the theorem substitute (8) in place of (7) since in that case $|j_k| \equiv |j'_k| \pmod{l}$.

We consider now the adjunction of the components p^a with p represented in the ambiguous class $G^{\frac{1}{2}h}$. If a is even,

$$f_x(p^a m) = r(p^a) f_x(m) \qquad (x = 0, \ldots, h-1).$$

Let a be odd. Then for every x,

$$f_x(p^a m) = r(p^a) f_{x+\frac{1}{2}h}(m). \tag{10}$$

If l is odd (10) remains true with f replaced by ϱ: then (9) holds true if n is of the form $p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k} m_0 m_1$, where m_1 is a product of components p^a of the type now considered. This proves

Theorem 12. *Theorem* 11 *with the preceding remark furnishes a formula for each* $f_x(n)$, *with* n *any integer semiprime to* d, *in case* $h = 2l$ *where* l *is an odd prime.*

For every integer y is either prime to $\frac{1}{2}h$ or is $\equiv 0$ or $\frac{1}{2}h \pmod h$.

In case $h = 6$ the function λ is the same as for $h = 3$ in section 9. Give the notation $f_0, f_2, f_4, f_1, f_3, f_5$ to the forms. Then if n is semiprime to d,

$$\begin{aligned} f_x(n) &= \frac{\varrho_x(n)}{3}\left\{1 + \frac{2 j_1 \ldots j_k}{(a_1+1)\ldots(a_k+1)}\right\} \qquad (x = 0, 3), \\ &= \frac{\varrho_x(n)}{3}\left\{1 - \frac{j_1 \ldots j_k}{(a_1+1)\ldots(a_k+1)}\right\} \qquad (x = 1, 2). \end{aligned} \tag{11}$$

Here the $j_\varkappa$ are each $-1, 0$, or 1, being residues of $a_\varkappa + 1 \pmod 3$, where $p_\varkappa^{a_\varkappa}$ are all the components of n with $p_\varkappa$ represented in f_1 or f_2. Example: $d = -87$; (11) holds for every n.

Next let $h = 4$. We wish to verify section 1, II. Now $j_1, \ldots, j_k$ are the residues mod 2 of the $a_\varkappa + 1$, where $p_\varkappa$ are the primes dividing n and represented in G^1. If any $a_\varkappa$ is odd, $j_\varkappa = 0$, and we have 1 (17). If no $j_\varkappa$ is zero, every $a_\varkappa$ is even, and $\varrho_0(n) = \varrho(n)$. Then we can suppose $j_\varkappa = \pm 1$, $a_\varkappa + 1 \equiv j_\varkappa \pmod 4$. Hence $\lambda = 0$ unless $4 \mid x$ and then $\lambda = 1$. The effect of a component p^a with a odd and p in G^2 is as follows, by (10):

$$f_0(p^a m) = f_2(m), \qquad f_2(p^a m) = f_0(m).$$

Hence if t is the number of such components,

$$f_x(n) = \frac{1}{2}\varrho(n)\left\{1 + (-1)^{t+\frac{1}{2}x}\frac{j_1 \ldots j_k}{\Pi(a_\varkappa+1)}\right\} \qquad (x = 0, 2).$$

11. Case $h = 8$ and two generators.

Let there be two generators G and H of respective exponents 4 and 2. Then $h = 8$. Since 1, G^2, H and G^2H are ambiguous there are four genera, whence each genus contains two classes. The principal genus consists of the square classes 1 and G^2. The remaining genera are made up respectively

of G and G^3, H and G^2H, GH and G^3H. A form in G^rH^s will be designated $f_{r,s}$. Here the first subscript may be altered mod 4 and the second mod 2.

Write $\varrho_{r,s}(m) = f_{r,s}(m) + f_{r+2,s}(m)$, which is the number of representations in the genus containing $f_{r,s}$ and $f_{r+2,s}$. Both subscripts in $\varrho_{r,s}$ may be altered mod 2. The reduction formula 6(8) for primes p in the non-ambiguous classes are as follows:

1) p in f_{10} or f_{11}, a even:

$$f_{r,s}(p^a m) = \tfrac{1}{2}a\,\varrho_{r,s}(m) + f_{r+a,s}(m);$$

2) p in f_{10}, a odd:

$$f_{r,s}(p^a m) = \tfrac{1}{2}(a+1)\,\varrho_{r+1,s}(m) = \tfrac{1}{2}\varrho_{r,s}(p^a m);$$

3) p in f_{11}, a odd:

$$f_{r,s}(p^a m) = \tfrac{1}{2}(a+1)\,\varrho_{r+1,s+1}(m) = \tfrac{1}{2}\varrho_{r,s}(p^a m).$$

The last inequality in each of 2) and 3) is evident from the first and the preceding remarks. Hence in these three respective cases

(1) $\varrho_{r,s}(p^a m) = (a+1)\,\varrho_{r,s}(m),\ (a+1)\,\varrho_{r+1,s}(m),\ (a+1)\,\varrho_{r+1,s+1}(m)$;

but if p is represented in H or G^2H, and a odd,

(2) $$\varrho_{r,s}(p^a m) = r(p^a)\,\varrho_{r,s+1}(m);$$

and if p is represented in any ambiguous class with a even or in the principal genus with any a, then

(3) $$\varrho_{r,s}(p^a m) = r(p^a)\,\varrho_{r,s}(m).$$

Theorem 13. *Let $p_1, \ldots, p_v$, where $v \geqq 0$, be distinct primes represented in f_{10} or f_{11}, and let $a_1, \ldots, a_v$ be even integers $\geqq 0$. Write*

(4) $$E = a_1 + \ldots + a_v, \quad P = (a_1+1)\ldots(a_v+1),$$

where $E = 0$ and $P = 1$ if $v = 0$. Then

(5) $$f_{r,s}(p_1^{a_1}\ldots p_v^{a_v} m) = \tfrac{1}{2}(P-1)\,\varrho_{r,s}(m) + f_{r+E,s}(m)$$

for every integer m prime to $p_1, \ldots, p_v$. But if n is divisible by any component p^a with a odd and p in f_{10} or f_{11}, then (more simply)

(6) $$f_{r,s}(n) = f_{r+2,s}(n) = \tfrac{1}{2}\varrho_{r,s}(n).$$

Here (5) is evident by repeated applications of 1).

It is now easy to adjoin primary components p^a with p represented in the ambiguous classes G^iH^j, where $(i,j) = (0,0), (2,0), (0,1), (2,1)$.

For it is plain that then

$$f_{r,s}(p^a m) = f_{r,s}(m) \cdot r(p^a) \qquad (a \text{ even}), \tag{7}$$

$$= f_{r+i,s+j}(m) \cdot r(p^a) \qquad (a \text{ odd}). \tag{8}$$

It is to be noted that the primes represented in the non-ambiguous classes can be completely specified since for these classes the genus consists of two improperly equivalent classes.

12. Reduction formulæ of a simple type.

We shall now consider relations of the type

$$f(p^a m) = r(p^a)\varphi(m) \tag{1}$$

where f and φ are primitive forms of discriminant $d < 0$.

E. Waring[10] has a theorem on the number of representations of a product of primes in $x^2 + \Delta y^2$ as dependent on the representation of the individual primes or their squares. The considerations which follow include several generalizations thereof.

Problem. *We seek all relations* (1) *holding for every m prime to p, f and φ being primitive forms of discriminant $d < 0$, $r(p^a) = r(p^a, d)$, a an integer > 0, and p a prime not satisfying* 5(6).

First, if $p \mid d$ but not 5(6), then $r(p^a) = 1$ by section 3, and by Theorem 5′, (1) holds with $\varphi = f$ unless a is odd and p is not represented in 1 or F^2, and then φ belongs to CF or CF^{-1}, where C is the (ambiguous) class of discriminant d which represents p and F is the class of forms equivalent to f. Second, if $(d \mid p) = -1$, then $\varphi = f$ for every a by 6(1) and section 3, II.

Finally, let $(d \mid p) = 1$. Then $r(p^a) = a + 1$. We require that

$$\sum_{\alpha=0}^{a} f g^{a-2\alpha}(m) = (a+1)\varphi(m) \tag{2}$$

for every m, where $g(p) > 0$. Choose m a prime represented in $fg^{a-2\alpha}$. Then φ represents m by (2). Hence each $fg^{a-2\alpha}$ $(\alpha = 0, \ldots, a)$ is equivalent properly or improperly to φ, and hence to f if a is even, to fg if a is odd; while φ coincides with f and fg respectively (or the opposite forms). If a is even $(\geqq 2)$,

$$g^{a-2\alpha} = 1 \quad \text{or} \quad f^2 g^{a-2\alpha} = 1 \qquad (\alpha = 0, \ldots, a). \tag{3}$$

Thus $g^2 = 1$ or $f^2 g^2 = 1$, $g^{-2} = 1$ or $f^2 g^{-2} = 1$. These combine as

$$g^2 = 1, \quad \text{or} \quad g^4 = 1 \quad \text{and} \quad f^2 = g^2, \tag{4}$$

---

[10] Dickson's History, vol. III, p. 5.

which evidently implies (3). If a is odd ($\geqq 1$),

$$g^{a-1-2\alpha}=1 \quad \text{or} \quad f^2 g^{a+1-2\alpha}=1 \qquad (\alpha=0,\ldots,a). \tag{5}$$

If $a=1$, (5) reduces to

$$f^2=1 \quad \text{or} \quad g^2=1. \tag{6}$$

If $a\geqq 3$, (5) reduces to

$$g^2=1, \quad \text{or} \quad f^2=1 \quad \text{and} \quad g^4=1. \tag{7}$$

Theorem 14. *If f is positive, primitive, and of discriminant $d<0$, and if $(d\,|\,p)=1$, then*

$$f(p^a m)=(a+1)f(m) \tag{8}$$

for every integer m prime to p if and only if $a(\geqq 1)$ is odd and

$$G=1, \quad \text{or} \quad G^2=1 \quad \text{and} \quad F^2=G; \tag{9}$$

or $a(\geqq 2)$ is even and

$$G^2=1, \quad \text{or} \quad G^4=1 \quad \text{and} \quad F^2=G^2. \tag{10}$$

Here G is the class of forms representing p and F is the class of forms equivalent to f.

To see (9) we have to adjoin the condition $fg=f$ or f^{-1} to (6) and (7). Conditions (6) and (7) are necessary and sufficient for

$$f(p^a m)=(a+1)fg(m),$$

where $g(p)>0$, if a is odd.

Theorem 15. *Let F denote the class of forms containing f, and let p be a prime not satisfying* 5(6). *Then $f(n)$ behaves like $r(n)$ for p^a if and only if*: 1) *a is even, and p is represented in a class G satisfying* (10); 2) *a is odd, and p is represented in the principal class, or in F^2 if F^2 is ambiguous*; (3) $(d\,|\,p)=-1$.

Theorem 16. *Let $f_0,\ldots,f_{h-1}$ be the representative system of section* 1. *The h equations*

$$f_i(p^a m)=r(p^a)f_i(m) \tag{11}$$

hold for every m prime to p, where p does not satisfy 5(6), *if and only if* 1) *a is even and p is represented in an ambiguous class, or* 2) *a is odd and p is represented in f_0, or* 3) $(d\,|\,p)=-1$.

13. Some examples of $f(n)$ simple for special n.

For some forms of n, even though there are several classes in the genus of f, $f(n)$ may be a simple divisor function of n.

First consider Theorem 4. If $h(n)$ is simple so is $f(n)$ for $n\equiv 0 \pmod p$. For example consider $d=-44$ (Section 1(14)). There is only

one class of discriminant -11, represented by $h = x^2 + xy + 3y^2$. Hence $h(n) = 2r(n, -11) = 2\Sigma(-11|\nu)$, where ν runs over the positive divisors of n. By Theorem 4,

$$N(2n = x^2 + 11y^2) = N(2n = 3x^2 + 2xy + 4y^2) = 2\Sigma(-11|\nu).$$

Here we used the fact that $1 + (-11|2) = 0$. Similarly whenever d is not a fundamental discriminant.

Second consider Theorem 5. Now g is of the same discriminant as f. But $g(n)$ may be simple, though $f(n)$ is not, when g belongs to a genus consisting of two improperly equivalent classes. For example consider again $d = -56$. In the notations of 1 (17), let p be any prime represented in g^1. Then $g^0(pn) = g^2(pn) = 0$ or $r(n)$ according as n is not or is of the type represented in the second genus.

Third consider section 8. If n is divisible by a component p^a with p represented in a class G with G^2 of exponent h and if $a + 1 \equiv 0 \pmod{h}$ then (d being < -4)

$$f_i(n) = \frac{2}{h} r(n) \qquad (i = 0, \ldots, h-1).$$

By section 10 a similar formula holds if h is even and $n = p^a m$ where p is represented in a class G with G^2 of exponent $\frac{1}{2}h$ while $a \equiv -1 \pmod{\frac{1}{2}h}$; then

$$f_i(p^a m) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{4}{h} r(p^a m) \qquad (i = 0, \ldots, h-1),$$

0 if $p^a m$ is not represented in the genus containing f_i and $4h^{-1}r(p^a m)$ if it is.

These facts by no means exhaust the possibilities. For example, for $d = -92$ and -124, $N(16m = x^2 - \frac{1}{4}dy^2) = 2r(m, \frac{1}{4}d)$, m odd.

(Eingegangen am 7. August 1931.)

Congruences stratifiables paraboliques.

Par

S. Finikoff à Moscou.

Deux congruences C et C_1 forment un couple stratifiable [1]) si chacun de leurs rayons porte les points de ∞^1 surfaces Σ dont les plans tangents passent par le rayon correspondant de la seconde. J'ai examiné [2]) les congruences stratifiables à foyers distincts. Elles font une classe de congruences spéciale, mais étendue. Les seules congruences W stratifiables sont 1° les congruences R qui font des couples stratifiables avec les congruences de même espèce, 2° les congruences appartenant à un complexe linéaire qui forment des couples stratifiables avec les congruences du même complexe et 3° les congruences W à focales réglées dont les couples contiennent une seule congruence, deux fois prise; mais il en existe une infinité d'autres, la congruence générale dépendant d'une fonction arbitraire de deux arguments.

Divers auteurs [3]) qui ont traité la question ne se sont pas occupés

[1]) La notion des couples stratifiables est introduite par M. Fubini. «Su alcune classi di congruenze di rette et sulle transformazioni delle superficie R». Annali di Mat. (4) **1** (1924), p. 241—257. La configuration a été examinée auparavant par M. Demoulin, «Sur la transformation de Guichard et sur les systèmes K». Bull. de l'Acad. de Bruxelles N. 2—3 (1919), p. 103.

[2]) «Sur les couples de congruences stratifiables»; Comptes rendus du Congrès des math. russes à Moscou 27. Avr.—4. Mai 1927, p. 234. «Sur les congruences stratifiables»; Comptes rendus Paris **185** (1927), p. 376; Rendiconti di Palermo **53** (1929), p. 313. Voir aussi «Congruences W ayant le long des rayons correspondants même complexe linéaire osculateur», Comptes rendus Paris **190** (1930), p. 999 et «Transformations des couples de congruences stratifiables», ibid. **191** (1930), p. 642.

[3]) M. Čech a examiné certains couples stratifiables dont les congruences sont conjuguées par rapport à une surface. Voir G. Fubini et E. Čech, «Geometria proiett.-differ.» Bologna 1926, p. 149. M. Alexander Cook reprend la théorie générale «Pairs of rectilinear congruences with generators in one-to-one correspondence», Transactions Amer. Math. Soc. **32** (1929), p. 31. Des cas particuliers métriques ont été examinés par L. Bianchi, «Sopra una classe di coppie di congruenze rettilinee stratificabili», Rend. Lincei (5) **33**, sem. 2 (1924), p. 369—377; «Sulle coppie di congruenze

(Voir la fin de cette note [3]) à la page suivante.)

non plus des congruences stratifiables à focales confondues dont l'étude fait l'objet du Mémoire présent.

Une congruence d'un couple stratifiable étant parabolique, l'autre l'est également et toutes les deux appartiennent à une classe de congruences tout à fait spéciale qu'on peut désigner par le nom des congruences R_0. Les foyers confondus engendrent la surface du même nom — le cas-limite des surfaces R de MM. Tzitzeica-Demoulin, les seules surfaces qui sont projectivement déformables et dont le réseau exceptionnel de la déformation dégénère en une famille des lignes asymptotiques. Elles sont caractérisées par cette propriété qu'un coefficient de l'élément linéaire projectif de M. Fubini $-\beta$ si les asymptotiques mentionnées sont les lignes $v = \text{const}$, peut être ramené par un changement convenable des paramètres à l'unité.

Quelle que soit la surface S de la classe R_0, la congruence C des tangentes aux asymptotiques mentionnées est une congruence stratifiable parabolique. La congruence C_1 qui lui correspond dans le couple de congruences stratifiable est déterminée par un système complètement intégrable avec 5 constantes arbitraires.

Soit S_1 la surface focale à deux nappes confondues de la congruence C_1. Les deux surfaces S et S_1 correspondent par leurs asymptotiques. La droite d qui joint leurs points homologues touche les deux surfaces. La congruence K, lieu des droites d, est donc une congruence W. Elle est caractérisée par ce fait que le coefficient β de l'élément linéaire projectif de M. Fubini de l'une des focales est égal au coefficient homologue de la seconde.

La congruence K établit une transformation asymptotique des surfaces R_0. La transformation K admet le théorème de permutabilité de transformations de Bianchi dans sa forme restrictive: deux transformations K étant effectuées, il existe généralement une seule surface S' déduite par une transformation K soit de la première transformée S_1, soit de la seconde S_2. Les constantes de transformation m égales, elles n'y existent pas à moins que les tangentes des asymptotiques mentionnées des deux surfaces S_1 et S_2 ne concourent, auquel cas il en existe une infinité.

Quelle que soit la surface transformée T_1, il en existe une infinité à deux paramètres dont les tangentes asymptotiques mentionnées ont un point P commun; les ∞^2 surfaces obtenues pour une même valeur de m se répartissent en ∞^1 faisceaux. Les points homologues des surfaces d'un faisceau sont situés sur une droite δ dont le foyer unique est le

---

rettilinee stratificabile», ibid. 32, sem. 2, p. 521—531 et par M. Rossinski, «Sopra una classe di coppie di congruenze rettilinee stratificabili»; Recueil Math. de Moscou 36 (1929), p. 7—32. MM. Buscheguennce et Rossinski, «Sur les couples de congruences stratifiables et sur la déformation des surfaces», ib. p 339—370.

point Q où elle coupe la tangente asymptotique mentionnée de la surface S. La surface Σ — lieu des points Q, est une surface R_0 qui correspond à la surface S par ses asymptotiques. Les surfaces Σ stratifient le couple des congruences C et C_1. Le point P engendre une surface Σ_1 qui appartient à la seconde famille des surfaces stratifiant le couple (C, C_1). La surface Σ_1 est également une surface R_0. La congruence de ses tangentes asymptotiques mentionnées forme avec celle de la surface Σ le couple stratifiable parabolique.

Les quatre surfaces S, Σ, S_1, Σ_1 forme une configuration remarquable. Elles correspondent par leurs asymptotiques. Elles déterminent un quadrilatère gauche mobile dont les sommets décrivent ces surfaces, tandis que les arêtes touchent les asymptotiques mentionnées. Les arêtes opposées engendrent des couples stratifiables paraboliques, les diagonales engendrent des congruences K dont les nappes focales sont les surfaces en jeu.

J'ai énoncée le contenu du Mémoire présent dans une note de Comptes rendus [4]).

§ 1.

Soit (x) une surface S rapportée à son réseau asymptotique et C la congruence de tangentes aux asymptotiques $v = \text{const.}$

Les quatre coordonnées projectives normalisées (x) sont les solutions du système [5])

$$x_{uu} = \beta x_v + p x, \qquad x_{vv} = \gamma x_u + q x \tag{1}$$

dont les coefficients satisfont les équations

$$\begin{gathered}(\beta_v + 2p)_v = (\beta\gamma)_u + \beta\gamma_u, \qquad (\gamma_u + 2q)_u = (\beta\gamma)_v + \gamma\beta_v, \\ (p_v + \beta q)_v + q\beta_v = (q_u + \gamma p)_u + p\gamma_u.\end{gathered} \tag{2}$$

Le rayon homologue de la seconde congruence C_1 du couple est déterminé par les points (y) et (z) dont le premier est choisi dans le plan tangent de la surface S

$$y = \xi x + \eta x_u + x_v, \qquad z = a x + b x_u + x_{uv}. \tag{3}$$

Soit $(\lambda x + x_u)$ et $(\mu y + z)$ les surfaces Σ et Σ_1 qui stratifient le couple (C, C_1). Le plan tangent de la surface Σ dans le point $(\lambda x + x_u)$ où il rencontre le rayon de la première congruence passe par le rayon (yz) de la seconde. Or le plan qui passe par la droite (yz) et par le point $(\lambda x + x_u)$ est déterminé par l'équation

$$(X, y, z, \lambda x + x_u) = 0 \tag{4}$$

---

[4]) C. r. **193** (1931), p. 812.

[5]) $(x) = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, $\quad x_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}$ etc.

où X symbolise les quatre coordonnées courantes X^1, X^2, X^3, X^4 d'un point du plan et les paranthèses désignent le déterminant du quatrième ordre dont on obtient les quatre lignes en attribuant aux lettres entre les parenthèses les quatre indices en tète.

Les plans (4) touchent leur enveloppe dans les points $(\lambda x + x_u)$. Or l'enveloppe de la famille (4) est déterminée par l'équation (4) et par deux autres qu'on obtient en la différentiant par rapport à u et à v

$$(X, y_u, z, \lambda x + x_u) + (X, y, z_u, \lambda x + x_u) + [X, y, z, (\lambda x + x_u)_u] = 0,$$
$$(X, y_v, z, \lambda x + x_u) + (X, y, z_v, \lambda x + x_u) + [X, y, z, (\lambda x + x_u)_v) = 0.$$

En y portant $X = \lambda x + x_u$ nous obtenons deux équations pour la fonction inconnue λ

$$(\lambda x + x_u, y, z, \lambda_u x + \lambda x_u + x_{uu}) = 0,$$
$$(\lambda x + x_u, y, z, \lambda_v x + \lambda x_v + x_{uv}) = 0$$

ou bien

$$\lambda_u = \lambda^2 - \lambda\eta\beta + \beta\xi - p,$$
$$\lambda_v = -\eta\lambda^2 + \lambda(\xi - b) + a. \tag{5}$$

Chaque solution du système (5) détermine une surface Σ. Comme il en existe ∞^1, le système (5) est complètement intégrable; la condition d'intégrabilité nous donne

$$\eta_u = \eta^2\beta + b - \xi,$$
$$\xi_u + \eta_v\beta - b_u = 2\xi\eta\beta - 2\eta p - \eta\beta_v + 2a, \tag{6}$$
$$a_u - \beta\xi_v = b\xi\beta - \beta\xi^2 + \xi(\beta_v + p) - bp - a\eta\beta - p_v.$$

De même, le plan tangent de la surface Σ_1 passe par la droite $(x x_u)$. L'équation du plan $(x, x_u, \mu y + z)$ étant

$$(X, x, x_u, \mu y + z) = 0,$$

son point caractéristique est déterminé par les équations

$$(X, x, x_{uu}, \mu y + z) + [X, x, x_u, (\mu y + z)_u] = 0,$$
$$(X, x_v, x_u, \mu y + z) + (X, x, x_{uv}, \mu y + z) + [X, x, x_u, \quad (\mu y + z)_v] = 0.$$

En y portant $X = \mu y + z$ nous obtenons

$$(\mu y + z, x, x_u, \mu_u y + \mu y_u + z_u) = 0,$$
$$(\mu y + z, x, x_u, \mu_v y + \mu y_v + z_v) = 0$$

ou bien

$$\mu_u = \mu^2 - \mu\eta\beta - b\beta - p - \beta_v,$$
$$\mu_v = \mu^2\eta + \mu(b - \xi) - a - \beta\gamma. \tag{7}$$

Le système (7) détermine les surfaces Σ_1 et est complètement intégrable, le nombre des surfaces étant illimité.

Nous avons donc les équations

$$\eta_u = \eta^2\beta + b - \xi,$$

$$(8)\quad \xi_u - \eta_v\beta - b_u = 2\beta\gamma - 2\eta b\beta - 2\eta p - \eta\beta_v + 2a,$$

$$a_u - b_v\beta = b\xi\beta - b^2\beta - \eta\beta^2\gamma + \xi(\beta_v + p) - bp - a\eta\beta + p_v + \beta_{vv} - (\beta\gamma)_u.$$

Les équations (6) et (8) déterminent le couple.

Les deux premières équations (6) et (8) et la différence des deux secondes nous donnent

$$(Ia)\qquad \eta_u = \eta^2\beta + b - \xi, \qquad \eta_v = \eta(b + \xi) - \gamma.$$

En les différentiant et en éliminant les secondes dérivées nous obtenons

$$(9)\quad b_v - \xi_v - b^2 + \xi^2 + \gamma_u = \eta(b_u + \xi_u - \xi\eta\beta - \eta b\beta - \eta\beta_v + 2\beta\gamma).$$

Or la différence des deux dernières équations (6) et (8), β n'étant pas nul[6]), est

$$(10)\qquad b_v - \xi_v - b^2 + \xi^2 + \gamma_u = \eta\beta\gamma.$$

En rapprochant les équations (9) et (10) nous obtenons, η n'étant pas nul[7]), la somme des dérivées $b_u + \xi_u$; la seconde équation (8) nous procure leur différence. En introduisant une nouvelle fonction m nous obtenons donc le système

$$(Ib)\qquad \xi_u = \xi\eta\beta - \eta p + a, \qquad \xi_v = m + \eta a + \xi^2 - q,$$

$$(Ic)\qquad b_u = \eta b\beta + \eta(\beta_v + p) - a - \beta\gamma, \qquad b_v = m + b^2 + \eta a + \eta\beta\gamma - \gamma_u - q.$$

La différentiation des équations (Ib) et (Ic) nous donne, les secondes dérivées éliminées, deux équations dont la différence nous permet d'obtenir la dérivée a_v, comme la troisième équation (6) nous donne a_u.

$$(Id)\qquad a_u = m\beta - bp + b\xi\beta + \xi(\beta_v + p) - \beta q - p_v, \qquad a_v = ab + a\xi + \xi\beta\gamma - \gamma p - q_u.$$

La somme des deux équations citées ainsi que le résultat d'élimination des dérivées a_u et a_v des équations (Id) donnent le système

$$(11)\qquad m_u = 0, \qquad m_v\beta + 2m\beta_v = 0$$

qui présente la condition d'intégrabilité du systeme (I).

---

[6]) Si $\beta = 0$, la surface est réglée et la congruence C dégénère.

[7]) Si $\eta = 0$, la droite (yz) intercepte le rayon homologue de la première congruence et le couple dégénère.

Les équations (11) sont satisfaites par la valeur

$$m = 0. \tag{12}$$

Le système (I) est alors complet et détermine la seconde congruence (yz) avec 4 constantes arbitraires, quelle que soit la première. Si m n'est pas nul, le système (11) nous donne comme une condition d'intégrabilité

$$(\log \beta)_{uv} = 0. \tag{13}$$

La condition (13) restreint la généralité des surfaces S. Elle est caractéristique [8]) pour les surfaces R_0.

Le choix convenable des paramètres u, v réduit β à l'unité. Les équations (11) montrent alors que m est une constante. Donc, la surface S étant une surface R_0, le système (I) détermine la seconde congruence du couple (yz) avec 5 constantes arbitraires, y compris la constante m.

§ 2.

Examinons la seconde congruence du couple C_1. Si $(y + \nu z)$ est le foyer du rayon (yz) et si la développable correspondante est caractérisée par le quotient des différentielles $du : dv$, nous avons, A et B étant des fonctions convenables, la relation

$$(y + \nu z)_u du + (y + \nu z)_v dv = Ay + Bz. \tag{14}$$

Or le système (I) nous donne le tableau des dérivées

$$\begin{aligned} &y_u = y\eta\beta + z, && y_v = y\xi + z\eta + xm, \\ &z_u = y(b\beta + \beta_v + p) + xm\beta, && z_v = y(a + \beta\gamma) + zb + x_v m. \end{aligned} \tag{15}$$

En les portant dans l'équation (14) nous obtenons

$$m(\beta\nu\, du + dv)x + m\nu\, dv\, x_u = 0. \tag{16}$$

Donc, m étant égal à zéro, le foyer est indéterminé et la congruence dégénère en une droite fixe. Les surfaces Σ sont les plans du faisceau ayant pour axe la droite en question; les surfaces Σ_1 dégénèrent en points fixes de la droite.

La constante m n'étant pas nulle, l'équation (16) nous donne

$$\nu = 0, \quad dv = 0.$$

Le foyer unique du rayon (yz) est le point (y) et $v = \text{const}$ est la développable correspondante. De plus, la différentiation du tableau (15) nous conduit aux équations

$$y_{uu} = \beta y_v + B_1 y, \quad y_{vv} = [-\gamma + 2\eta(b + \xi)]\, y_u + B_2 y, \tag{17}$$

A_i, B_i étant des fonctions qui ne nous intéressent pas.

---

[8]) Fubini-Čech, Geometria proiettiva-differenziale, Bologna 1926, p. 361.

La surface focale de la seconde congruence (y) est rapportée également aux asymptotiques et son coefficient β a la même valeur que celui de la surface (x). La surface (y) appartient donc à la même classe de surfaces R_0 caractérisée par l'équation (13).

Le point (y) est situé dans le plan tangent de la surface (x). Or le point (x) est également dans le plan tangent de la surface (y). Cela dérive immédiatement du tableau (15). La droite (xy) engendre donc une congruence K dont les focales sont les deux surfaces en question.

Comme les asymptotiques des surfaces (x) et (y) correspondent, la congruence K est une congruence W dont les nappes focales ont les deux le même coefficient β de leur élément linéaire projectif de M. Fubini.

Cette propriété caractérise les congruences en question.

Soit (x) une surface quelconque rapportée aux asymptotiques et déterminée par le système (1). Traçons par le point (x) dans son plan tangent un rayon qui touche, par exemple, la courbe $du:dv=\eta$ et soit

$$y=\xi x+\eta x_u+x_v$$

le second foyer de la droite (xy).

Le plan tangent de la surface (y) passe alors par le point (x); donc

$$(x, y, y_u, y_v)=0$$

ou en effectuant le calcul

$$\eta(\eta_u+\xi-\eta^2\beta)=\eta_v+\gamma-\xi\eta.$$

En introduisant les fonctions inconnues a, b, m nous décomposons l'équation obtenue en deux et nous obtenons deux autres du système (I)

$$\text{(Ia)} \qquad \eta_u=\eta^2\beta+b-\xi, \qquad \eta_v=\eta(b+\xi)-\gamma,$$

$$\text{(Ib)} \qquad \xi_u=\xi\eta\beta-p\eta+a, \quad \xi_v=m+\eta a+\xi^2-q$$

que nous désignons par les mêmes chiffres qu'auparavant.

Le système (Ia), (Ib) nous donne pour les dérivées y_u, y_v les expressions du tableau (15) où les coordonnées (z) sont déterminées par la formule (3).

Mettons en équation que la congruence (xy) est une congruence W c-à-d que la surface (y) est rapportée aux asymptotiques comme cela est déjà adopté pour la surface (x).

Les deux équations

$$(y\,y_u\,y_v\,y_{uu})=0, \qquad (y\,y_u\,y_v\,y_{vv})=0$$

nous donnent en vertu des équations (15) de la première ligne

$$(x\,y\,z\,z_u)=0, \qquad (x, y, z, mx_v+\eta z_v)=0$$

ou bien

$$\text{(Ic)} \qquad \begin{aligned} b_u&=\eta b\beta+\eta(\beta_v+p)-a-\beta\gamma,\\ b_v&=m+b^2+\eta a+\eta\beta\gamma-\gamma_u-q. \end{aligned}$$

Il nous reste seulement à mettre en équation que deux surfaces (x) et (y) ont le même coefficient β de l'élément linéaire projectif de M. Fubini.

Or les équations (15) nous donnent

$$y_{uu} = A_3\, y + B_3\, y_u + \frac{a_u + b\,p - b\,\xi\,\beta - \xi\,(\beta_v + p) + \beta\,q + p_v}{m}\, y_v$$

et la condition en question s'exprime par l'équation

$$(\mathrm{Id}_1) \qquad a_u = m\beta - b\,p + b\,\xi\,\beta + \xi\,(\beta_v + p) - \beta\,q - p_v.$$

En complétant le système (Ia), (Ib), (Ic), (Id_1) nous revenons au système des équations (I), (11) et (13). La congruence en jeu possède donc toutes les propriétés que nous avons mentionnées.

§ 3.

La condition (13) satisfaite, la surface S appartient à la classe de surfaces R_0 et la congruence des tangentes asymptotiques $v = \text{const}$ est stratifiable.

Par analogie, s'il y a encore

$$(13') \qquad (\log \gamma)_{uv} = 0,$$

la congruence de ses tangentes $u = \text{const.}$ l'est aussi. Les secondes congruences des deux couples ont comme focales deux surfaces différentes S_1 et S_2. Toutes les deux correspondent à la surface S par les asymptotiques et composent avec celle-ci les focales des deux congruences W. Les surfaces S et S_1 ont le coefficient β commun, les surfaces S et S_2 — le coefficient γ.

Si la surface S_1 se confond avec la surface S_2, tous les deux coefficients de son élément linéaire projectif sont égaux aux homologues de la surface S et les deux surfaces sont projectivement applicables.

J'ai examiné[9]) les congruences dont les deux nappes de la surface focale sont projectivement applicables par les points homologues et j'ai obtenu cinq classes de congruences qui possèdent la propriété en question. Les congruences de leurs tangentes asymptotiques, d'une famille et de l'autre, forment deux couples stratifiables paraboliques.

Le tableau (I) nous permet les obtenir sans difficulté.

Il dérive des équations (17) que l'égalité des coefficients γ des deux surfaces (x) et (y) s'exprime par l'équation

$$(18) \qquad \eta\,(\xi + b) - \gamma = 0.$$

[9]) «Congruences dont les deux nappes de la surface focale sont projectivemen applicables l'une sur l'autre par les points focaux correspondants», Comptes rendus 192 (1931), p. 1175, Bull. des Sciences Math. avril 1932. Je saisis l'occasion pour citer l'article de M. Čech sur ce sujet que j'ai ignoré jusqu'ici. Fubini et Čech, «Introduction à la Géométrie proj-diff. des surfaces», Paris 1931, p. 249.

En la rapprochant de l'équation (Ia_3) nous avons

$$\eta_v = 0 \tag{19}$$

et la somme des équations (Ib_1) et (Ic_1) nous donne

$$\left(\frac{\gamma}{\eta}\right)_u = 0 \tag{20}$$

d'où suit immédiatement l'équation (13′).

Choisissons les paramètres u, v de sorte que

$$\beta_v = 0, \quad \gamma_u = 0. \tag{21}$$

Les équations (11) et (20) nous donnent alors

$$m = \text{Const}, \quad \eta = \text{const}.$$

Le système (Ia) donne

$$\xi = \frac{1}{2}\eta^2\beta + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\eta} \tag{22}$$

et le système (Ib)

$$p\eta - \frac{q}{\eta} - \frac{1}{4}\eta^3\beta^2 + \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{\eta^3} + \frac{1}{2}\eta^2\beta_u - \frac{1}{2}\frac{\gamma_v}{\eta^2} = -\frac{m}{\eta}. \tag{23}$$

Différentions la par rapport à u et à v; en éliminant les dérivées de p et de q à l'aide des équations fondamentales (2) nous obtenons

$$\eta^2 = \frac{\beta\gamma_{vv}}{\gamma\beta_{uu}}. \tag{24}$$

L'équation (24) rapprochée des équations (21) donne

$$\beta_{uu} + \frac{k^2}{\eta^2}\beta = 0, \quad \gamma_{vv} + k^2\gamma = 0 \qquad (k = \text{Const})$$

d'où suit

$$\beta = c_1 \sin\frac{k}{\eta}u, \quad \gamma = c_2 \sin k v \qquad (c_i = \text{Const}) \tag{25}$$

et le système (2), (23) détermine p et q

$$\begin{aligned} 2p &= -\frac{c_1 c_2}{\eta}\cos k v \cos\frac{k}{\eta}u + \frac{1}{2}\eta^2 c_1^2 \sin^2\frac{k u}{\eta} - k c_1 \cos\frac{k}{\eta}u + C_1, \\ 2q &= -c_1 c_3 \eta \cos k v \cos\frac{k}{\eta}u + \frac{1}{2}\frac{c_3^2}{\eta^2}\sin^2 k v - \frac{k c_3}{\eta}\cos k v + C_2 \end{aligned} \tag{26}$$

$$(C_i = \text{const}),$$

L'équation (24) disparaît si

$$\beta_{uu} = 0, \quad \gamma_{vv} = 0$$

d'où

$$\beta = c_1 u + c_2, \quad \gamma = c_3 v + c_4 \qquad (c_i = \text{const}) \tag{27}$$

et

$$\begin{aligned} 4p &= \frac{c_1}{c_3}\gamma^2 + \left(\eta^2 c_1 + \frac{c_3}{\eta^2}\right)\frac{\beta^2}{c_1} + C_1, \\ 4q &= \frac{c_3}{c_1}\beta^2 + \left(\eta^2 c_1 + \frac{c_3}{\eta^2}\right)\frac{\gamma^2}{c_3} + C_2 \qquad (C_i = \text{const}) \end{aligned} \tag{28a}$$

ou

$$2p = \frac{c_2}{\eta^2} u + C_1,$$
$$2q = c_2 u + \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\eta^2} + C_2 \tag{28b}$$

si $c_1 = 0$, ou bien

$$p = C_1, \quad q = C_2 \tag{28c}$$

si $c_1 = c_2 = 0$.

Les surfaces (26) et (28a), (28b), (28c) produisent quatre classes de congruences que j'ai énoncées dans ma Note citée. La cinquième ici échappe à notre examen: les deux focales étant réglées, les couples des congruences stratifiables dégénèrent.

A chaque surface (26) est liée une seule des congruences en question; aux surfaces (28a), (28b) il s'en relie deux qui se distinguent par le signe de η, et la surface (28c) en possède une infinité, η étant une constante arbitraire.

§ 4.

Revenons aux surfaces R_0 générales. Le système (I) en établit une transformation asymptotique K. Examinons le théorème de permutabilité[10]) des transformations K.

Soit S une surface R_0, S_1 et S_2 — ses deux transformées K et S' — la transformée commune de S_1 et de S_2. Si les points homologues de S_1, S_2 et S' sont (y_1), (y_2) et (y')

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi_1 x + \eta_1 x_u + x_v, \quad & z_1 &= a_1 x + b_1 x_u + x_{uv}, \\ y_2 &= \xi_2 x + \eta_2 x_u + x_v, \quad & z_2 &= a_2 x + b_2 x_u + x_{uv}, \\ y' &= \varrho x + z_1 + \mu y_1, \end{aligned} \tag{29}$$

le point (y') est situé dans les plans tangents des surfaces S_1, S_2 et les points (y_1) et (y_2) dans le plan tangent de S'.

La première condition s'exprime par les équations

$$(y' y_1 x z_1) = 0, \quad (y' y_2 x z_2) = 0$$

d'où suit

$$\mu = -\frac{b_1 - b_2}{\eta_1 - \eta_2}. \tag{30}$$

Quant à la seconde, le plan tangent de la surface S' contenant les points (y_1), (y_2), (y') ainsi que (y_u'), (y_v'), nous l'avons dans la forme des équations

$$(y_1 y_2 y' y_u') = 0, \quad (y_1 y_2 y' y_v') = 0.$$

---

[10]) Le théorème en question établi par M. Jonas [Jahresbericht d. D. Math.-Ver. 29 (1920), p. 64] pour les surfaces R a été étendu aux transformations des surfaces R_0 par M. Čech [Fubini-Čech, Geometria diff.-proiett., Bologna 1926, p. 287].

Or la différentiation de y' nous donne à l'aide du tableau (15)

$$y'_u = (\varrho_u + m_1 - \lambda\varrho - \mu\varrho)x + \mu y' + (\lambda\mu + \theta)y_1 + \varrho\frac{y_1 - y_2}{\eta_1 - \eta_2},$$

$$(31)\quad y'_v = [\varrho_v - \varrho(b_1 + \xi_1 + \eta_1\mu - \eta_1\lambda) + m_1\mu - m_1\lambda]x + (b_1 + \eta_1\mu)y' + \\ + \left[\varrho - \eta_2(\lambda\mu + \theta] - \frac{m_1 - m_2}{\eta_1 - \eta_2}\right]y_1 + (m_1 - \eta_1\varrho)\frac{y_1 - y_2}{\eta_1 - \eta_2}$$

si nous adoptons $\beta = 1$ comme nous avons fait à la fin du § 1 et où λ et θ désignent

$$(32)\qquad \lambda = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\eta_1 - \eta_2}, \qquad \theta = \frac{a_1 - a_2}{\eta_1 - \eta_2}.$$

Donc la condition en question s'exprime par le système

$$(33)\qquad \begin{aligned} \varrho_u &= \varrho(\lambda + \mu) - m_1, \\ \varrho_v &= \varrho[b_1 + \xi_1 + \eta_1(\mu - \lambda)] - m_1(\mu - \lambda) \end{aligned}$$

qui est complètement intégrable en vertu des équations (I) et détermine ϱ avec une constante arbitraire. Les ∞^1 surfaces S' qui lui correspondent sont liées par des congruences W avec les surfaces S_1 et S_2 et constituent les quatrièmes surfaces du théorème de Bianchi sur la permutabilité des transformations asymptotiques.

Elles correspondent donc aux surfaces S, S_1, S_2 par les asymptotiques, mais les congruences $(y_1 y')$, $(y_2 y')$, étant des congruences W, ne sont pas nécessairement des congruences K. Le coefficient β de la surface S étant égal à l'unité, il a la même valeur dans les éléments linéaires projectifs des surfaces S_1, S_2. S'il a la même pour la surface S', celle-ci est une surface R_0 également et les congruences qui la lient avec les surfaces S_1, S_2 sont des congruences K.

Or la différentiation des formules (31) nous donne, B étant une fonction qui ne nous intéresse pas,

$$(y'_u - \mu y')_u + y'(\lambda\mu + \theta) + B(y'_u - \mu y') = \\ = \frac{\varrho^2 + \varrho\frac{m_1 - m_2}{\eta_1 - \eta_2} + (\lambda\mu + \theta)[(\eta_1 - \eta_2)\varrho + m_1]}{\varrho^2 - \varrho\frac{m_1 - m_2}{\eta_1 - \eta_2} + (\lambda\mu + \theta)[(\eta_1 - \eta_2)\varrho - m_1]}[y'_v - (b_1 + \eta_1\mu)y'].$$

Donc la condition en question est

$$(34)\qquad \varrho = -\frac{m_1}{m_1 - m_2}(\lambda\mu + \theta)(\eta_1 - \eta_2).$$

Cette valeur de ϱ satisfait le système (33) et détermine une seule surface R_0 déduite par une transformation K soit de la surface S_1, soit de la surface S_2.

L'équation (34) est contradictoire, donc parmi les surfaces R_0 transformées de S_1, aucune ne coïncide avec une surface R_0 transformée de

S_2 si les constantes m_1 et m_2 sont égales, à moins que le numérateur (34) ne soit nul,

$$\lambda\mu + \theta = 0 \tag{35}$$

auquel cas l'équation (34) disparaît et toutes les surfaces S' déterminées par le système (33) sont des surfaces R_0.

Or la différentiation de l'équation (35) par rapport à u et à v ne nous donne que des identités — surtout en vertu du tableau (I) et des équations (30), (32). Donc l'équation (35) est une condition imposée aux paramètres de la transformation. La signification géométrique en est bien simple: la condition (35) satisfaite, les tangentes asymptotiques mentionnées des deux surfaces correspondantes S_1 et S_2 ont un point $P(w_1)$ commun

$$w_1 = z_1 + \mu y_1 = z_2 + \mu y_2. \tag{32}$$

Quelle que soit une transformation K_1, il existe ∞^3 transformations K dont les tangentes asymptotiques $v = \text{const}$ des surfaces transformées interceptent les tangentes mentionnées homologues de la surface S_1.

Or si μ' est la fonction (30) qui correspond à la paire de transformations K_1 et K_3 de l'espèce citée, le tableau (I) donne pour la différence $\mu - \mu'$ le système

$$(\mu - \mu')_u = \mu^2 - \mu'^2 - \eta_1(\mu - \mu'),$$
$$(\mu - \mu')_v = \eta_1(\mu^2 - \mu'^2) - \xi_1(\mu - \mu')$$

qui a une solution évidente $\mu - \mu' = 0$, les constantes d'intégration choisies convenablement.

Donc à chaque point $P(w_1)$ du rayon $(y_1 z_1)$ concourent ∞^2 tangentes mentionnées des surfaces transformés S_i. Les ∞^2 surfaces S_i ainsi obtenues se répartissent en ∞^1 faisceaux. En effet les équations (Ia) nous donnent maintenant le système

$$(\eta_1 - \eta_2)_u = -(\eta_1 - \eta_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)(2\eta_1 - \lambda - \mu),$$
$$(\eta_1 - \eta_2)_v = (\eta_1 - \eta_2)^2(\mu - \lambda) + (\eta_1 - \eta_2)[b_1 + \xi_1 + \eta_1(\lambda - \mu)]$$

qui est complètement intégrable et détermine, les fonctions λ et μ données, un faisceau de surfaces S_2. Leurs points homologues (y_2)

$$y_2 = y_1 - (\eta_1 - \eta_2)w, \qquad w = \lambda x + x_u$$

sont situés évidemment sur la droite $(y_1 w)$ qui passe par le point (y_1) et coupe la tangente $(x x_u)$ au point (w).

§ 5.

Le tableau (I) nous montre que la valeur de λ donnée par la formule (32) satisfait le système (5) si toute fois on fait usage de la condition (35).

Donc, l'ensemble des surfaces (w) qui correspondent aux diverses valeurs λ coïncide avec la première famille de surfaces Σ qui stratifient le couple de congruences $(x\,x_u)$, $(y_1\,z_1)$.

De même l'ensemble des surfaces (w_1) en fait une seconde Σ_1. Pour justifier cette proposition il suffit de remarquer que l'expression (30) satisfait le système (7) de quoi on s'assure aisément en faisant usage du tableau (I) et surtout de l'équation (35).

En différentiant $w = \lambda x + x_u$ nous obtenons à l'aide des formules (5)

$$w_u = y_1 + (\lambda - \eta_1)\,w, \qquad w_v = z_1 + \lambda\,y_1 - (b_1 + \lambda\,\eta_1)\,w$$

et en faisant usage des formules (15)

$$w_{uu} = A_1\,w_u + w_v + C_1\,w, \qquad w_{vv} = A_2\,w_u + B_2\,w_v + C_2\,w$$

où les fonctions A_i, B_i, C_i ne nous intéressent pas.

La surface (w) est évidemment rapportée aux asymptotiques et le coefficient β correspondant est égal à l'unité. De plus le rayon $(w\,y_1)$ en touche l'asymptotique $v = \text{const}$. Donc il engendre une congruence parabolique stratifiable. La congruence $(w_1\,x)$ avec le point (w_1) comme foyer lui correspond dans son couple stratifiable.

En effet, en différentiant la formule (36) nous obtenons en tenant compte du tableau (15) et du système (7)

$$w_{1u} = m\,x + \mu\,w_1, \qquad w_{1v} = (b_1 + \mu)\,w_1 + m\,w + m\,(\mu - \lambda)\,x,$$
$$(w_{1u} - w_1\,\lambda)_u = m\,w - m\,\lambda\,x,$$
$$[w_{1v} - (b_1 + \mu)\,w_1]_v = -m\,(b_1 + \mu\,\eta_1)\,w + m\,w_1 + C_3\,x$$

d'où suit immédiatement que la surface (w_1) est rapportée aux asymptotiques avec le coefficient β égal à l'unité, qu'elle forme avec la surface (w) les focales de la congruence de droites qui joignent leurs points homologues et, par suite, que la congruence des droites $(w_1\,x)$ qui en touchent les asymptotiques $v = \text{const}$ fait bien un couple stratifiable avec la congruence $(w\,y)$.

Il est evident que les surfaces (x) et (y_1) présentent des échantillons des surfaces qui stratifient ce couple.

La configuration de quatre surfaces (x), (w), (y), (w_1) que nous avons obtenue est assez remarquable.

Les quatre surfaces correspondent par les asymptotiques. Le point homologue de chaque surface est situé sur la tangente à l'asymptotique $v = \text{const}$ de la surface précédente. Chaque paire de surfaces opposées compose les focales de la congruence de droites qui joignent leurs points homologues. Chaque paire de tangentes mentionnées qui n'ont pas de point commun engendre un couple stratifiable parabolique.

La configuration est caractéristique pour les couples en question comme peut voir par le théorème suivant:

Les quatre surfaces rangées en cycle dont les asymptotiques d'une famille correspondent et les tangentes correspondantes passent par les points homologues des surfaces qui les suivent dans le cycle, forment la configuration en question.

Soit (x), (w), (y) et (w_1) les quatre surfaces en jeu. Rapportons la première aux asymptotiques et adaptons pour elle les notations des équations (1). Choisissons le point (w) sur la tangente $v = \text{const}$ de la surface (x)

$$w = \lambda x + x_u. \tag{37}$$

Comme la tangente $(w w_u)$ en est située dans le plan tangent de la surface (x), nous pouvons introduire les points (y) et (w_1) par les formules (3) et (36):

$$y = \xi x + \eta x_u + x_v, \quad w_1 = \mu y + z, \quad z = a x + b x_u + x_{uv}. \tag{38}$$

Il suit de l'hypothèse du théorème les identités

$$w_u = A_1 w + B_1 y, \quad y_u = A_2 y + B_2 w_1, \quad w_{1u} = A_3 w_1 + B_3 x. \tag{39}$$

En y portant les dérivées des expressions (38), (38) nous obtenons immédiatement

$$A_1 = \lambda - \eta\beta, \quad B_1 = \beta, \quad A_2 = \beta\eta - \mu, \quad B_2 = 1, \quad A_3 = \mu$$

puis les premières équations des systèmes (5), (7), (Ia), (Ib), (Ic).

Comme les courbes $v = \text{const.}$ en sont asymptotiques, nous avons

$$(w_{uu} w_u w_v w) = 0, \quad (y_{uu} y_u y_v y) = 0, \quad (w_{1uu} w_{1u} w_{1v} w_1) = 0.$$

En y portant les expressions (39) nous obtenons

$$(w_v w y w_1) = 0, \quad (y_v y w_1 x) = 0, \quad (w_{1v} w_1 x w) = 0$$

qui se confondent, le calcul fait, avec les secondes équations (5), (7), (Ia).

Or en différentiant les équations (5) et (7) et en éliminant les secondes dérivées nous obtenons, en tenant compte du système (Ia_1), (Ib_1), les équations (6) et (8); le complétement du système obtenu nous ramène par la voie bien connue au système complet (I), (12), (13) d'où suit la proposition.

(Eingegangen am 12. Dezember 1931.)

Topologische Fragen der Differentialgeometrie. XLI*).

Ein Diagonalproblem.

Von

A. Wünsche in Hamburg.

In der 35. Arbeit dieser Reihe (Hamburg. Abhandlungen **9** (1932), S. 48) beschäftigt sich Herr W. Blaschke mit zwei Kurvenscharen und einer Flächenschar. Diese Figur, die dort kurz als (A, B, f)-Figur bezeichnet wird, steht in engem Zusammenhang mit einer eingliedrigen Schar vertauschbarer Transformationen in der Ebene. Herr W. Blaschke hat gezeigt, daß die Geschlossenheit eines bestimmten räumlichen Sechsecks, des sogenannten Bolschen Sechsecks notwendig und hinreichend dafür ist, daß die Transformation eine eingliedrige Schar ebener Translationen ist. Wir wollen uns in der vorliegenden Arbeit mit einem Viereck beschäftigen, das in mancher Hinsicht handlicher ist als das Bolsche Sechseck. Wir zeigen im ersten Paragraphen, daß dieses räumliche Viereck mit dem Bolschen Sechseck gleichwertig ist. Im zweiten Paragraphen leiten wir für das Bolsche Sechseck eine Normaldarstellung her, die also auch für das Viereck gültig ist. Mit diesem Hilfsmittel können wir dann im dritten Paragraphen das sogenannte Diagonalproblem lösen, das zuerst von Herrn Howe[1]) invariantentheoretisch und dann von Herrn Bol[2]) mehr geometrisch behandelt wurde. Hieran anschließend werden wir dann im vierten Paragraphen zeigen, daß bei dem Diagonalproblem die Existenz von drei Raumdiagonalen die Existenz der vierten Diagonale bewirkt. Der fünfte Paragraph behandelt das Diagonalproblem dann noch einmal auf einem ganz anderen Wege. Wir bringen diesen Paragraphen, da in ihm das Problem wohl auf dem bisher kürzesten Wege gelöst wird.

*) Die vorausgehenden Arbeiten unter diesem Obertitel sind in der Math. Zeitschrift **28** (1928) und (zum großen Teil) in den Abhandlungen des Math. Seminars Hamburg **6** bis **9** (1928 bis 1932) erschienen.

[1]) G. Howe, T. 20, Hamburg. Abhandlungen **8** (1930), S. 83.

[2]) G. Bol, T. 21, Hamburg. Abhandlungen **8** (1930), S. 96.

§ 1.

Das Bolsche Sechseck.

Wir interessieren uns für eine (A, B, f)-Figur, die eine Diagonalkurvenschar C besitzt. Wir nennen eine Kurvenschar C diagonal zur (A, B, f)-Figur, wenn das Viereck von Fig. 1 stets geschlossen ist. Dabei liegen die Punkte 1 und 3 in f_1, 2 und 4 in f_2. Die Seiten $\widehat{1\,2}$, $\widehat{3\,4}$ werden durch A-Kurven, die Seiten $\widehat{2\,3}$, $\widehat{1\,4}$ durch B- bzw. C-Kurven dargestellt. Aus der Existenz einer Diagonal-Kurvenschar wollen wir jetzt die Geschlossenheit eines räumlichen Sechsecks herleiten[3]). Dazu betrachten wir das geschlossene Viereck (1 2 3 4) (siehe Fig. 2). Die Punkte 1 und 3, 2 und 4 liegen in f_1 bzw. f_2. Schneiden wir dieses Viereck mit einer neuen Fläche f_2' von f, so hat das Viereck (1 2 3 4) mit f_2' vier Schnittpunkte. Diese vier Punkte $2'$, 5, $4'$ und $3''$ sind die Schnittpunkte der Seiten $\widehat{1\,2}$, $\widehat{2\,3}$, $\widehat{1\,4}$ und $\widehat{3\,4}$. Ziehen wir durch $2'$ eine B-Kurve bis $3'$ in f_1, so muß A durch $3'$ f_2' im Punkte $4'$ schneiden.

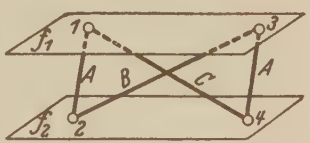


Fig. 1.

Dies folgt unmittelbar aus der Geschlossenheit des Vierecks $12'3'4'$. Verlängern wir A durch $3'$ über $4'$ bis zum Schnittpunkt $4''$ mit f_2, so muß das Viereck $4'4''43''$ ebenfalls geschlossen sein. Das heißt, die Punkte $4''$ und $3''$ müssen durch eine B-Kurve verbindbar sein. Damit ist gezeigt, daß das räumliche Sechseck $(2\ 2'3'4''3''3)$ geschlossen sein muß. Ein solches geschlossenes Sechseck bezeichnet man als Bolsches Sechseck. Wir haben eben gezeigt, daß das Bolsche Sechseck notwendig aus der Geschlossenheit des Vierecks (1 2 3 4) folgt. Es gilt aber auch die Umkehrung. Aus der Geschlossenheit des Bolschen Sechsecks folgt die Existenz einer Kurvenschar, die zu der (A, B, f)-Figur diagonal ist. Die Kurvenschar C gewinnen wir dadurch, daß wir die Fläche f_2' von f_2 gegen f_1 gehen lassen (siehe Fig. 2). Dann beschreibt, wenn 1 festbleibt, der Punkt $4'$ eine Kurve C, die in 4 beginnt und in 1 endigt. Wir haben zu zeigen, daß diese Konstruktion wirklich eine zweiparametrige Kurvenschar liefert, und daß nicht etwa durch jeden Punkt mehrere Kurven gehen. Wenn uns unsere Konstruktion wirklich eine Kurvenschar liefert, dann ist klar, daß diese Kurvenschar die gewünschte Diagonalkurvenschar ist. Konstruieren wir also durch

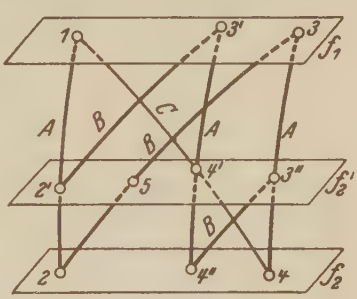


Fig. 2.

[3]) G. Bol, T. 21, S. 98.

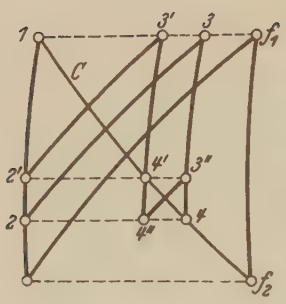


Fig. 3.

einen beliebigen Punkt $4'$ auf C' (siehe Fig. 3) nach obigem Verfahren eine entsprechende Kurve, so müssen wir zeigen, daß der neue Bogen $\overset{\frown}{4'4}$ Teilbogen von C durch 1 ist. Aus der Entstehungsart von C durch 1 ist nun ersichtlich, daß die Vierecke 1 2 3 4 und 1 2′ 3′ 4′ geschlossen sein müssen. Wegen der Geschlossenheit des Bolschen Sechsecks (2 2′ 3′ 4″ 3″ 3) muß aber das Viereck (4′ 4″ 3″ 4) ebenfalls geschlossen sein. Das bedeutet aber, daß 4 auf der Kurve C durch 1 liegt.

§ 2.

Eine Normaldarstellung des Bolschen Sechsecks.

Wir wollen in diesem Paragraphen zeigen, daß eine (A, B, f)-Figur. die eine Diagonalkurvenschar besitzt, eine besonders einfache Darstellung gestattet. Es gilt:

Eine (A, B, f)-Figur besitzt dann und nur dann eine Diagonalkurvenschar, wenn sich Koordinatenflächen so aufstellen lassen, daß

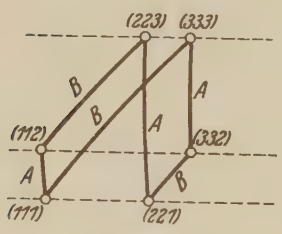


Fig. 4.

die f-Flächen durch

$$z = \text{konst.},$$

die A-Kurven durch

$$x, y = \text{konst.},$$

die B-Kurven durch

$$H = h(x, y) + Z(z) = \text{konst.},$$
$$\bar{H} = \bar{h}(x, y) + \bar{Z}(z) = \text{konst.}$$

dargestellt werden können.

Die Kurvenscharen A und B sind also Schnittkurvenscharen von je zwei Flächenscharen. Wir bemerken noch, daß bei diesen Untersuchungen der Spezialfall, daß die A- und B-Kurven eine Flächenschar aufspannen, ausgeschlossen sein soll. Es ist nun sehr leicht zu zeigen, daß die obige Darstellung hinreichend ist. Da die Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_3, y_3, z_3) in demselben Exemplar der Flächenschar H liegen, so gilt nach (Fig. 4)

$$h(1\,1) + Z_1 = h(3\,3) + Z_3$$

und entsprechend

$$h(2\,2) + Z_3 = h(1\,1) + Z_2.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Addition

$$h(2\,2) + Z_1 = h(3\,3) + Z_2.$$

Diese Beziehung sagt aus, daß auch die Punkte (2 2 1) und (3 3 2) in einem und demselben Exemplar der Flächenschar H liegen. Entsprechendes gilt für

$$\overline{H} = \bar{h}(x, y) + \bar{Z} = \text{konst.}$$

Da B Schnittkurvenschar von $H = \text{konst.}$ und $\overline{H} = \text{konst.}$ ist, so sind die Punkte (2 2 1) und (3 3 2) durch eine B-Kurve verbindbar. Damit ist die Geschlossenheit des Bolschen Sechsecks erwiesen.

Der Beweis für die Notwendigkeit dieser Darstellung gestaltet sich etwas schwieriger. Bevor wir zum eigentlichen Beweis übergehen, sollen noch bestimmte, mit den Kurvenscharen A und B invariant verbundene Kurvenscharen betrachtet werden. Wir betrachten die Linienelemente der Kurvenschar B, die an einer Fläche f_0 von f angeheftet werden. Projizieren wir diese Linienelemente mit Hilfe von A auf f_0, so gelangen wir zu einer Kurvenschar in f_0. Denken wir uns dies für jede Fläche f durchgeführt, so erhalten wir eine räumliche Kurvenschar, die wir mit D bezeichnen wollen. Diese Kurvenschar ist also in f enthalten. Aus dem Bolschen Sechseck (siehe Fig. 2) gewinnen wir nun eine Figur, die aus A-, B- und D-Kurven besteht. Lassen wir nämlich (siehe Fig. 2 und 5) f_2 gegen f_2' gehen, so wandert 5 nach $2'$. Ebenso beschreibt $3''$ ein Kurvenstück $\overset{\frown}{3''\,4'}$. Da ein Linienelement von A, vermittelst B auf ein f_0 projiziert, ein Linienelement von D ergibt, so stimmt im Infinitesimalen das Kurvenstück $\overset{\frown}{2'5}$ mit D im Punkte $2'$ überein. Das Kurvenstück $\overset{\frown}{2'5}$ und D haben also in $2'$ eine gemeinsame Tangente. Ebenso muß aber auch das Linienelement von $\overset{\frown}{4'3''}$ mit dem Linienelement von D in $4'$ zusammenfallen. Denken wir uns jetzt durch jeden Punkt des Kurvenstücks $\overset{\frown}{5\,2'}$ eine B-Kurve gezogen (siehe Fig. 5), so entsteht ein bestimmtes Flächenstück. Die Schnittkurve $\overset{\frown}{3'3}$ dieses Flächenstückes mit f_1 ergibt durch Projektion mit den A-Kurven in f_2' das Kurvenstück $\overset{\frown}{4'3''}$. Betrachten wir jetzt eine B-Kurve in dem Flächenstück, die benachbart zu der B-Kurve durch $2'$ ist, so schneiden die beiden Kurven einen bestimmten Streifen aus dem Flächenstück heraus. Der Schnitt dieses Streifens mit f_2' stimmt mit dem Linienelement von D durch $2'$ überein. Der Schnitt dieses Streifens mit f_1 ist das Linienelement des Kurvenstücks $\overset{\frown}{3'3}$ im Punkte $3'$. Da nun das Bolsche Sechseck bei dem Grenzübergang für jedes f_2 geschlossen ist,

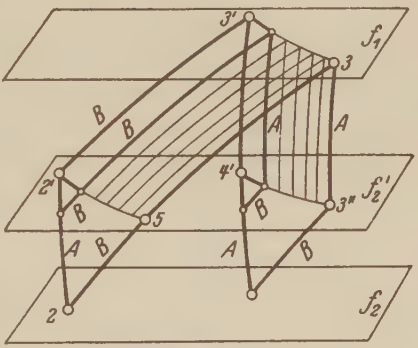


Fig. 5.

so muß die Projektion des Linienelementes von dem Kurvenstück $\overset{\frown}{3'3}$ im Punkte $3'$ mittelst zweier benachbarter A-Kurven in die Fläche f_2' mit dem Linienelement von D durch $4'$ übereinstimmen. Danach besteht aber nebenstehende Figur im Großen[4]) (siehe Fig. 6).

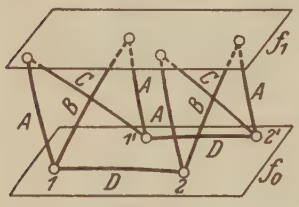


Fig. 6.

Durch die Punkte 1 und 2 von D in f_0 ziehen wir B bis f_1. Die beiden Schnittpunkte mit f_1 projizieren wir mit A wieder auf f_0. Dann müssen die Punkte $1'$ und $2'$ ebenfalls durch eine D-Kurve verbindbar sein. Da C Diagonal-Kurvenschar, so gilt dieselbe Konfiguration, wenn wir B durch C ersetzen (siehe Fig. 6).

Wir bezeichnen jetzt die f-Flächen mit $z = \text{konst.}$ Ferner wählen wir zwei Koordinatenflächen $x = \text{konst.}$, $y = \text{konst.}$ so, daß die Schnittkurvenschar der beiden Flächenscharen mit der Kurvenschar A übereinstimmt. Ferner ziehen wir durch die D-Kurven in f_0 die B-Kurven. Dann entsteht eine einparametrige Flächenschar $E(x, y, z) = \text{konst.}$, die die B-Kurven enthält. Da die A- und B-Kurven keine Flächenscharen aufspannen, so stimmt die Schnittkurvenschar von $E = \text{konst.}$ mit $z = \text{konst.}$ nur in f_0 mit D überein. Aus der Fig. 6 folgt nun sofort, daß diese Schnittkurvenschar mit A eine Flächenschar aufspannt. Betrachten wir alle durch A hindurchgehenden Linienelemente unserer Schnittkurvenschar, so sehen wir, daß sie alle parallel sind. Das heißt aber, daß in der Differentialgleichung

$$E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz = 0$$

für $dz = 0$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{E_x}{E_y}$ nicht von z abhängt. Daher gilt

$$\left(\frac{E_x}{E_y}\right)_z = 0. \tag{1}$$

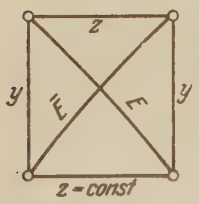


Fig. 7.

Ziehen wir durch D in f_0 die C-Kurven, so entsteht eine entsprechende Flächenschar $\bar{E}(x, y, z) = \text{konst.}$ In einer Fläche $x = \text{konst.}$ haben wir nun vier Kurvenscharen, nämlich

$$y = \text{konst.},$$
$$z = \text{konst.},$$
$$E = \text{konst.},$$
$$\bar{E} = \text{konst.}$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß diese vier Kurvenscharen in $x = \text{konst.}$ die sogenannte ebene Diagonalfigur[5]) [6]) erfüllen (siehe Fig. 7). Beim Beweise benutzen wir die Konfiguration der Fig. 4, und zwar sowohl für die

[4]) G. Bol, T. 21, Hamburg. Abhandlungen 8, S. 98.
[5]) W. Blaschke, T. 1, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 154.
[6]) G. Bol, T. 21, Hamburg. Abhandlungen 8, S. 99.

Kurvenscharen A und B als auch für die Kurvenscharen A und C. Außerdem benutzen wir, daß die Kurvenschar C zu der (A, B, f)-Figur diagonal ist. Wir betrachten eine Fläche $E = \text{konst}$. Diese Fläche möge in $z = z_0$ einen D-Kurvenbogen $\overset{\frown}{1\,2}$ und in $x = x_0$ einen Kurvenbogen $\overset{\frown}{1'2'}$ ausschneiden (siehe Fig. 8). Wenn wir durch die Punkte $1'$ und $2'$ in $x = x_0$ die Kurven $y = \text{konst.}$ und $z = \text{konst.}$ ziehen, so erhalten wir das Viereck $1'3'2'4''$.

Wenn wir gezeigt haben, daß ein Exemplar der Flächenschar $\bar{E} = \text{konst.}$ durch die Punkte $3'$ und $4'$ geht, dann ist klar, daß die Schnittkurven von $\bar{E}$ und $x = x_0$ die Punkte $3'$ und $4'$ verbindet. Wir legen durch $2'$ eine z-Fläche, die die B-Kurve durch 1 und $1'$ in $3''$ schneidet. Projizieren wir die Punkte $3''$ und $2'$ durch A-Kurven in die Fläche $z = z_0$, so müssen die Projektionspunkte durch eine D-Kurve verbindbar sein. Legen wir durch $1'$ eine z-Fläche, so schneidet sie die A-Kurve durch $3''$ in $1''$. Das Viereck $1'3''1''3'$ muß sich nun durch ein Exemplar der Diagonal-Kurvenschar C schließen lassen. Die Punkte $1''$ und $4'$ liegen auf gleicher Höhe in derselben z-Ebene.

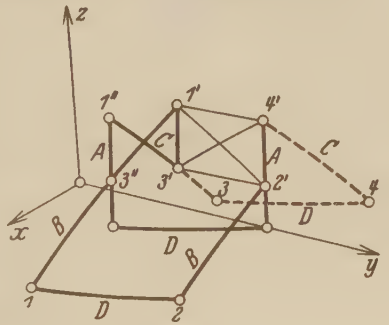


Fig. 8.

Die Schnittpunkte der A-Kurven durch die Punkte $1''$ und $4'$ mit der Fläche $z = z_0$ sind durch eine D-Kurve verbindbar. Die Schnittpunkte der C-Kurven durch die Punkte $1''$ und $4'$ mit $z = z_0$ bezeichnen wir mit 3 bzw. 4. Wir wenden jetzt die Konfiguration der Fig. 6 auf die A- und C-Kurven an. Dann müssen also die Punkte 3 und 4 auf einem Exemplar der D-Kurve liegen. Betrachten wir jetzt eine Fläche $\bar{E} = \text{konst.}$, die in der Fläche $z = z_0$ den Bogen $\overset{\frown}{3\,4}$ ausschneidet, so muß dies Fläche $\bar{E}$ in x_0 den Bogen $3'4'$ ausschneiden. Wir haben damit also gezeigt, daß das Netz der Schnittkurvenscharen von E und $\bar{E}$ mit der Ebene $x = x_0$ diagonal zu dem entsprechenden Koordinatennetz liegt. Dies ist aber gleichbedeutend damit, daß die Kurvenscharen $E = \text{konst.}$, $y = \text{konst.}$ und $z = \text{konst.}$ ein Sechseckgewebe bilden. Ebenso beweist man, daß in einer Ebene $y = y_0$ die drei Kurvenscharen $E = \text{konst.}$, $x = \text{konst.}$ und $z = \text{konst.}$ ein Sechseckgewebe darstellen. Kennzeichnend für ein Sechseckgewebe ist das Verschwinden der Invarianten ϱ.[7])

Es gilt daher

$$(2)\qquad \begin{aligned} \left(\lg \frac{E_y}{\bar{E}_z}\right)_{yz} &= 0 \quad \text{für das Gewebe } (yzE) \text{ in } x_0, \\ \left(\lg \frac{E_x}{\bar{E}_z}\right)_{xz} &= 0 \quad \text{für das Gewebe } (xzE) \text{ in } y_0. \end{aligned}$$

[7]) W. Blaschke und J. Dubourdieu, Hamburg. Abhandlungen 6, S. 206 (50).

Aus (1) und (2) folgt durch Integration

$$(3) \qquad \frac{E_x}{E_y} = t(x, y), \quad \frac{E_y}{E_z} = \frac{p(x, y)}{q(x, z)}, \quad \frac{E_z}{E_x} = \frac{s(z, y)}{r(x, y)}.$$

Multiplizieren wir diese drei Gleichungen miteinander, so erhalten wir

$$t \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = 1$$

oder

$$\frac{s(z, y)}{q(z, x)} = \frac{r(x, y)}{t(x, y) \cdot p(x, y)} = \alpha(x, y),$$

wo α eine Funktion von x und y allein bedeutet. Da α von z nicht abhängt, so gilt also

$$s = Y \cdot Z'(z),$$
$$q = X \cdot Z'(z).$$

Danach lauten die drei Gleichungen (3)

$$(4) \qquad \frac{E_x}{E_y} = t(x, y), \quad \frac{E_y}{E_z} = \frac{p(x, y)}{X \cdot Z'}, \quad \frac{E_z}{E_x} = \frac{Y \cdot Z'}{r(x, y)}.$$

Wir führen jetzt für die Funktionen $\frac{p}{X}$, $\frac{r}{Y}$ neue Bezeichnungen ein.

$$\frac{r(x, y)}{Y} = \varphi(x, y),$$

$$\frac{p(x, y)}{X} = \psi(x, y).$$

Danach lautet (4)

$$\frac{E_x}{E_y} = t(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}, \quad \frac{E_y}{E_z} = \frac{\psi(x, y)}{Z'}, \quad \frac{E_z}{E_x} = \frac{Z'}{\varphi(x, y)}.$$

Dann gilt aber

$$(5) \qquad \begin{aligned} E_x &= \lambda \varphi(x, y), \\ E_y &= \lambda \psi(x, y), \\ E_z &= \lambda Z', \end{aligned}$$

wo λ eine Funktion in x, y, z ist.

Betrachten wir jetzt die Funktionen E_{xz} und E_{yz}, so liefert (5) die Gleichungen

$$E_{xz} = \lambda_x Z' = \lambda_z \varphi,$$
$$E_{yz} = \lambda_y Z' = \lambda_z \psi.$$

Ist $\lambda_z = 0$, so ist, weil Z' nicht identisch verschwindet, auch $\lambda_x = \lambda_y = 0$. Das heißt, λ wäre eine Konstante. Wir wollen diesen Fall erst mal ausschließen. Dann können wir aber schreiben

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_z} = \frac{\varphi(x, z)}{Z'},$$
$$\frac{\lambda_y}{\lambda_z} = \frac{\psi(x, y)}{Z'};$$

und hiernach gilt dann

$$\lambda_x = \mu\varphi(x, y),$$
$$\lambda_y = \mu\psi(x, y), \tag{6}$$
$$\lambda_z = \mu Z',$$

wo μ wieder von x, y, z abhängt.

Betrachten wir jetzt die Differentialgleichung für unsere Flächenschar $E =$ konst.,

$$\varphi\, dx + \psi\, dy + Z' dz = 0,$$

so sehen wir, daß wegen (6) die Funktion $\lambda(x, y, z) =$ konst. diese Differentialgleichungen befriedigt. Daraus schließen wir, daß $\lambda =$ konst. und $E =$ konst. dieselbe Flächenschar darstellen. Es muß deshalb $\lambda = \lambda(E)$ sein. Setzen wir jetzt

$$\int \frac{dE}{\lambda(E)} = H,$$

so gilt

$$\frac{1}{\lambda(E)} = \frac{dH}{dE} \quad \text{oder} \quad \lambda(E) = \frac{dE}{dH}.$$

Dann haben wir

$$E_x = E' H_x = \lambda\varphi(x, y),$$
$$E_y = E' H_y = \lambda\psi(x, y),$$
$$E_z = E' H_z = \lambda Z',$$

und hiernach gilt

$$H = h(x, y) + Z(z). \tag{7}$$

Betrachten wir jetzt den Spezialfall, daß λ in (5) eine Konstante ist, so ist ohne weiteres klar, daß E auch dann eine Darstellung (7) besitzt. Unsere Flächenschar E, die wir mit Hilfe der D-Kurven in der Fläche $z = z_0$ konstruiert haben, muß also notwendig die Gestalt von (7) besitzen. Nehmen wir die D-Kurven in einer anderen z-Ebene und konstruieren nach derselben Methode eine entsprechende Flächenschar, so muß diese Flächenschar von der Flächenschar $E =$ konst. verschieden sein, da wir ja den Fall, daß die A- und B-Kurven Flächenscharen aufspannen, ausgeschlossen haben. Für diese Flächenschar läßt sich dann ebenso die Darstellung herleiten:

$$\bar{H} = \bar{h}(x, y) + \bar{Z}(z).$$

Da B in $H =$ konst. und $\bar{H} =$ konst. liegt, so ist damit die Notwendigkeit der obigen Bedingung bewiesen.

§ 3.

Das Diagonalproblem.

Mit den Ergebnissen des vorigen Paragraphen wollen wir jetzt das sogenannte Diagonalproblem untersuchen. Es handelt sich dabei um folgende

Figur. Wir betrachten drei Flächenscharen $x, y, z = \text{konst.}$ und eine Kurvenschar K. Wir nennen dann K zu dem Flächennetz $x, y, z = \text{konst.}$ diagonal, wenn es drei weitere Kurvenscharen gibt, die, wenn K Raumdiagonale (siehe Fig. 9) in einem Netzwürfel des Flächennetzes ist, die drei übrigen Raumdiagonalen darstellen. Wir wollen dann den zuerst von Herrn Howe[8]) gefundenen Satz beweisen.

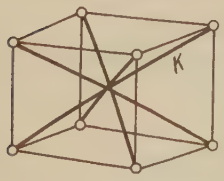


Fig. 9.

Eine Kurvenschar K, deren Kurven die Flächen $x, y, z = \text{konst.}$ schneiden, ist dann und nur dann diagonal zum Flächennetz $x, y, z = \text{konst.}$, wenn sie Schnittkurvenschar von zwei Flächenscharen ist, deren jede mit dem Flächennetz ein Achtflachgewebe bildet.

Eine Flächenschar bildet mit den Koordinatenflächen ein Achtflachgewebe, wenn sie auf die Form gebracht werden kann:

$$X + Y + Z = \text{konst.}$$

Beim Beweise dieses Satzes denken wir uns das Flächennetz und die Kurvenschar K aus folgenden drei (A, B, f)-Figuren zusammengesetzt:

$$f_1 = x = \text{konst.}, \qquad f_2 = y = \text{konst.}, \qquad f_3 = z = \text{konst.},$$

$$A \begin{cases} y = \text{konst.}, \\ z = \text{konst.}, \end{cases} \qquad A_2 \begin{cases} z = \text{konst.}, \\ x = \text{konst.}, \end{cases} \qquad A_3 \begin{cases} x = \text{konst.}, \\ y = \text{konst.}, \end{cases}$$

$$B_1 = K, \qquad B_2 = K, \qquad B_3 = K.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß die obigen Bedingungen hinreichend sind. Wir sehen sofort, daß für die x-Richtung wie auch für die y- und z-Richtung Diagonalscharen existieren müssen. Denn wenn B Schnittkurvenschar von zwei Flächenscharen von der Form

$$X + Y + Z = \text{konst.},$$
$$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z} = \text{konst.}$$

ist, so können wir B auffassen als Schnittkurvenschar von Flächenscharen von folgendem Typus[9]):

$$f(y, z) + X = (Y + Z) + X = \text{konst.},$$
$$\overline{f}(y, z) + \overline{X} = (\overline{Y} + \overline{Z}) + \overline{X} = \text{konst.};$$
$$g(x, z) + Y = (X + Z) + Y = \text{konst.},$$
$$\overline{g}(x, z) + \overline{Y} = (\overline{X} + \overline{Z}) + \overline{Y} = \text{konst.};$$
$$h(x, y) + Z = (X + Y) + Z = \text{konst.},$$
$$\overline{h}(x, y) + \overline{Z} = (\overline{X} + \overline{Y}) + \overline{Z} = \text{konst.}$$

---

[8]) G. Howe, T. 20, Hamburg. Abhandlungen. 8 (1930).

[9]) Das $f(y, z)$ in diesen Formen hat natürlich mit dem f aus der (A, B, f)-Figur nichts zu tun.

Diese Formen wurden aber schon im zweiten Paragraphen als hinreichend für die Existenz einer Diagonalkurvenschar erkannt.

Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen gestaltet sich der Beweis für die Notwendigkeit in folgender Weise. Wir können bei geeigneter Koordinatenwahl B auffassen als Schnittkurvenschar von zwei Flächenscharen in folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} F &= f(y,z) + x = \text{konst.}, \\ \bar{F} &= \bar{f}(y,z) + X = \text{konst.}; \\ G &= g(x,z) + y = \text{konst.}, \\ \bar{G} &= \bar{g}(x,z) + Y = \text{konst.}; \\ H &= h(x,y) + z = \text{konst.}, \\ \bar{H} &= \bar{h}(x,y) + Z = \text{konst.} \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} a &= a(x,y,z), \\ b &= b(x,y,z), \\ c &= c(x,y,z) \end{aligned}$$

die drei Richtungsfunktionen von K, so können die Determinanten zweiter Ordnung der folgenden drei Matrizen zur Bildung der Richtungsfunktionen verwandt werden:

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\alpha) \quad \begin{vmatrix} 1 & f_y & f_z \\ X' & \bar{f}_y & \bar{f}_z \end{vmatrix}, \\ &\beta) \quad \begin{vmatrix} g_x & 1 & g_z \\ \bar{g}_x & Y' & \bar{g}_z \end{vmatrix}, \\ &\gamma) \quad \begin{vmatrix} h_x & h_y & 1 \\ \bar{h}_x & \bar{h}_y & Z' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Da K die Flächen $x, y, z = \text{konst.}$ immer schneiden soll, so sind sämtliche Determinanten zweiter Ordnung ungleich Null. Dann gilt, wenn wir a und b aus den Matrizen (8α) und (8β) nehmen,

$$\frac{a}{b} = \frac{\bar{f}_z f_y - \bar{f}_y f_z}{X' f_z - \bar{f}_z} = \frac{\bar{g}_z - Y' g_z}{-\bar{g}_z g_x + g_z \bar{g}_x}.$$

Da

$$(9) \qquad f = f(y,z), \qquad g = g(x,z),$$

so gilt

$$(10) \qquad (\bar{g}_z - Y' g_z)(X' f_z - \bar{f}_z) = u(y,z)\, v(x,z)$$

und daraus

$$(11) \qquad [\lg(\bar{g}_z - Y' g_z)]_{xy} + [\lg(X' f_z - \bar{f}_z)]_{xy} = 0.$$

Dies ergibt

$$\frac{Y''(\bar{g}_{xz}g_z - g_{xz}\bar{g}_z)}{(\bar{g}_z - Y'g_z)^2} + \frac{X''(\bar{f}_{zy}f_z - \bar{f}_z f_{zy})}{(X'f_z - \bar{f}_z)^2} = 0. \tag{12}$$

Schließen wir erst mal den Spezialfall $X', Y', Z' = c_1, c_2, c_3$ aus, wo die c_i Konstanten sind, so sind jetzt

$$\bar{g}_{xz}g_z - g_{xz}\bar{g}_z = \bar{f}_{zy}f_z - \bar{f}_z f_{zy} = 0.$$

Annahme: einer der Ausdrücke wäre ungleich Null, so dividieren wir die Gleichung (12) durch diesen Ausdruck. Dann haben wir wegen (9)

$$\frac{X''}{Y''}\frac{(\bar{g}_z - Y'g_z)^2}{(X'f_z - \bar{f}_z)^2} = \frac{\bar{u}(y,z)}{\bar{v}(x,z)}.$$

Und hieraus ganz entsprechend wie bei (11)

$$\left[\lg \frac{X''}{Y''}\frac{(\bar{g}_z - Y'g_z)^2}{(X'f_z - \bar{f}_z)^2}\right]_{xy} = 2[\lg(\bar{g}_z - Y'g_z)]_{xy} - 2[\lg(X'f_z - \bar{f}_z)]_{xy} = 0.$$

Daraus folgt ohne weiteres unter Berücksichtigung von (11) und (12)

$$\bar{g}_{xz}g_z - g_{xz}\bar{g}_z = \bar{f}_{zy}f_z - \bar{f}_z f_{zy} = 0.$$

Nehmen wir c und b aus (8β) und (8γ), so gilt

$$\frac{c}{b} = \frac{g_x Y' - \bar{g}_x}{\bar{g}_x g_z - g_x \bar{g}_z} = \frac{h_x \bar{h}_y - \bar{h}_x h_y}{\bar{h}_x - h_x Z'}.$$

Jetzt besteht ganz entsprechend wie bei (11)

$$[\lg(g_x Y' - \bar{g}_x)]_{yz} + [\lg(\bar{h}_x - h_x Z')]_{yz} = 0.$$

Und daraus ergibt sich genau so wie bei (12)

$$g_x \bar{g}_{xz} + g_{xz}\bar{g}_x = 0.$$

Betrachten wir nun die beiden Gleichungen

$$\bar{g}_{xz}g_z - g_{xz}\bar{g}_z = 0,$$
$$\bar{g}_{xz}g_x - g_{xz}\bar{g}_x = 0,$$

so muß, da die Determinante ungleich Null ist,

$$\bar{g}_{xz} = g_{xz} = 0$$

sein. Das heißt, K ist Schnittkurve von zwei Flächenscharen von der Form

$$G = X_1 + y + Z_1, \quad \bar{G} = X_2 + Y + Z_2. \tag{13}$$

Es bleibt noch übrig, den Fall zu betrachten, daß

$$X' = c_1, \quad Y' = c_2, \quad Z' = c_3,$$

wo die $c_i = \text{konst.}$ sind. Dann lassen sich aber die Richtungsfunktionen a, b, c aus den drei Matrizen $(8\alpha\beta\gamma)$ so wählen, daß sämtliche Ableitungen von den Ausdrücken $\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}$ verschwinden. Das heißt, a, b, c sind bis auf einen gemeinsamen Faktor Konstanten. K ist also in diesem Falle eine Schar paralleler Geraden. Danach ist klar, daß K nur ein Spezialfall der obigen Darstellung (13) ist. Wir haben also endgültig gezeigt, daß die drei Normaldarstellungen bei dem Diagonalproblem notwendigerweise in die Normaldarstellung (13) zusammenfallen müssen. Oder anders ausgedrückt: K muß notwendigerweise Schnittkurvenschar von zwei Flächenscharen sein, deren jede mit dem Flächennetz ein Achtflachgewebe bildet.

§ 4.

Aus der Existenz von drei Raumdiagonalen folgt die Existenz der vierten Diagonale.

Wir wollen in diesem Paragraphen folgenden Satz beweisen:

Eine Kurvenschar K ist diagonal zu dem Flächennetz $x, y, z = \text{konst.}$, wenn es zwei weitere Kurvenscharen gibt, deren Kurven in geeigneten Netzwürfeln mit den K Kurven zusammen Raumdiagonalen bilden.

Wenn gezeigt ist, daß aus der Existenz von zwei weiteren Raumdiagonalen folgt, daß K Schnittkurvenschar von zwei Flächenscharen ist, deren jede mit dem Flächennetz ein Achtflachgewebe bildet, so sind wir fertig. Nach dem Satz vom vorigen Paragraphen ist nämlich ersichtlich, daß K dann diagonal zu $x, y, z = \text{konst.}$ sein muß. Wir denken uns genau wie im dritten Paragraphen das Flächennetz und die Kurvenschar K aus den dort angegebenen drei (A, B, f)-Figuren zusammengesetzt. Da diesmal nur zwei weitere Raumdiagonalen existieren, so gibt es für K nur zwei Darstellungsarten. K kann nach geeigneter Koordinatenwahl dann aufgefaßt werden als Schnittkurvenschar von folgenden Flächenscharen

$$\begin{cases} F = f(y,z) + x = \text{konst.}, \\ \bar{F} = \bar{f}(y,z) + X = \text{konst.}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} G = g(x,z) + y = \text{konst.}, \\ \bar{G} = \bar{g}(x,z) + Y = \text{konst.} \end{cases}$$

Die Richtungsfunktionen

$$a = a(x,y,z),$$
$$b = b(x,y,z),$$
$$c = c(x,y,z)$$

können somit auch nur aus den beiden Matrizen

$$\alpha) \quad \begin{vmatrix} 1 & f_y & f_z \\ X' & \bar{f}_y & \bar{f}_z \end{vmatrix},$$

$$\beta) \quad \begin{vmatrix} g_x & 1 & g_z \\ \bar{g}_x & Y' & \bar{g}_z \end{vmatrix}$$

entnommen werden.

Aus den Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{a}{b} = \frac{\bar{f}_z f_y - \bar{f}_y f_z}{X' f_z - \bar{f}_z} = \frac{\bar{g}_z - Y' g_z}{-\bar{g}_z g_x + g_z \bar{g}_x}$$

hatte der vorige Paragraph die Beziehungen ergeben

$$(2) \qquad \bar{g}_{xz} g_z - g_{xz} \bar{g}_z = \bar{f}_{zy} f_z - f_{zy} \bar{f}_z = 0.$$

Diese beiden Gleichungen können wir auch so schreiben

$$(3) \qquad \left(\frac{\bar{g}_z}{g_z}\right)_x = 0, \quad \left(\frac{\bar{f}_z}{f_z}\right)_y = 0.$$

Integrieren wir (3), so ergibt sich

$$(4) \qquad \bar{g}_z = Z_1(z)\, g_z, \quad \bar{f}_z = Z_2(z)\, f_z.$$

Berücksichtigen wir die Gleichungen (4), so lautet (1)

$$(5) \qquad \frac{Z_2 f_y - \bar{f}_y}{X' - Z_2} = \frac{Z_1 - Y'}{-Z_1 g_x + \bar{g}_x}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\frac{X' - Z_2}{Z_1 - Y'}$, so lautet die Gleichung (5)

$$(6) \qquad \frac{Z_2 f_y - \bar{f}_y}{Z_1 - Y'} = \frac{X' - Z_2}{-Z_1 g_x + \bar{g}_x}.$$

Da $f = f(y, z)$ und $g = g(x, z)$, so gilt

$$(7) \qquad \frac{Z_2 f_y - \bar{f}_y}{Z_1 - Y'} = \frac{X' - Z_2}{-Z_1 g_x + \bar{g}_x} = Z_3(z).$$

Die Gleichungen (7) und (4) liefern nun die beiden Gleichungssysteme

$$(8a) \qquad \begin{aligned} \bar{f}_y &= Z_2 f_y - Z_3(Z_1 - Y'), \\ \bar{f}_z &= Z_2 f_z; \end{aligned}$$

$$(8b) \qquad \begin{aligned} \bar{g}_x &= Z_1 g_x + \frac{X' - Z_2}{Z_3}, \\ \bar{g}_z &= Z_1 g_z. \end{aligned}$$

Differenzieren wir die erste Gleichung von (8a) nach z und die zweite nach y, so erhalten wir die Beziehungen

$$(9) \qquad \begin{aligned} \bar{f}_{yz} &= Z_2 f_{yz} + Z_2' f_y - [Z_3(Z_1 - Y')]_z, \\ \bar{f}_{zy} &= Z_2 f_{zy}. \end{aligned}$$

Aus diesen Beziehungen ergibt sich durch Subtraktion

$$f_y = \frac{[Z_3(Z_1 - Y')]_z}{Z_2'}. \tag{10}$$

Nehmen wir die entsprechenden Differentiationen in (8b) vor, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{g}_{xz} &= Z_1 g_{xz} + Z_1' g_x + \left[\frac{X' - Z_2}{Z_3}\right]_z, \\ \bar{g}_{zx} &= Z_1 g_{zx}. \end{aligned} \tag{11}$$

Und hieraus

$$g_x = -\frac{\left[\frac{X' - Z_2}{Z_3}\right]_z}{Z_1'}. \tag{12}$$

Da wir weiter unten den Spezialfall, daß mindestens einer von den Ausdrücken $Z_1'(z)$, $Z_2'(z)$ verschwindet, besonders behandeln, so nehmen wir hier an, daß die Ableitungen der beiden Funktionen $Z_1(z)$, $Z_2(z)$ ungleich Null sind. Bilden wir jetzt aus den beiden Matrizen α) und β) $\frac{b}{c}$, so erhalten wir

$$\frac{b}{c} = \frac{-\bar{f}_z + X' f_z}{\bar{f}_y - X' f_y} = \frac{\bar{g}_x g_z - g_x \bar{g}_z}{g_x Y' - \bar{g}_x}. \tag{13}$$

Verwenden wir (4), so lautet (13)

$$\frac{f_z(-Z_2 + X')}{\bar{f}_y - X' f_y} = \frac{g_z(\bar{g}_x - Z_1 g_x)}{g_x Y' - \bar{g}_x}. \tag{14}$$

Setzen wir für $\bar{f}_y$ und $\bar{g}_x$ die Ausdrücke (8a) und (8b) ein, so lautet (14)

$$\frac{f_z \cdot Z_3}{(Z_2 - X') f_y - Z_3(Z_1 - Y')} = \frac{g_z}{g_x(Y' - Z_1) - \frac{X' - Z_2}{Z_3}}. \tag{15}$$

Führen wir jetzt für f_y und g_x die Ausdrücke (10) bzw. (12) ein. Dann gilt

$$\frac{f_z \cdot Z_3}{(Z_2 - X')\frac{[Z_3(Z_1 - Y')]_z}{Z_2'} - Z_3(Z_1 - Y')} = \frac{g_z}{-\left\{(Y' - Z_1)\frac{\left[\frac{X' - Z_2}{Z_3}\right]_z}{Z_1'} + \frac{X' - Z_2}{Z_3}\right\}}. \tag{16}$$

Differenzieren wir die Klammern in (16) aus, so besteht

$$\begin{aligned} &\frac{f_z Z_2'}{(Z_2 - X')[Z_3 Z_1' + Z_3'(Z_1 - Y')] - Z_2' Z_3(Z_1 - Y')} \\ &\qquad = \frac{Z_1' Z_3 g_z}{(Z_1 - Y')[-Z_3 Z_2' - (X' - Z_2) Z_3'] - Z_3 Z_1'(X' - Z_2)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Durch einfaches Nachrechnen bestätigen wir, daß die Nenner in (17) gleich sind. Dann besteht aber

$$f_z = \frac{Z_1'}{Z_2'} \cdot Z_3 \cdot g_z.$$

Setzen wir $\frac{Z_1' \cdot Z_3}{Z_2'} = Z_4(z)$, so gilt

$$f_z = Z_4(z) \cdot g_z . \tag{18}$$

Da $f = f(y, z)$ und $g = g(x, z)$, so ist wegen (18)

$$f_{yz} = g_{xz} = 0 . \tag{19}$$

Die Gleichungen (19) ergeben integriert

$$\begin{aligned} f &= Y + Z , \\ g &= X + \bar{Z} . \end{aligned} \tag{20}$$

Die Flächenscharen $F =$ konst., $G =$ konst. nehmen danach die Formen an:

$$\begin{aligned} F &= f(y, z) + x = x + Y + Z = \text{konst.}, \\ G &= g(x, z) + y = X + y + \bar{Z} = \text{konst.} \end{aligned} \tag{21}$$

Da K in $\begin{cases} F = \text{konst.} \\ G = \text{konst.} \end{cases}$ liegt, und F nebst G mit $x, y, z =$ konst. wegen (21) ein Achtflachgewebe bilden, so wäre für $Z_1' \neq 0$, $Z_2' \neq 0$ der obige Satz schon bewiesen. Betrachten wir also jetzt noch die Fälle $Z_1' = 0$, $Z_2' = 0$; $Z_1' \neq 0$, $Z_2' = 0$; $Z_1' = 0$, $Z_2' \neq 0$. Für den ersten dieser Fälle gilt dann nach (4), wenn wir $Z_1 = c_1$ und $Z_2 = c_2$ setzen,

$$(\bar{f} - c_2 f)_z = 0 , \quad (\bar{g} - c_1 g)_z = 0 \tag{22a}$$

und hieraus

$$\bar{f} - c_2 f = Y_0(y) , \quad \bar{g} - c_1 g = X_0(x) . \tag{22b}$$

Wegen (22b) haben wir dann

$$\begin{aligned} \bar{F} - c_2 F &= \bar{f} - c_2 f + X - c_2 x = Y_0 + X - c_2 x , \\ \bar{G} - c_1 G &= \bar{g} - c_1 g + Y - c_1 y = X_0 + Y - c_1 y . \end{aligned} \tag{23}$$

Da K in $\begin{cases} F = \text{konst.} \\ \bar{F} = \text{konst.} \end{cases}$ bzw. $\begin{cases} G = \text{konst.} \\ \bar{G} = \text{konst.} \end{cases}$ liegt, so liegt K auch in den Flächenscharen $\begin{cases} \bar{F} - c_2 F = Y_0 + \tilde{X} = \text{konst.} \\ \bar{G} - c_1 G = X_0 + \tilde{Y} = \text{konst.} \end{cases}$. Wir sehen, daß hier die Darstellung für K ein besonderer Fall der Normaldarstellung (21) ist.

Ist $Z_2' = 0$, $Z_1' \neq 0$, so gilt nach (22b)

$$\bar{f} - c_2 f = Y_0 .$$

Denken wir uns jetzt eine dritte Flächenschar $F =$ konst. nach derselben Methode konstruiert, wie $\bar{F} =$ konst. und $F =$ konst. (siehe § 2), so gilt wieder

$$F = \bar{f}(y, z) + \bar{X}(x)$$

und daraus wegen (2), (3), (4)

$$\bar{f}_z = \bar{Z}_3 f_z .$$

Ist $\begin{cases} \bar{Z}_2' \neq 0, \\ \bar{Z}_2' = 0, \end{cases}$ so hat K durch die Flächenscharen $\begin{cases} \begin{cases} G = \text{konst.} \\ \bar{F} = \text{konst.} \end{cases} \\ \begin{cases} F = \text{konst.} \\ \bar{F} = \text{konst.} \end{cases} \end{cases}$ die Darstellung $\begin{cases} (21) \\ (23) \end{cases}$. Ganz entsprechend ist der Fall $Z_2' \neq 0$, $Z_1' = 0$ zu behandeln.

Da (23) ein besonderer Fall der Normaldarstellung (21) ist, so haben wir jetzt ganz allgemein gezeigt, daß K sich darstellen läßt als Schnittkurvenschar von zwei Flächenscharen, deren jede mit dem Flächennetz ein Achtflachgewebe bildet. Dann ist K aber diagonal zum Flächennetz $x, y, z = \text{konst.}$, und damit wäre jetzt der oben behauptete Satz ganz allgemein bewiesen.

§ 5.

Noch einmal das Diagonalproblem.

Es soll hier das Diagonalproblem noch einmal auf anderem Wege, der schneller zum Ziele führt, behandelt werden. Wir denken uns die drei Flächenscharen $x, y, z = \text{konst.}$ in einem cartesischen Koordinatensystem verwirklicht. Die vier Kurvenscharen bezeichnen wir mit $K = K_0, K_1, K_2, K_3$. Jede Kurvenschar ist gekennzeichnet durch drei Richtungsfunktionen. Bezeichnen wir diese in folgender Weise

$$\begin{aligned} K_0&: \quad a_0(x,y,z), \quad b_0(x,y,z), \quad c_0(x,y,z), \\ K_1&: \quad a_1(x,y,z), \quad b_1(x,y,z), \quad c_1(x,y,z), \\ K_2&: \quad a_2(x,y,z), \quad b_2(x,y,z), \quad c_2(x,y,z), \\ K_3&: \quad a_3(x,y,z), \quad b_3(x,y,z), \quad c_3(x,y,z). \end{aligned}$$

Wir denken uns jetzt K_0 bzw. K_1 um den Punkt 0 bzw. 1 dargestellt durch die Funktionen $x(t), y(t), z(t)$ bzw. $\bar{x}(\bar{t}), \bar{y}(\bar{t}), \bar{z}(\bar{t})$.

Ferner wollen wir unter t_i bzw. $\bar{t}_i$ den Parameterwert verstehen, der auf der Kurve K_0 bzw. K_1 zu dem Punkte i gehört. Es sollen jetzt die Parameter so verteilt werden, daß $t_4 - t_0 = \bar{t}_5 - \bar{t}_1$ (siehe Fig. 10).

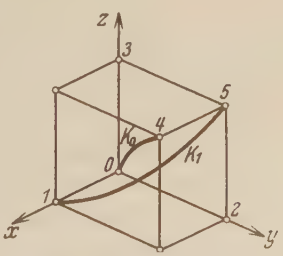


Fig. 10.

Wir können eine derartige Verteilung vornehmen, da die Koordinaten z. B. die Forderungen erfüllen. Bezeichnen wir jetzt kurz $t_4 - t_0 = \bar{t}_5 - \bar{t}_1$ mit t, so können wir nach dem gewöhnlichen Mittelwertsatz der Differentialrechnung schreiben, wenn x_i, y_i, z_i die Werte meinen, die die Koordinaten an den Punkten i annehmen (siehe Fig. 10):

$$(1\alpha) \qquad x_1 - x_0 = t\,x'(\vartheta_{01}\cdot t) = t\cdot a_0(\vartheta_{01}\cdot t),$$
$$(1\beta) \qquad y_2 - y_0 = t\,y'(\vartheta_{02}\cdot t) = t\cdot b_0(\vartheta_{02}\cdot t), \qquad (0 < \vartheta_{ik} < 1)$$
$$(1\gamma) \qquad z_3 - z_0 = t\,z'(\vartheta_{03}\cdot t) = t\cdot c_0(\vartheta_{03}\cdot t).$$

Stellen wir die entsprechenden Gleichungen für K_1 auf, so gilt (siehe Fig. 10)

$$(2\alpha) \qquad x_0 - x_1 = t\cdot a_1(\vartheta_{11}\cdot t),$$
$$(2\beta) \qquad y_2 - y_0 = t\cdot b_1(\vartheta_{12}\cdot t), \qquad (0 < \vartheta_{ik} < 1)$$
$$(2\gamma) \qquad z_3 - z_0 = t\cdot c_1(\vartheta_{13}\cdot t).$$

Durch Addition von (1α) und (2α) erhalten wir

$$[a_0(\vartheta_{01}\cdot t) + a_1(\vartheta_{11}\cdot t)] = 0 \quad \text{für jedes} \quad t \neq 0.$$

Da a_0 und a_1 stetige Funktionen des Ortes sein sollen und $0 < \vartheta_{ik} < 1$, so gilt, wenn t gegen Null konvergiert,

$$a_0(x_0, y_0, z_0) = -\,a_1(x_0, y_0, z_0).$$

Ferner finden wir durch Vergleich der Beziehungen (1β), (1γ) mit (2β), (2γ) die Relationen

$$b_0(x_0, y_0, z_0) = b_1(x_0, y_0, z_0),$$
$$c_0(x_0, y_0, z_0) = c_1(x_0, y_0, z_0).$$

Führen wir diese Untersuchungen auch mit K_2 und K_3 durch, so lautet schließlich das Schema der Richtungsfunktionen, wenn wir die unnötigen Indizes fortlassen,

$$\begin{aligned}
K_0&: \quad a(x,y,z), \quad b(x,y,z), \quad c(x,y,z),\\
K_1&: -a(x,y,z), \quad b(x,y,z), \quad c(x,y,z),\\
K_2&: \quad a(x,y,z), -b(x,y,z), \quad c(x,y,z),\\
K_3&: \quad a(x,y,z), \quad b(x,y,z), -c(x,y,z).
\end{aligned}$$

Im zweiten Paragraphen betrachteten wir eine Kurvenschar D, die mit der (A, B, f)-Figur invariant verbunden war. Setzen wir

$$(3\alpha) \qquad f = z = \text{konst.}, \quad A: \begin{cases} x = \text{konst.}, \\ y = \text{konst.}, \end{cases} \quad B = K_0,$$

$$(3\beta) \qquad f = z = \text{konst.}, \quad \mathfrak{A}: \begin{cases} x = \text{konst.}, \\ y = \text{konst.}, \end{cases} \quad B = K_1,$$

so können wir uns jetzt in den Ebenen $z = \text{konst.}$ zwei mit dem Flächennetz $x, y, z = \text{konst.}$ und der Kurvenschar K_0 invariant verbundene Kurvenscharen D_1 und D_2 konstruieren. Wir wollen untersuchen, wie die Richtungsfunktionen dieser beiden Kurvenscharen aussehen. Erinnern wir uns, daß wir die Kurvenschar D im zweiten Paragraphen dadurch bekamen, daß wir die Linienelemente von B, die wir an eine Fläche f_0 von $f = \text{konst.}$ angeheftet hatten, mit Hilfe von A auf f_0 projizierten. In unserem Falle ist

nun die Richtung von B in jedem Punkt durch die drei Richtungsfunktionen $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$, die wir wieder abkürzend mit (a, b, c) bezeichnen wollen, festgelegt. Die A-Kurve hat jetzt einfach die Richtung der z-Geraden ($x, y =$ konst.). Projizieren wir nun den Richtungsvektor (a, b, c) von B, den wir uns an einem Punkt der Ebene $z = z_0$ angeheftet denken, mit der z-Geraden auf die Ebene $z = z_0$, so ist klar, daß der projizierte Vektor, der ganz in der Ebene $z = z_0$ liegt, die Komponenten $(a, b, 0)$ hat. Denken wir uns dies nun wieder für den ganzen Raum durchgeführt, so gibt der neue Vektor $(a, b, 0)$ in jedem Punkt die Richtung der Kurvenschar D_1 an. Führen wir genau dasselbe mit K_1 durch, so hat die Kurvenschar D_2 die Richtungsfunktionen $(-a, b, 0)$, da K_1 die Richtungsfunktionen $(-a, b, c)$ hat. Ziehen wir jetzt durch die D_1- bzw. D_2-Kurven in einer bestimmten Ebene $z = z_0$ die K_0- bzw. K_1-Kurven, so entstehen zwei einparametrige Flächenscharen. Die Differentialgleichungen für diese zwei Flächenscharen mögen dann folgende Gestalt haben:

$$\varphi\, dx + dy + \psi\, dz = 0, \tag{4a}$$

$$\bar{\varphi}\, dx + dy + \bar{\psi}\, dz = 0. \tag{4b}$$

Da die Differentialgleichungen integrierbar sind, so bestehen noch die beiden Gleichungen

$$\varphi\, \psi_y + \varphi_z - \psi_x - \psi\, \varphi_y = 0, \tag{5a}$$

$$\bar{\varphi}\, \bar{\psi}_y + \bar{\varphi}_z - \bar{\psi}_x - \bar{\psi}\, \bar{\varphi}_y = 0. \tag{5b}$$

Wegen der Existenz der Diagonalkurvenschar K_3 gilt die Konfiguration der Fig. 6 [siehe § 2 (1)]. Hieraus folgt

$$\varphi_z = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi = \varphi(x, y). \tag{6}$$

Da in der (A, B, f)-Figur (3β) die Kurvenschar K_2 Diagonalkurvenschar ist, so besteht eine der Fig. 6 entsprechende Konfiguration, und hieraus folgt dann wieder

$$\bar{\varphi}_z = 0 \quad \text{oder} \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(x, y). \tag{7}$$

Berücksichtigen wir, daß die D_1- bzw. D_2-Kurven mit den Richtungsfunktionen $(a, b, 0)$ bzw. $(-a, b, 0)$ der Ebene $z = z_0$ in der Flächenschar (4a) bzw. (4b) enthalten sind, so gilt nach (4a) und (4b)

$$\varphi(x, y)\, a(x, y, z_0) + b(x, y, z_0) = 0, \tag{8a}$$

$$-\bar{\varphi}(x, y)\, a(x, y, z_0) + b(x, y, z_0) = 0. \tag{8b}$$

Hiernach besteht

$$\varphi(x, y) = -\bar{\varphi}(x, y). \tag{9}$$

Da $\begin{cases} K_0 \\ K_1 \end{cases}$ mit den Richtungsfunktionen $\begin{cases} a, b, c \\ -a, b, c \end{cases}$ in den Flächenscharen

(4a), (4b) liegen, so gilt unter Berücksichtigung von (9)

$$\varphi a + b + \psi c = 0, \tag{10a}$$

$$\varphi a + b + \bar{\psi} c = 0. \tag{10b}$$

Durch Subtraktion erhalten wir

$$\psi = \bar{\psi}. \tag{11}$$

Berücksichtigen wir (9) und (11) in (5a) und (5b), so besteht

$$\varphi \psi_y - \psi_x - \psi \varphi_y = 0,$$
$$-\varphi \psi_y - \psi_x + \psi \varphi_y = 0.$$

Und hieraus ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\psi_x = 0, \tag{12}$$

$$\varphi \psi_y - \psi \varphi_y = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)_y = 0. \tag{13}$$

Die Gleichungen (7), (12) und (13) ergeben nun

$$\varphi = \varphi(x, y),$$
$$\psi = \psi(y, z),$$
$$\frac{\varphi}{\psi} = \eta(x, z) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(z, y)}.$$

Und danach

$$\varphi = \frac{X(x)}{Y(y)}, \qquad \psi = \frac{Z(z)}{Y(y)}.$$

Die Differentialgleichung (4a) kann somit auf die Form gebracht werden:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0. \tag{14}$$

Nehmen wir jetzt eine zweite Ebene $z = z_1$ und konstruieren mit Hilfe der in der Ebene $z = z_1$ enthaltenen D_1- und D_2-Kurven die entsprechenden Flächenscharen, so kann ganz entsprechend gezeigt werden, daß die Differentialgleichung der Flächenschar, in der K_0 liegt, die Form haben muß:

$$\bar{X} dx + \bar{Y} dy + \bar{Z} dz = 0. \tag{15}$$

Da wir annehmen, daß die D_1- und K-Kurven keine Flächenscharen aufspannen, so sind die Flächenscharen (14) und (15) verschieden. Aus den Differentialgleichungen (14) und (15) ist aber dann ersichtlich, daß K_0 in zwei verschiedenen Flächenscharen liegt, deren jede mit dem Flächennetz $x, y, z = \text{konst.}$ ein Achtflachgewebe bildet. Damit wären wir dann wieder einmal am Ziel.

(Eingegangen am 3. Januar 1932.)

Classificazione secondo Baire delle funzioni continue da una parte e dei loro numeri derivati.

Von

Tullio Viola in Bologna.

Una funzione $F(x)$ della variabile reale x si dice *„continua verso destra“* in un intervallo $\overline{a\,b}$ se, per ogni x di $\overline{a\,b}$, è

$$\lim_{h \to +0} F(x+h) = F(x).$$

Per le funzioni continue verso destra si possono ripetere molte considerazioni che si fanno abitualmente per quelle continue bilateralmente. In particolare si può ricercare se tali funzioni siano derivabili, naturalmente dalla sola parte destra dalla quale sussiste la continuità, oppure, in mancanza della derivata destra $D_+ F(x)$, si può studiare il comportamento dei *„numeri derivati destri“*, che indichiamo con $\overline{D}_+ F(x)$ e $\underline{D}_+ F(x)$, cioè rispettivamente della *„derivata superiore destra“*, o limite massimo del rapporto incrementale destro, e della *„derivata inferiore destra“*, o limite minimo del rapporto incrementale destro.

È degno di nota che a questi numeri derivati destri è possibile estendere, con un' opportuna restrizione, un teorema fondamentale del Denjoy, dato nel suo „Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues“, (Journal de Mathématiques pures et appliquées **1** (1915), p. 149) e che da questo teorema molte proposizioni si possono dedurre.

Delle proprietà generali delle funzioni continue verso destra e dei loro numeri derivati mi sono occupato nella memoria „Funzioni continue da una parte con particolare riguardo alla loro derivabilità unilaterale“ (Annali di Matematica (IV), **9** (1931)[1]). I risultati di detto lavoro e del presente ho d' altronde enunciato nella nota „Sulle funzioni continue da una parte e sulla derivazione unilaterale“ (Bollettino dell' Unione Matematica Italiana **10**, N. 1.). Una dimostrazione del fatto che *la derivata destra di una*

---

[1]) Citerò nel seguito questo lavoro con A, p.... (oppure con A, n....).

funzione continua verso destra e derivabile verso destra è della prima classe di Baire ho data in tre note pubblicate nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (VI) **13**, Fasc. 10, 11, 12. Qui, oltrechè occuparmi della classificazione secondo Baire delle funzioni $\overline{D}_+ F(x)$ e $\underline{D}_+ F(x)$, riprendo il problema da un altro punto di vista in quanto:

1.° do un procedimento per l'effettiva costruzione di una successione di funzioni bilateralmente continue avente per limite la funzione assegnata;

2.° mostro che la successione delle derivate (dei numeri derivati) di queste ha per limite la funzione derivata destra (dei numeri derivati destri, allorchè questi sono finiti in tutto un intervallo) della funzione proposta. In altri termini ne risulta la più precisa proposizione che: *Ogni funzione continua verso destra si può rappresentare come limite di una successione di funzioni continue derivabile termine a termine.*

L'aggregato $\mathfrak{N}$ dei punti di discontinuità di una funzione continua verso destra è numerabile (A, § 2, n.° 4) e basta quest'osservazione a stabilire che *la funzione appartiene alla prima classe di Baire.*

Quanto alle funzioni-numeri derivati, per semplicità d'esposizione tratterò dapprima il caso delle funzioni derivabili verso destra in ogni punto.

§ 1.

Funzioni continue verso destra e derivabili verso destra.

1. Sia $F(x)$ una funzione continua verso destra e derivabile verso destra in tutto un intervallo $\overline{a\,b}$. Ci proponiamo di *costruire una successione di funzioni continue bilateralmente e derivabili verso destra in* $\overline{a\,b}$

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

tali che $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = F(x)$ *e che* $\lim_{n\to\infty} D_+ \varphi_n(x) = D_+ F(x)$; *di dimostrare inoltre che* $D_+ F(x)$ *è limite di rapporti incrementali delle rispettive* $\varphi_n(x)$, *di cui si può assegnare la determinazione.*

2. Sappiamo che l'aggregato $\mathfrak{N}$ dei punti di discontinuità della $F(x)$ è ovunque non denso in $\overline{a\,b}$ (A, § 2, n.° 7). Definiamo la successione di aggregati

$$(1) \qquad \mathfrak{N}^{(0)}, \mathfrak{N}^{(1)}, \mathfrak{N}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{N}^{(r-1)}, \mathfrak{N}^{(r)}, \ldots$$

nel modo seguente. $\mathfrak{N}^{(0)} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}^{(r)}$ è l'aggregato dei punti di $\mathfrak{N}^{(r-1)}$ che sono limiti verso la loro sinistra di punti di $\mathfrak{N}^{(r-1)}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$. Se la successione (1) è illimitata, può darsi che l'aggregato comune a tutti gli $\mathfrak{N}^{(r)}$ non sia vuoto. In caso affermativo lo si indichi con $\mathfrak{N}^{(\omega)}$. Così proseguiamo definendo la successione transfinita di aggregati

$$(2) \qquad \mathfrak{N}^{(0)}, \mathfrak{N}^{(1)}, \mathfrak{N}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{N}^{(\omega)}, \mathfrak{N}^{(\omega+1)}, \ldots, \mathfrak{N}^{(2\omega)}, \ldots$$

nel modo seguente. Se μ è transfinito di prima specie, $\mathfrak{N}^{(\mu)}$ è l'aggregato dei punti di $\mathfrak{N}^{(\mu-1)}$ che sono limiti verso la loro sinistra di punti di $\mathfrak{N}^{(\mu-1)}$; se μ è transfinito di seconda specie, $\mathfrak{N}^{(\mu)}$ è l'aggregato dei punti comuni a tutti gli $\mathfrak{N}^{(\nu)}$ con $\nu < \mu$.

Indichiamo con $C\mathfrak{N}$ l'aggregato che si ottiene da $\mathfrak{N}$ mediante chiusura, cioè aggiungendo ad $\mathfrak{N}$ i punti limiti di $\mathfrak{N}$ che eventualmente non appartengono ad $\mathfrak{N}$. Anche $C\mathfrak{N}$ è ovunque non denso in $\overline{a\,b}$. Indichiamo con

$$(3) \qquad C\mathfrak{N}^{(0)}, C\mathfrak{N}^{(1)}, C\mathfrak{N}^{(2)}, \ldots, C\mathfrak{N}^{(\omega)}, C\mathfrak{N}^{(\omega+1)}, \ldots, C\mathfrak{N}^{(2\omega)}, \ldots$$

gli aggregati che si ottengono rispettivamente dai precedenti (2) mediante chiusura. In A, § 2, n.° 8 dimostro che ciascuno degli aggregati (3) è non denso nel precedente e che esiste un transfinito τ tale che $C\mathfrak{N}^{(\tau+1)}$ è nullo. Se τ è di prima specie è $C\mathfrak{N}^{(\tau)} \neq 0$ ed anche $\mathfrak{N}^{(\tau)} \neq 0$. Se τ è di seconda specie può essere $C\mathfrak{N}^{(\tau)} = \mathfrak{N}^{(\tau)} = 0$.

3. Sia

$$(4) \qquad s_1, s_2, \ldots, s_h, \ldots$$

($s_1 > 1$) una successione crescente di numeri interi positivi. Non è necessario per ora precisare la legge di tale successione: lo faremo al § 2 dove riprenderemo la trattazione per le funzioni continue verso destra in generale ed allora se ne comprenderà lo scopo essenziale.

Sappiamo che la successione transfinita (3), possedendo un ultimo termine, è numerabile. Sappiamo pure che l'insieme degl'intervalli contigui a ciascun aggregato $C\mathfrak{N}^{(\sigma)}$ è esso pure numerabile, che anzi si conosce una legge di numerazione generale valida per tutti i $C\mathfrak{N}^{(\sigma)}$ (quella di disporre tali intervalli in ordine di grandezza). Possiamo dunque disporre l'insieme di tutti gl'intervalli contigui a tutti gli aggregati $C\mathfrak{N}^{(\sigma)}$ in un'unica successione, alla quale facciamo corrispondere, termine a termine la successione (4).

4. Sia $\overline{m\,n}$ un generico intervallo contiguo a $C\mathfrak{N}$. La funzione $F(x)$ è continua in $\overline{m\,n}$ ed è continua oppure discontinua in $\overline{m\,n}$: può avere cioè in $\overline{m\,n}$ il solo punto n come punto di discontinuità.

Diciamo brevemente che $F(x)$ è „unidiscontinua (posteriormente)" rispetto a $C\mathfrak{N}$. Sia

$$\xi = m + \frac{s_h - 1}{s_h}(n - m),$$

ove h è il numero d'ordine che compete ad $\overline{m\,n}$ secondo il n.° 3.

Definiamo la funzione

$$F_1^{(1)}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{per } x \text{ appartenente a } C\mathfrak{N} \\ F(x) & \text{per } x \text{ in } \overline{m\,\xi} \\ \text{lineare in } \overline{\xi\,n}. \end{cases}$$

La funzione $F_1^{(1)}(x)$ è unidiscontinua rispetto a $C\mathfrak{N}^{(1)}$. Infatti $F_1^{(1)}(x)$ è continua in ogni intervallo contiguo a $C\mathfrak{N}$ e in ogni punto isolato di $\mathfrak{N}$. Se $\bar{x}$ è un punto di $C\mathfrak{N}$ limite soltanto verso la sua destra di punti di $\mathfrak{N}$, $F_1^{(1)}(x)$ è continua in $\bar{x}$ non soltanto verso sinistra, ma anche verso destra, per la continuità verso destra della $F(x)$. Se $\bar{x}$ è un punto limite verso la sua sinistra di punti di $\mathfrak{N}$, allora

o non appartiene ad $\mathfrak{N}$ ed è punto di continuità tanto per la $F(x)$ quanto per la $F_1^{(1)}(x)$,

o appartiene ad $\mathfrak{N}$, e precisamente ad $\mathfrak{N}^{(1)}$, ed allora $F(x)$ è discontinua verso sinistra in $\bar{x}$ ed anche $F_1^{(1)}(x)$ lo può essere.

Sia ora $\overline{m\,n}$ un generico intervallo contiguo a $C\mathfrak{N}^{(1)}$. Sia ξ il più piccolo numero di $C\mathfrak{N}$ tale che

$$\xi \geqq m + \frac{s_h - 1}{s_h}(n - m),$$

ove h è il numero d'ordine che compete ad $\overline{m\,n}$ secondo il n.° 3 [2]).

Definiamo la funzione

$$F_1^{(2)}(x) = \begin{cases} F_1^{(1)}(x) & \text{per } x \text{ appartenente a } C\mathfrak{N}^{(1)} \\ F_1^{(2)}(x) & \text{per } x \text{ in } \overline{m\,\xi} \\ \text{lineare in } \overline{\xi\,n}. \end{cases}$$

La funzione $F_1^{(2)}(x)$ è unidiscontinua rispetto a $C\mathfrak{N}^{(2)}$. Così proseguiamo indefinitamente: in generale, costruita la funzione $F_1^{(k)}(x)$ unidiscontinua rispetto a $C\mathfrak{N}^{(k)}$, si indichi con $\overline{m\,n}$ un generico intervallo contiguo a $C\mathfrak{N}^{(k)}$ e con ξ il più piccolo numero di $C\mathfrak{N}^{(k-1)}$ tale che

$$\xi \geqq m + \frac{s_h - 1}{s_h}(n - m)$$

ove h è il numero d'ordine che compete ad $\overline{m\,n}$ secondo il n.° 3.

Definiamo allora la funzione

$$F_1^{(k+1)}(x) = \begin{cases} F_1^{(k)}(x) & \text{per } x \text{ appartenente a } C\mathfrak{N}^{(k)} \\ F_1^{(k)}(x) & \text{per } x \text{ in } \overline{m\,\xi} \\ \text{lineare in } \overline{\xi\,n}. \end{cases}$$

La funzione $F_1^{(k+1)}(x)$ è unidiscontinua rispetto a $C\mathfrak{N}^{(k+1)}$.

5. La successione

$$F_1^{(1)}(x), F_1^{(2)}(x), \ldots, F_1^{(k)}(x), F_1^{(k+1)}(x), \ldots$$

---

[2]) Non poniamo senz'altro $\xi = m + \frac{s_h - 1}{s_h}(n - m)$ per ragioni che si vedranno al n.° 8 ed oltre.

ha per limite una funzione $F_1^{(\omega)}(x)$, unidiscontinua rispetto a $C\mathfrak{N}^{(\omega)}$. Infatti sia $\sigma \equiv \overline{\alpha\,\beta}$ un generico intervallo contiguo a $C\mathfrak{N}^{(\omega)}$. Dividiamo σ in parti mediante i punti

$$a_0 = \alpha + \frac{1}{3}(\beta - \alpha), \quad b_0 = \alpha + \frac{2}{3}(\beta - \alpha),$$

$$a_1 = \frac{\alpha + a_0}{2},\ a_2 = \frac{\alpha + a_1}{2},\ a_3 = \frac{\alpha + a_2}{2},\ \ldots,\ a_n = \frac{\alpha + a_{n-1}}{2},\ \ldots \to \alpha,$$

$$b_1 = \frac{b_0 + \beta}{2},\ b_2 = \frac{b_1 + \beta}{2},\ b_3 = \frac{b_2 + \beta}{2},\ \ldots,\ b_n = \frac{b_{n-1} + \beta}{2},\ \ldots \to \beta.$$

Esiste un indice r_1 tale che, per $l \geqq r_1$, $C\mathfrak{N}^{(l)}$ non ha punti in $a_1\ b_1$ ed esiste un indice t_1 tale che, per qualunque coppia di punti μ appartenente ad $\overline{\alpha\ a_1}$, ν appartenente a $\overline{b_1\ \beta}$, e per $h \geqq t_1$, il punto

$$\mu + \frac{s_h - 1}{s_h}(\nu - \mu)$$

appartiene a $\overline{b_0\ \beta}$.[3]) Dunque per valori k sufficientemente elevati, cioè $\geqq r_1$ e tali che i numeri d'ordine h che secondo il n.° 3 si sono fatti corrispondere ai singoli intervalli contigui a $C\mathfrak{N}^{(k)}$ sono tutti $\geqq t_1$, le funzioni $F_1^{(k)}(x)$ assumono lo stesso valore in ogni punto interno ad $\overline{a_0\ b_0}$. Similmente si mostra che, per valori k sufficientemente elevati, le funzioni $F_1^{(k)}(x)$ assumono lo stesso valore in ogni punto interno ad $\overline{a_1\ b_1}$, ecc.

È anche manifesto che $F_1^{(\omega)}(x)$ è continua verso destra e derivabile verso destra in tutto $\overline{a\ b}$.

6. Sia $\overline{m\ n}$ un generico intervallo contiguo a $C\mathfrak{N}^{(\omega)}$ e sia ξ il più piccolo numero appartenente a qualche $C\mathfrak{N}^{(k)}$ (k intero) tale che

$$\xi \geqq m + \frac{s_h - 1}{s_h}(n - m)$$

ove h è il numero d'ordine che compete ad $\overline{m\ n}$ secondo il n.° 3.

Definiamo la funzione

$$F_1^{(\omega+1)}(x) = \begin{cases} F_1^{(\omega)}(x) & \text{per } x \text{ appartenente a } C\mathfrak{N}^{(\omega)} \\ F_1^{(\omega)}(x) & \text{per } x \text{ in } \overline{m\ \xi} \\ \text{lineare in } \overline{\xi\ n}. \end{cases}$$

---

[3]) Determiniamo t_1. La posizione più sfavorevole della coppia μ, ν affinchè il punto

$$\mu + \frac{s_h - 1}{s_h}(\nu - \mu)$$

(qualunque sia s_h) non appartenga ad $\overline{a_0\ b_0}$ è $\mu \equiv \alpha$, $\nu \equiv b_1 = \alpha + \frac{5}{6}(\beta - \alpha)$. Poniamo per semplicità $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Determiniamo l'intero q tale che $\frac{q-1}{q} \cdot \frac{5}{6} > \frac{2}{3}$. Si trova $q > 5$. Sarà dunque t_1 il più piccolo intero (evidentemente $\leqq 5$) tale che $s_{t_1} > 5$.

La funzione $F_1^{(\omega+1)}(x)$ è unidiscontinua rispetto a $C\mathfrak{N}^{(\omega+1)}$. Così proseguiamo transfinitamente.

7. Essendo $C\mathfrak{N}^{(\tau+1)}$ nullo (n.° 2) è $F_1^{(\tau+1)}(x)$ continua in tutto $\overline{a\ b}$. Poniamo $F_1^{(\tau+1)}(x) = \varphi_1(x)$.

Ripetiamo tutto il procedimento dei n.i 4, 5, 6, sempre a partire dalla funzione $F(x)$, assumendo come successione (4) la successione

$$2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, 2\varepsilon_3, \ldots .$$

Determiniamo in tal modo la successione transfinita di funzioni

$$F_2^{(1)}(x), F_2^{(2)}(x), \ldots, F_2^{(\omega)}(x), F_2^{(\omega+1)}(x), \ldots, F_2^{(2\omega)}(x), \ldots,$$

e diciamo $\varphi_2(x)$ la funzione continua $F_2^{(\tau+1)}(x)$ che si ottiene al limite.

Così proseguiamo indefinitamente: in generale diciamo $\varphi_n(x)$ la funzione continua $F_n^{(\tau+1)}(x)$ che si ottiene come limite del procedimento transfinito analogo a quello dei n.i 4, 5, 6, assumendo come successione (4) la successione

$$n\varepsilon_1, n\varepsilon_2, n\varepsilon_3, \ldots$$

e determinando la successione transfinita di funzioni

$$F_n^{(1)}(x), F_n^{(2)}(x), \ldots, F_n^{(\omega)}(x), F_n^{(\omega+1)}(x), \ldots, F_n^{(2\omega)}(x), \ldots .$$

La successione

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

ha per limite la funzione $F(x)$. Infatti sia $\bar{x}$ un punto qualunque di $\overline{a\ b}$. Voglio mostrare che esiste un indice N tale che, per ogni $n \geqq N$, $\varphi_n(\bar{x})$ ha costantemente il valore $F(\bar{x})$. Più precisamente mostro che esistono un N e un ϱ finito o transfinito tali che per $n \geqq N$ e $\lambda \geqq \varrho$, è

$$F_n^{(\lambda)}(\bar{x}) = F(\bar{x}).$$

Escluso dapprima che $\bar{x}$ appartenga a $C\mathfrak{N}^{(\tau)}$, è determinato un minimo indice ϱ tale che $\bar{x}$ non appartiene a $C\mathfrak{N}^{(\varrho)}$. Sia $\sigma \equiv \overline{\alpha\beta}$ l'intervallo contiguo a $C\mathfrak{N}^{(\varrho)}$ che contiene $\bar{x}$ nel suo interno. Sarà da prendersi N in modo che sia

$$\alpha + \frac{N\varepsilon_1 - 1}{N\varepsilon_1}(\beta - \alpha) > \bar{x}.$$

Allora, per $\lambda \geqq \varrho$ ed $n \geqq N$, si verificano le condizioni enunciate. Nel caso poi che sia $C\mathfrak{N}^{(\tau)} \neq 0$ e che $\bar{x}$ appartenga a $C\mathfrak{N}^{(\tau)}$, *tutte* le funzioni $F_n^{(\lambda)}(x)$ assumono lo stesso valore $F(\bar{x})$ in $\bar{x}$. Dunque, per $n \geqq N$, anche le funzioni $\varphi_n(x)$ che sono limiti delle $F_n^{(\lambda)}(x)$ per λ tendente a $\tau+1$, assumono lo stesso valore $F(\bar{x})$ in $\bar{x}$.

8. Si consideri una $F_n^{(\sigma)}(x)$, con σ arbitrario e con $n \geqq N$, in un intorno destro del punto $\bar{x}$. Per un qualunque valore $x^0 > \bar{x}$ di x possono

darsi due casi: $F_n^{(\sigma)}(x^0) = F(x^0)$, oppure $F_n^{(\sigma)}(x^0) \neq F(x^0)$. Nel primo caso è

$$(6_1) \qquad \frac{F_n^{(\sigma)}(x^0) - F_n^{(\sigma)}(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}} = \frac{F(x^0) - F(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}}.$$

Nel secondo caso $F_n^{(\sigma)}(x)$ ha, in un intorno bilaterale $\overline{x_1 x_2}$ di x^0, andamento lineare. È $F_n^{(\sigma)}(x_1) = F(x_1)$, $F_n^{(\sigma)}(x_2) = F(x_2)$.[4]) I punti x_1, x_2 possono prendersi in un ordine x', x'' tale che

$$(6_2) \qquad \frac{F(x') - F(\bar{x})}{x' - \bar{x}} > \frac{F_n^{(\sigma)}(x^0) - F_n^{(\sigma)}(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}} > \frac{F(x'') - F(\bar{x})}{x'' - \bar{x}}$$

oppure che

$$(6_3) \qquad \frac{F(x') - F(\bar{x})}{x' - \bar{x}} = \frac{F_n^{(\sigma)}(x^0) - F_n^{(\sigma)}(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}} = \frac{F(x'') - F(\bar{x})}{x'' - \bar{x}}.$$

Supponiamo x^0 variabile e tendente dalla destra a $\bar{x}$. Per tutto il tempo che x^0 percorre un intervallo come quello che sopra si è indicato con $\overline{x_1 x_2}$, il rapporto incrementale

$$\frac{F_n^{(\sigma)}(x^0) - F_n^{(\sigma)}(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}}$$

è compreso fra i due valori

$$\frac{F(x') - F(\bar{x})}{x' - \bar{x}} \quad \text{ed} \quad \frac{F(x'') - F(\bar{x})}{x'' - \bar{x}}$$

(x' ed x'' costanti), come si è detto. Quando x^0 non è in un intervallo $\overline{x_1 x_2}$, è

$$\frac{F_n^{(\sigma)}(x^0) - F_n^{(\sigma)}(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}} = \frac{F(x^0) - F(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}}.$$

Sarà quindi $D_+ F_n^{(\sigma)}(\bar{x}) = D_+ F(\bar{x})$. In particolare

$$D_+ \varphi_n(\bar{x}) = D_+ F(\bar{x}).$$

9. Poniamo

$$r_{n,m}(x) = \frac{\varphi_n\left(x + \frac{1}{2^m}\right) - \varphi_n(x)}{\frac{1}{2^m}}, \quad R_n(x) = r_{n,n}(x).$$

Queste funzioni $r_{n,m}(x)$, $R_n(x)$ sono continue in tutto $\overline{a\,b}$. D'altra parte è $\lim_{m \to \infty} r_{n,m}(x) = D_+ \varphi_n(x)$ e, per n sufficientemente elevato, $D_+ \varphi_n(x) = D_+ F(x)$, come si è visto al numero precedente. Possiamo allora concludere che è

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = D_+ F(x).$$

Infatti, se nelle relazioni (6_1), (6_2), (6_3) poniamo $x^0 = \bar{x} + \frac{1}{2^m}$,

---

[4]) Anzi è $F_n^{(\sigma)}(x_1) = F_n^{(\nu)}(x_1)$, $F_n^{(\sigma)}(x_2) = F_n^{(\nu)}(x_2)$, per ogni $\nu < \sigma$.

$\sigma = \tau + 1$, esse diventano rispettivamente

$$(6_1') \qquad r_{n,m}(\bar{x}) = \frac{F\left(\bar{x} + \frac{1}{2^m}\right) - F(\bar{x})}{\frac{1}{2^m}},$$

$$(6_2') \qquad \frac{F(x') - F(\bar{x})}{x' - \bar{x}} > r_{n,m}(\bar{x}) > \frac{F(x'') - F(\bar{x})}{x'' - \bar{x}},$$

$$(6_3') \qquad \frac{F(x') - F(\bar{x})}{x' - \bar{x}} = r_{n,m}(\bar{x}) = \frac{F(x'') - F(\bar{x})}{x'' - \bar{x}}.$$

Prefissato un ε positivo ad arbitrio, determiniamo un δ tale che, se $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$, è

$$\left| D_+ F(\bar{x}) - \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right| < \varepsilon.$$

Esiste certamente un intero $\bar{m}$ tale che, se $m > \bar{m}$ e se $x^0 = \bar{x} + \frac{1}{2^m}$ è interno a un intervallo $\overline{x_1 x_2}$, è $\bar{x} < x_2 < \bar{x} + \delta$.[5]) Allora per le $(6')$ è, per $m > \bar{m}$,

$$| r_{n,m}(\bar{x}) - D_+ F(\bar{x}) | < \varepsilon.$$

Ciò basta per concludere che è $\lim_{n \to \infty} R_n(\bar{x}) = D_+ F(\bar{x})$ com'avevamo affermato.

§ 2.

Funzioni continue verso destra in generale.

10. In questo paragrafo dimostrerò, come ho detto nell'introduzione, che, *se $F(x)$ è una funzione continua verso destra in tutto un intervallo $\overline{ab}$, e se le funzioni-numeri derivati destri $\overline{D}_+ F(x)$, $\underline{D}_+ F(x)$ sono finite in tutto $\overline{ab}$, si può costruire una successione di funzioni bilateralmente continue*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

tali che

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = F(x), \quad \lim_{n \to \infty} \overline{D}_+ \varphi_n(x) = \overline{D}_+ F(x), \quad \lim_{n \to \infty} \underline{D}_+ \varphi_n(x) = \underline{D}_+ F(x),$$

in tutto $\overline{ab}$. Inoltre dimostrerò che se le funzioni $\overline{D}_+ F(x)$, $\underline{D}_+ F(x)$ sono finite in tutto $\overline{ab}$, esse sono di seconda classe in $\overline{ab}$, cioè limiti di successioni di funzioni di prima classe.

Poichè anche in questa ipotesi l'aggregato $\mathfrak{N}$ dei punti di discontinuità della $F(x)$ è non denso in $\overline{ab}$ e valgono identicamente le cose dette

---

[5]) Se $\bar{x} + \delta$ non è interno a un intervallo $\overline{x_1 x_2}$, basta prendere per $\bar{m}$ il più piccolo intero tale che $\frac{1}{2^{\bar{m}}} < \delta$. Se $\bar{x} + \delta$ è interno a un intervallo $\overline{x_1 x_2}$, basta prendere per $\bar{m}$ il più piccolo intero tale che $\frac{1}{2^{\bar{m}}} < x_1 - \bar{x}$.

al § 1, n.° 2 per la successione transfinita (2) di aggregati (A, § 2, n.° 9) noi possiamo riprendere la trattazione del § 1 ed esaminare a qual punto e come essa si modifichi.

Già al n.° 8 la nota [4]) poteva permetterci di ragionare più in generale e di concludere che, al tendere di x^0 dalla destra ad $\bar{x}$, il rapporto incrementale

$$\frac{F_n^{(\sigma)}(x^0) - F_n^{(\sigma)}(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}}$$

varia mantenendosi compreso fra valori del rapporto incrementale

$$\frac{F_n^{(\nu)}(x) - F_n^{(\nu)}(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

per ogni $\nu < \sigma$. Nel caso presente ciò significa che è

$$\overline{D}_+ F_n^{(\nu)}(\bar{x}) \geqq \overline{D}_+ F_n^{(\sigma)}(\bar{x}) \geqq \underline{D}_+ F_n^{(\sigma)}(\bar{x}) \geqq \underline{D}_+ F_n^{(\nu)}(\bar{x})$$

ed in particolare

$$\overline{D}_+ F(\bar{x}) \geqq \overline{D}_+ \varphi_n(\bar{x}) \geqq \underline{D}_+ \varphi_n(\bar{x}) \geqq \underline{D}_+ F(\bar{x}). \tag{7}$$

11. Se il rapporto incrementale destro

$$\frac{F_n^{(1)}(x) - F_n^{(1)}(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

assume un valore λ almeno in un punto x' di un segmento σ complementare a $C\mathfrak{N}^{(1)}$, anche il rapporto incrementale

$$\frac{F_{n+1}^{(1)}(x) - F_{n+1}^{(1)}(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

assume il valore λ almeno in un punto x'' del medesimo segmento σ. Infatti, se x' appartiene a $C\mathfrak{N}$, oppure se x', pur non appartenendo a $C\mathfrak{N}$, è fuori o sul contorno di un segmento parziale $\overline{x_1 x_2}$ di σ in cui $F_n^{(1)}(x)$ ha per definizione andamento lineare, è $x'' \equiv x'$, in caso contrario è x'' in $\overline{x_1 x_2}$ (ma non necessariamente coincidente con x') [6]).

Se il rapporto incrementale destro

$$\frac{F_n^{(\nu)}(x) - F_n^{(\nu)}(\bar{x})}{x - \bar{x}},$$

per ν transfinito qualunque, assume un valore λ almeno in un punto x' di un segmento σ complementare a $C\mathfrak{N}^{(\nu)}$, anche il rapporto incrementale

$$\frac{F_{n+1}^{(\nu)}(x) - F_{n+1}^{(\nu)}(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

assume il valore λ almeno in un punto x'' del medesimo segmento σ.

Lo dimostriamo per induzione, supponendo che la proprietà sia già verificata per tutti i transfiniti minori di ν. Infatti,

---

[6]) Basta osservare che i due rapporti incrementali di $F_n^{(1)}(x)$ e $F_{n+1}^{(1)}(x)$ sono funzioni continue di x che assumono lo stesso valore per $x = x_1$, e per $x = x_2$.

a) se ν è di prima specie, le quattro funzioni

$$F_n^{(\nu)}(x),\ F_n^{(\nu-1)}(x),\ F_{n+1}^{(\nu)}(x),\ F_{n+1}^{(\nu-1)}(x)$$

assumono lo stesso valore rispettivamente in tutti i punti di $C\mathfrak{N}^{(\nu-1)}$ e negli estremi sinistri x_1 dei segmenti parziali $\overline{x_1 x_2}$ di σ in cui $F_n^{(\nu)}(x)$ ha andamento lineare [7]). Perciò nelle parti di σ esterne ai segmenti $\overline{x_1 x_2}$ la proposizione è vera perchè tale la si è supposta per le funzioni $F_n^{(\nu-1)}(x)$, $F_{n+1}^{(\nu-1)}(x)$: se dunque x' è fuori o sul contorno dei segmenti $\overline{x_1 x_2}$ di σ in cui $F_n^{(\nu)}(x)$ ha andamento lineare, è $F_n^{(\nu)}(x') = F_n^{(\nu-1)}(x')$, $F_{n+1}^{(\nu)}(x') = F_{n+1}^{(\nu-1)}(x')$ ed x'' trovasi anch'esso fuori o sul contorno dei segmenti $\overline{x_1 x_2}$. Se invece x' è interno a un $\overline{x_1 x_2}$ ragionando in modo anologo a quanto si è fatto sopra, cioè sempre valendosi della ricordata proprietà delle funzioni continue, si vede che anche x'' è in $\overline{x_1 x_2}$ (ma non necessariamente coincidente con x').

b) Se ν è di seconda specie ricordiamo (n.° 5) che, se $\overline{m n}$ è un intervallo interamente contenuto nell'interno di un intervallo contiguo a $C\mathfrak{N}^{(\nu)}$, esiste un transfinito $\bar{\nu} < \nu$ tale che, per tutti i transfiniti μ compresi fra $\bar{\nu}$ e ν, le funzioni $F_n^{(\mu)}(x)$ assumano gli stessi valori (uguali, per definizione, a quelli della funzione $F_n^{(\nu)}(x)$) in tutti i punti x di $\overline{m n}$. Il confronto delle due funzioni $F_n^{(\nu)}(x)$, $F_{n+1}^{(\nu)}(x)$, per tutti i punti di $\overline{m n}$, si riduce dunque a quello di due funzioni $F_n^{(\mu)}(x)$, $F_{n+1}^{(\mu)}(x)$, dove μ è un transfinito qualunque compreso fra $\bar{\nu}$ e ν.

Ne segue che ad ogni valore del rapporto incrementale destro

$$\frac{F_n^{(\nu)}(x) - F_n^{(\nu)}(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

corrisponde un valore identico del rapporto incrementale

$$\frac{F_{n+1}^{(\nu)}(x) - F_{n+1}^{(\nu)}(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

(ma non viceversa). Dunque è

$$\overline{D}_+ F_{n+1}^{(\nu)}(\bar{x}) \geqq \overline{D}_+ F_n^{(\nu)}(\bar{x}) \geqq \underline{D}_+ F_n^{(\nu)}(\bar{x}) \geqq \underline{D}_+ F_{n+1}^{(\nu)}(\bar{x}),$$

per ogni transfinito ν. In particolare è

$$\overline{D}_+ \varphi_{n+1}(\bar{x}) \geqq \overline{D}_+ \varphi_n(\bar{x}) \geqq \underline{D}_+ \varphi_n(\bar{x}) \geqq \underline{D}_+ \varphi_{n+1}(\bar{x}).$$

La successione

$$\overline{D}_+ \varphi_n(\bar{x}),\ \overline{D}_+ \varphi_{n+1}(\bar{x}),\ \overline{D}_+ \varphi_{n+2}(\bar{x}),\ \ldots$$

è dunque monotona non decrescente e tende ad un limite $\bar{L}$, mentre la successione

$$\underline{D}_+ \varphi_n(\bar{x}),\ \underline{D}_+ \varphi_{n+1}(\bar{x}),\ \underline{D}_+ \varphi_{n+2}(\bar{x}),\ \ldots$$

---

[7]) Cfr. la nota [2]).

è monotona non crescente e tende ad un limite $\underline{L}$. Per la (7) si ha

$$\overline{D}_+ F(\bar{x}) \geqq \overline{L} \geqq \underline{L} \geqq \underline{D}_+ F(\bar{x}). \tag{8}$$

12. Per proseguire nel nostro studio dobbiamo utilizzare, a questo punto, il seguente

Teorema. *Se $F(x)$ è una funzione definita in un intervallo $\overline{hk}$ ed ivi limitata superiormente, se $\overline{mn}$ è un intervallo contenuto interamente in $\overline{hk}$ $(h < m < n \leqq k)$, assegnato ad arbitrio un numero positivo ε, si può determinare un numero p entro $\overline{mn}$ $(m < p < n)$ in modo che, comunque si fissi $\bar{x}$ in $\overline{hm}$, sia*

$$\limsup_{m \leqq x < n} \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} < \limsup_{m \leqq x < p} \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} + \varepsilon.$$

Dimostrazione. Per dimostrarlo osserviamo anzitutto che si può supporre senz'altro x e p anzichè nell'intervallo $\overline{mn}$, in un intervallo più ristretto $\overline{qn}$ $(m < q < n)$ (ove q si può fissare arbitrariamente soddisfacendo a queste condizioni). Ciò equivale a dire che, fissato arbitrariamente un $\delta < n - m$, si può supporre senz'altro $x - \bar{x} > \delta$.

Sia fissato il detto q e sia L il limite superiore di $F(x)$ in $\overline{qn}$.

Assegnato ad arbitrio un $\eta > 0$ si può determinare un r $(q < r < n)$ tale che sia $F(r) > L - \eta$. Dico che si può fissare senz'altro $p = r$. Si ha infatti, per x compreso fra r ed n $(r \leqq x < n)$,

$$\frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{F(x) - F(r)}{x - \bar{x}} + \frac{F(r) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} < \frac{\eta}{x - \bar{x}} + \frac{F(r) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} < \frac{\eta}{\delta} + \frac{F(r) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Distinguiamo allora due casi:

1.° $F(r) > F(\bar{x})$ e quindi $\dfrac{F(r) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} \leqq \dfrac{F(r) - F(\bar{x})}{r - \bar{x}}$. Se si suppone scelto $\eta < \varepsilon\delta$ si ha allora, per tutti i punti x dell'intervallo $\overline{rn}$, $\dfrac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} < \dfrac{F(r) - F(\bar{x})}{r - \bar{x}} + \varepsilon$. Di qua la proposizione.

2.° $F(r) \leqq F(\bar{x})$. Se M è un numero $>$ di tutti i valori di $F(x)$ per $h \leqq x \leqq m$, è $|F(r) - F(\bar{x})| < L + M$.

$$\frac{F(r) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \frac{F(r) - F(\bar{x})}{(x - r) + (r - \bar{x})} = \frac{F(r) - F(\bar{x})}{r - \bar{x}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{x - r}{r - \bar{x}}}.$$

Essendo

$$\frac{1}{1 + \dfrac{x - r}{r - \bar{x}}} > 1 - \frac{x - r}{r - \bar{x}}, \quad \text{e} \quad \frac{F(r) - F(\bar{x})}{r - \bar{x}} \leqq 0,$$

è $$\frac{F(r) - F(\bar{x})}{r - \bar{x}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{x - r}{r - \bar{x}}} < \frac{F(r) - F(\bar{x})}{r - \bar{x}} + \frac{L + M}{r - \bar{x}} \frac{x - r}{r - \bar{x}}.$$

Così infine, per tutti i punti x dell'intervallo $\overline{r\,n}$,

$$\frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} < \frac{\eta}{\delta} + \frac{(L+M)(n-r)}{\delta^2} + \frac{F(r)-F(\bar{x})}{r-\bar{x}}$$
$$< \frac{1}{\delta}\left(\eta + \frac{(L+M)(n-q)}{\delta}\right) + \frac{F(r)-F(\bar{x})}{r-\bar{x}}.$$

Scegliamo allora il numero $n-q$ (e cioè il punto q abbastanza prossimo ad n) e il numero η in modo che $\eta + \frac{(L+M)(n-q)}{\delta} < \varepsilon\delta$. Si ottiene di nuovo

$$\frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} < \frac{F(r)-F(\bar{x})}{r-\bar{x}} + \varepsilon.$$

Si conclude come nel caso precedente.

13. Ci proponiamo ora di disporre della successione (4) in modo da precisare le relazioni (8) nelle

$$\overline{D}_+ F(\bar{x}) = \overline{L} \geqq \underline{L} = \underline{D}_+ F(\bar{x}),$$

per ogni $\bar{x}$ in $\overline{a\,b}$, anzi addirittura in modo che sia

$$(9)\quad \overline{D}_+ F(\bar{x}) = \overline{D}_+ F_n^{(\sigma)}(\bar{x}) = \overline{D}_+ \varphi_n(\bar{x}) \geqq {}_-\varphi_n(\bar{x}) = \underline{D}_+ F_n^{(\sigma)}(\bar{x}) = \underline{D}_+ F(\bar{x})$$

per ogni $n \geqq N$ [8]) e per ogni σ finito o transfinito.

Determiniamo sull'intervallo $\overline{a\,b}$ e da a verso b una successione transfinita di punti a_μ con la legge seguente.

$a_0 \equiv a$, a_r è alla destra di a_{r-1} e tale che in $\overline{a_{r-1}\,a_r}$ è

$$F(a_{r-1}) - 1 < F(x) < F(a_{r-1}) + 1 \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ciò è possibile e con una legge ben precisabile, a causa della continuità di $F(x)$ in a_{r-1} verso destra; $a_\omega = \lim_{r\to\infty} a_r$; $a_{\omega+r}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ a partire da a_ω come a_r a partire da a_0; ecc.

Se un generico intervallo $\overline{m\,n}$ contiguo a un $C\mathfrak{N}^{(\sigma_k)}$ [9]) è interamente contenuto entro un intervallo $\overline{a_\mu\,a_{\mu+1}}$ (μ transfinito), si applicano ad esso le considerazioni svolte nella dimostrazione del teor. del n. prec. sostituendo l'intervallo $\overline{a_\mu\,a_{\mu+1}}$ all'intervallo ivi indicato con $\overline{h\,k}$ e ponendo $\varepsilon = \frac{n-m}{2^k}$. È $L \leqq F(a_\mu) + 1$ e si può scegliere $M = F(a_\mu) + 1$, $\delta = \frac{n-m}{2}$, q tale che $\frac{(L+M)(n-q)}{\delta} < \varepsilon\delta$, η tale che $\eta + \frac{(L+M)(n-q)}{\delta} < \varepsilon\delta$. Così si determina un p in $\overline{m\,n}$ com'è richiesto dal teor. Parimenti si determina un p' in $\overline{m\,n}$ soddisfacente all'analogo teor. relativo al limite inferiore del rapporto incrementale, in modo cioè che, comunque si fissi $\bar{x}$ in $\overline{a_\mu\,m}$, sia

$$\liminf_{m \leqq x < n} \frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} > \liminf_{m \leqq x < p'} \frac{F(x)-F(\bar{x})}{x-\bar{x}} - \varepsilon.$$

---

[8]) V. n.° 7.

[9]) σ_k è l'indice determinato nella numerazione del n.° 3.

Prendiamo s_h in modo che tanto p che p' siano minori di $m + \frac{s_h - 1}{s_h}(n - m)$.[10])

14. Se $\bar{x}$ non è limite verso la sua destra di punti di $C\mathfrak{N}$ le (9) sono senz'altro evidenti. In caso contrario osserviamo anzitutto che $\bar{x}$ è certo interno o al più estremo sinistro di un ben determinato intervallo $\overline{a_\mu\, a_{\mu+1}}$ (n.° 13). Riprendendo allora la considerazione del rapporto incrementale $\frac{F_n^{(1)}(x^0) - F_n^{(1)}(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}}$ in modo analogo a quanto si è fatto al n.° 8, vediamo che, al tendere di x^0 dalla destra a $\bar{x}$,

a) quando x^0 appartiene a $C\mathfrak{N}$ è

$$\frac{F_n^{(1)}(x^0) - F_n^{(1)}(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}} = \frac{F(x^0) - F(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}};$$

b) quando x^0 percorre un segmento $\overline{mn}$ (da n verso m) contiguo a $C\mathfrak{N}$ e interamente contenuto in $\overline{a_\mu\, a_{\mu+1}}$, i limiti d'indeterminazione del rapporto incrementale $\frac{F_n^{(1)}(x^0) - F_n^{(1)}(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}}$ differiscono per meno di $\frac{n-m}{2^{k_0}} < n - m$ [11]) da quelli del rapporto incrementale $\frac{F(x^0) - F(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}}$.

E siccome l'ampiezza di tali intervalli $\overline{mn}$ percorsi da x^0 tende a 0 al tendere di x^0 ad $\bar{x}$, segue che è

$$\overline{D}_+ F(\bar{x}) = \overline{D}_+ F_n^{(1)}(\bar{x}) \geqq \underline{D}_+ F_n^{(1)}(\bar{x}) = \underline{D}_+ F(\bar{x}).$$

15. Se $\bar{x}$ non è limite verso la sua destra di punti di $C\mathfrak{N}^{(1)}$ le (9) sussistono per quanto si è dimostrato al n.° 14. In caso contrario, ragionando come al n.° 14, vediamo che, al tendere di x^0 dalla destra a $\bar{x}$,

a) quando x^0 appartiene a $C\mathfrak{N}^{(1)}$ è

$$\frac{F_n^{(2)}(x^0) - F_n^{(2)}(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}} = \frac{F(x^0) - F(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}};$$

b) quando x^0 percorre un segmento $\overline{mn}$ contiguo a $C\mathfrak{N}^{(1)}$ e interamente contenuto in $\overline{a_\mu\, a_{\mu+1}}$, i limiti d'indeterminazione del rapporto incrementale $\frac{F_n^{(1)}(x^0) - F_n^{(1)}(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}}$ differiscono per meno di $\frac{n' - m'}{2^{k_0}}$ da quelli del rapporto incrementale $\frac{F(x^0) - F(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}}$, essendo $\overline{m'n'}$ il massimo intervallo contiguo a $C\mathfrak{N}$ (o uno dei massimi) contenuto in $\overline{mn}$. Quindi i limiti d'indeterminazione del rapporto incrementale $\frac{F_n^{(2)}(x^0) - F_n^{(2)}(\bar{x})}{x^0 - \bar{x}}$ differiscono

---

[10]) h è il numero d'ordine che compete ad $\overline{mn}$ secondo il n.° 3.

[11]) k_0 tale che $C\mathfrak{N}^{(\sigma_{k_0})} = C\mathfrak{N}$ nella numerazione del n.° 3.

da quelli del rapporto incrementale $\frac{F(x^0)-F(x)}{x^0-\bar{x}}$ per meno di

$$\frac{n'-m'}{2^{k_0}}+\frac{n-m}{2^{k_1}}\leqq(n-m)\left(\frac{1}{2^{k_0}}+\frac{1}{2^{k_1}}\right)<n-m.^{12})$$

Si conclude come sopra

$$\overline{D}_+F(\bar{x})=\overline{D}_+F_n^{(2)}(\bar{x})\geqq\underline{D}_+F_n^{(2)}(\bar{x})=\underline{D}_+F(\bar{x}).$$

Analogamente si ragiona per ogni l intero e si trova che è

$$\overline{D}_+F(\bar{x})=\overline{D}_+F_n^{(l)}(\bar{x})\geqq\underline{D}_+F_n^{(l)}(\bar{x})=\underline{D}_+F(\bar{x}).$$

16. Se $\bar{x}$ non è limite verso la sua destra di punti di $C\mathfrak{N}^{(\omega)}$ le (9) sussistono per quanto si è dimostrato ai numeri precedenti. In caso contrario vediamo che, al tendere di x^0 dalla destra a $\bar{x}$,

a) quando x^0 appartiene a $C\mathfrak{N}^{(\omega)}$ è

$$\frac{F_n^{(\omega)}(x^0)-F_n^{(\omega)}(\bar{x})}{x^0-\bar{x}}=\frac{F(x^0)-F(\bar{x})}{x^0-\bar{x}};$$

b) quando x^0 percorre un segmento $\overline{mn}$ contiguo a $C\mathfrak{N}^{(\omega)}$ e interamente contenuto in $\overline{a_\mu a_{\mu+1}}$, i limiti d'indeterminazione del rapporto incrementale $\frac{F_n^{(\omega)}(x^0)-F_n^{(\omega)}(\bar{x})}{x^0-\bar{x}}$ differiscono da quelli del rapporto incrementale $\frac{F(x^0)-F(\bar{x})}{x^0-\bar{x}}$ per meno di una serie del tipo

$$\frac{n'-m'}{2^{k_0}}+\frac{n''-m''}{2^{k_1}}+\frac{n'''-m'''}{2^{k_2}}+\ldots\leqq(n-m)\left(\frac{1}{2^{k_0}}+\frac{1}{2^{k_1}}+\frac{1}{2^{k_2}}+\ldots\right),$$

essendo $\overline{m'n'}$ il massimo intervallo contiguo a $C\mathfrak{N}$, $\overline{m''n''}$ il massimo contiguo a $C\mathfrak{N}^{(1)}$, $\overline{m'''n'''}$ il massimo contiguo a $C\mathfrak{N}^{(2)}$, ..., contenuti in $\overline{mn}$; dunque ancora per meno di $n-m$. Dunque

$$\overline{D}_+F(\bar{x})=\overline{D}_+F_n^{(\omega)}(\bar{x})\geqq\underline{D}_+F_n^{(\omega)}(\bar{x})=\underline{D}_+F(\bar{x}).$$

Così si prosegue il ragionamento transfinitamente: le (9) valgono in generale.

17. Resta da dimostrare, com'è stato affermato al n.° 10, che *se le funzioni* $\overline{D}_+F(x)$, $\underline{D}_+F(x)$ *sono finite in tutto* $\overline{ab}$ *esse sono di seconda classe in* $\overline{ab}$. All'uopo imitiamo la dimostrazione che si dà dell'analogo teor. nel caso della continuità bilaterale[13]).

La funzione $\varphi_1(x)$ è continua, onde è continua anche la funzione

$$r_1(x,h)=\frac{\varphi_1(x+h)-\varphi_1(x)}{h}\quad\text{per}\quad h\neq 0.$$

---

[12]) k_1 tale che $C\mathfrak{N}^{(\sigma_{k_1})}=C\mathfrak{N}^{(1)}$ nella numerazione del n.° 3.

[13]) Cfr. Lebesgue, Leçons sur l'intégration (Paris, Gauthier Villars, 1928), p. 175.

Dividiamo l'intervallo $\overline{1\ \frac{1}{2}}$ in un numero m_1 sufficientemente grande di parti uguali affinchè, quando h varia in una di queste parti, l'oscillazione di $r_1(x,h)$ resti inferiore ad 1, x essendo costante in un punto qualunque (continuità uniforme delle funzioni di due variabili). Indichiamo con

$$h_{11}, h_{12}, h_{13}, \ldots, h_{1m_1} \quad \text{(in ordine decrescente)}$$

i punti di divisione così stabiliti in $\overline{1\ \frac{1}{2}}$.

La funzione $\varphi_2(x)$ è continua, onde è continua anche la funzione

$$r_2(x,h) = \frac{\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)}{h} \quad \text{per} \quad h \neq 0.$$

Dividiamo l'intervallo $\overline{\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}}$ in un numero m_2 sufficientemente grande di parti uguali affinchè, quando h varia in una di queste parti, l'oscillazione di $r_2(x,h)$ resti inferiore ad $\frac{1}{2}$, x essendo costante in un punto qualunque. Indichiamo con

$$h_{21}, h_{22}, h_{23}, \ldots, h_{2m_2} \quad \text{(in ordine decrescente)}$$

i punti di divisione così stabiliti in $\overline{\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}}$.

Così proseguiamo indefinitamente. In generale dividiamo l'intervallo $\overline{\frac{1}{2^{\nu-1}}\ \frac{1}{2^\nu}}$ in un numero m_ν sufficientemente grande di parti uguali affinchè, quando h varia in una di queste parti, l'oscillazione della funzione, continua per $h \neq 0$,

$$r_\nu(x,h) = \frac{\varphi_\nu(x+h) - \varphi_\nu(x)}{h}$$

resti inferiore ad $\frac{1}{\nu}$, x essendo costante in un punto qualunque. Indichiamo con

$$h_{\nu 1}, h_{\nu 2}, h_{\nu 3}, \ldots, h_{\nu m_\nu} \quad \text{(in ordine decrescente)}$$

i punti di divisione così stabiliti in $\overline{\frac{1}{2^{\nu-1}}\ \frac{1}{2^\nu}}$.

Formiamo la successione di funzioni continue[14])

$$\begin{aligned}
&r_1(x,h_{11}),\ r_1(x,h_{12}),\ \ldots,\ r_1(x,h_{1m_1}),\\
&r_2(x,h_{21}),\ r_2(x,h_{22}),\ \ldots,\ r_2(x,h_{2m_2}),\\
&r_3(x,h_{31}),\ r_3(x,h_{32}),\ \ldots,\ r_3(x,h_{3m_3}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_\nu(x,h_{\nu 1}),\ r_\nu(x,h_{\nu 2}),\ \ldots,\ r_\nu(x,h_{\nu m_\nu}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{10}$$

Dico che i limiti d'indeterminazione di questa successione sono le funzioni

$$\bar{D}_+F(x),\ \underline{D}_+F(x).$$

---

[14]) Si percorra lo specchio per linee.

Infatti, fissato un $\bar{x}$ qualunque, si determini anzitutto l'intero N ad esso corrispondente (n.° 7). Preso poi un ε positivo ad arbitrio, si determini un δ tale che

$$\text{se } 0 < x - \bar{x} < \delta, \quad \text{è } \underline{D}_+ F(\bar{x}) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(\bar{x})}{x - \bar{x}} < \overline{D}_+ F(\bar{x}) + \varepsilon.$$

Sia N' il più piccolo intero tale che $\frac{1}{2^{N'-1}} < \delta$. Per $n >$ del più grande dei due numeri N ed N', è

$$\underline{D}_+ F(\bar{x}) - \varepsilon < r_n(\bar{x}, h_{ni}) < \overline{D}_+ F(\bar{x}) + \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_n)$$

(cfr. n.° 10).

Dunque il limite superiore d'indeterminazione della successione (10) non può essere $> \overline{D}_+ F(\bar{x})$, mentre il limite inferiore d'indeterminazione non può essere $< \underline{D}_+ F(\bar{x})$.

18. Fissiamo un n qualunque $> N$. Poichè, come si è visto al n.° 16, è

$$\overline{D}_+ F(\bar{x}) = \overline{D}_+ \varphi_n(\bar{x}) \geqq \underline{D}_+ \varphi_n(\bar{x}) = \underline{D}_+ F(\bar{x}),$$

esiste una successione decrescente di punti

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r, \ldots, \tag{11}$$

avente per limite il punto $\bar{x}$, tale che

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\varphi_n(x_r) - \varphi_n(\bar{x})}{x_r - \bar{x}} = \overline{D}_+ F(\bar{x}).^{15})$$

Se uno generico x_r di questi punti è interno ad uno dei segmenti $\overline{x' x''}$ in cui la $\varphi_n(x)$ ha, per definizione, andamento lineare, uno degli estremi di tale segmento, per es. l'estremo x', è tale che $F(x') = \varphi_n(x')$ e che

$$\frac{F(x') - F(\bar{x})}{x' - \bar{x}} = \frac{\varphi_n(x') - \varphi_n(\bar{x})}{x' - \bar{x}} \geqq \frac{\varphi_n(x_r) - \varphi_n(\bar{x})}{x_r - \bar{x}}.^{16})$$

Al punto x_r si può dunque sostituire quel punto x'. Ciò significa che si può senz'altro supporre di aver scelta la successione (11) in modo che essa non contenga nessun punto che sia interno ad alcuno dei segmenti in cui la $\varphi_n(x)$ ha, per definizione, andamento lineare. A più forte ragione ogni x_r sarà esterno od estremo a tutti i segmenti in cui hanno, per definizione, andamento lineare le funzioni

$$\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \varphi_{n+3}(x), \ldots .$$

Sarà dunque, per ogni r,

$$\varphi_n(x_r) = \varphi_{n+1}(x_r) = \varphi_{n+2}(x_r) = \ldots = F(x_r).$$

---

[15]) Si può regolarizzare la scelta della successione (11) in modo da evitare il postulato di Zermelo.

[16]) Cfr. il n.° 8.

Perciò, essendo

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\varphi_n(x_r)-\varphi_n(\bar{x})}{x_r-\bar{x}}=\overline{D}_+F(\bar{x}),$$

potrà pure scriversi, immaginando di applicare un procedimento diagonale,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\varphi_{n+r}(x_r)-\varphi_{n+r}(\bar{x})}{x_r-\bar{x}}=\overline{D}_+F(\bar{x}),$$

od anche, più in generale,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\varphi_{n+k}(x_r)-\varphi_{n+k}(\bar{x})}{x_r-\bar{x}}=\overline{D}_+F(\bar{x}), \tag{12}$$

essendo k un intero comunque variabile al variare di r.

19. Costruita la successione (11) relativa al punto $\bar{x}$, sia

$$\overline{\bar{x}+\frac{1}{2^{n-1}}\quad\bar{x}+\frac{1}{2^n}}$$

($n>N$) un intervallo contenente un punto x_r. Sia h_{nj_r} l'ultimo punto dell'insieme

$$h_{n1}, h_{n2}, \ldots, h_{nm_n}$$

tale che $\bar{x}+h_{nj_r}\geqq x_r$. È

$$\left|\frac{\varphi_n(\bar{x}+h_{nj_r})-\varphi_n(\bar{x})}{h_{nj_r}}-\frac{\varphi_n(x_r)-\varphi_n(\bar{x})}{x_r-\bar{x}}\right|<\frac{1}{n},$$

cioè (n.° 17)

$$\left|r_n(\bar{x},h_{nj_r})-\frac{\varphi_n(x_r)-\varphi_n(\bar{x})}{x_r-\bar{x}}\right|<\frac{1}{n}.$$

Potendosi ripetere il ragionamento per ogni x_r $(r\to\infty)$, si vede che, dalla successione (10) calcolata nel punto $\bar{x}$, si può estrarre una successione di valori

$$r_{n_0}(\bar{x},h_{n_0j_r}),\ r_{n_1}(\bar{x},h_{n_1j_{r+1}}),\ r_{n_2}(\bar{x},h_{n_2j_{r+2}}),\ldots,\ ^{17})$$

che, per la (12), tende al limite $\overline{D}_+F(\bar{x})$.

Dunque il limite superiore d'indeterminazione della successione (10) nel punto $\bar{x}$ è $=\overline{D}_+F(\bar{x})$. Analogamente si dimostra che il limite inferiore d'indeterminazione è $=\underline{D}_+F(\bar{x})$.

Poichè è noto[18]) che i limiti d'indeterminazione di una successione di funzioni continue sono funzioni di seconda classe, resta dimostrato quanto abbiamo enunciato al principio del n.° 17.

---

[17]) $n_0, n_1, n_2, \ldots$, successione non descrescente di numeri interi tendente ad ∞

[18]) Cfr. Lebesgue, loc. cit. p. 175.

(Eingegangen am 4. Januar 1932.)

Über den Primzahlsatz von Herrn Hoheisel.

Von

Hans Heilbronn in Göttingen.[1])

Inhaltsübersicht.

Seite

Inhaltsübersicht 394
Einleitung 394
Bezeichnungen 397
§ 1. Asymptotische Entwicklung von $L(s, \chi)$ und $L'(s, \chi)$ 398
§ 2. Der Littlewoodsche Satz über die Nullstellen von $L(s, \chi)$ 402
§ 3. Hilfssätze über die Teilerzahlen 413
§ 4. Asymptotische Entwicklung von $\frac{1}{L(s, \chi)}$ und $\frac{-L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}$ 416
§ 5. Beweis der Hauptsätze 418

Einleitung.

Herr Hoheisel[2]) bewies kürzlich den interessanten

Satz 1. *Es sei $\pi(x)$ für $x \geqq 2$ die Anzahl der x nicht übersteigenden Primzahlen. Dann gibt es ein positives*[3]) *$a_1 < 1$ derart, daß*

$$\lim_{x=\infty} \{\pi(x + x^{a_1}) - \pi(x)\} \frac{\log x}{x^{a_1}} = 1. \tag{1}$$

Für diesen Satz gebe ich in dieser Arbeit einen neuen Beweis, der sich von dem Beweis von Herrn Hoheisel in der Hauptsache dadurch unterscheidet, daß ich die Riemannsche Zetafunktion nur in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$ betrachte. Über ihre Nullstellen benutze ich daher nur

---

[1]) Diese Arbeit hat der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Inauguraldissertation vorgelegen.

[2]) Guido Hoheisel, Primzahlprobleme in der Analysis, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, physik.-math. Klasse, 1930, S. 580–588.

[3]) $a_1, a_2, \ldots$ bezeichnen im folgenden positive, absolute Konstanten.

den Satz von Herrn Littlewood[4]):

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad t \geqq a_2, \quad \sigma \geqq 1 - a_3 \frac{\log\log t}{\log t}, \tag{2}$$

den auch Herr Hoheisel zum Beweise von Satz 1 verwendet. Im Gegensatz zu Herrn Hoheisel benutze ich nicht:

1. Die Riemannsche Funktionalgleichung von $\zeta(s)$.
2. Die Hadamardsche Produktdarstellung von $\zeta(s)$.
3. Den Carlsonschen Satz über die Nullstellen von $\zeta(s)$, den Herr Hoheisel noch verschärft hat.

Durch diese Vereinfachungen wird mein Beweis unabhängig von der Tatsache, daß die Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$, auf deren Studium das Problem der Verteilung der Primzahlen sich leicht zurückführen läßt, die logarithmische Ableitung der meromorphen Funktion $\zeta(s)$ ist. Infolgedessen ist meine Beweismethode auch auf andere Dirichletsche Reihen anwendbar, z. B. auf die Funktion $\frac{1}{\zeta(s)}$, und ich erhalte als Analogon zu Satz 1 den

Satz 2. *Es sei $\mu(n)$ die Möbiussche Funktion; dann ist*

$$\lim_{x=\infty} x^{-a_1} \sum_{x < n \leqq x + x^{a_1}} \mu(n) = 0. \tag{3}$$

Für die Konstante a_1 ergibt sich als hinreichende Bedingung[5])

$$1 - \frac{1}{4 + \frac{5}{a_3}} < a_1 < 1, \tag{4}$$

wo a_3 die Konstante aus dem obengenannten Littlewoodschen Satze ist.

Da es keine große Mehrarbeit erfordert, beweise ich statt der Sätze 1 und 2 sogleich die entsprechenden Sätze für die arithmetische Progression:

Satz 3. *Es seien k und l natürliche, teilerfremde Zahlen. $\pi(x; k, l)$ bezeichne für $x \geqq 2$ die Anzahl der x nicht übersteigenden Primzahlen $p \equiv l \pmod{k}$. Dann gibt es ein $a_4 < 1$, so daß*

$$\lim_{x=\infty} \{\pi(x + x^{a_4}; k, l) - \pi(x; k, l)\} \frac{\log x}{x^{a_4}} = \frac{1}{\varphi(k)}. \tag{5}$$

---

[4]) J. E. Littlewood, Researches in the Theory of the Riemann ζ-Function, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. II, 20 (1922), p. XXV. Vgl. auch Edmund Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie 2 (1927), Satz 397.

[5]) Herr Hoheisel erhält die (weniger leistende) Bedingung

$$1 - \frac{1}{4 + \frac{6}{a_3}} < a_1 < 1.$$

Satz 4. *Es seien k und l natürliche, teilerfremde Zahlen. Dann ist*

$$\lim_{x=\infty} x^{-a_4} \sum_{\substack{x<n\leqq x+x^{a_4} \\ n\equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} \mu(n) = 0. \tag{6}$$

Zum Beweis der Sätze 3 und 4 brauche ich natürlich den Littlewoodschen Satz in der allgemeineren Form[6]):

$$L(s,\chi) \neq 0 \quad \text{für} \quad t \geqq b_1, \quad \sigma \geqq 1 - a_5 \frac{\log\log t}{\log t}. \tag{7}$$

Hier ist $L(s,\chi)$ die zu einem Charakter $\chi \,(\mathrm{mod}\, k)$ gehörige L-Reihe; b_1 bezeichnet eine positive, nur von k abhängige Konstante. Als hinreichende Bedingung für a_4 finde ich (analog zu (4)):

$$1 - \frac{1}{4 + \frac{5}{a_5}} < a_4 < 1. \tag{8}$$

Ich werde im folgenden zeigen, daß diese Landausche Verallgemeinerung des Littlewoodschen Satzes mit $a_5 = \frac{1}{49{,}13}$ richtig ist. Da nun

$$1 - \frac{1}{4 + \frac{5}{\frac{1}{49{,}13}}} = 1 - \frac{1}{4 + 245{,}65} < 1 - \frac{1}{250} < 1 \tag{9}$$

ist, folgt aus (8), daß

$$a_1 = a_4 = 1 - \frac{1}{250} \tag{10}$$

Konstanten sind, für die die Sätze 1 bis 4 richtig sind. Damit ergibt sich als Korollar zu Satz 3 der

Satz 5. *Zu jeder natürlichen Zahl k gibt es ein $x_k \geqq 2$, so daß, wenn l eine natürliche, zu k teilerfremde Zahl ist, für $x \geqq x_k$ zwischen x^{250} (exkl.) und $(x+1)^{250}$ (exkl.) stets eine Primzahl $p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)$ liegt.*

Beweis. Es ist für $x \geqq 2$

$$(x+1)^{250} > x^{250} + x^{249}. \tag{11}$$

also nach Satz 3

$$\begin{aligned} \pi((x+1)^{250}; k, l) - \pi(x^{250}; k, l) &\geqq \pi(x^{250} + x^{249}; k, l) - \pi(x^{250}; k, l) \\ &= \pi\left(x^{250} + (x^{250})^{1-\frac{1}{250}}; k, l\right) - \pi(x^{250}; k, l) \sim \frac{1}{\varphi(k)} \frac{(x^{250})^{1-\frac{1}{250}}}{\log x^{250}}, \end{aligned} \tag{12}$$

wo die rechte Seite mit wachsendem x über alle Grenzen wächst.

---

[6]) Siehe Landau, loc. cit.

In § 1 wird eine von den Herren Hardy und Littlewood[7]) für $\zeta(s)$ bewiesene Entwicklung auf die Dirichletschen L-Reihen und ihre ersten Ableitungen übertragen.

In § 2 beweise ich den oben zitierten Littlewood-Landauschen Satz von neuem, um ein möglichst großes a_5 zu gewinnen, und leite dann daraus bekannte Abschätzungen für $\frac{L'}{L}(s, \chi)$ und $\frac{1}{L(s, \chi)}$ ab.

In § 3 folgen einige elementare Ungleichungen über die Teilerzahlen, um eine Integralabschätzung zu beweisen, die in ähnlicher Form auch bei Herrn Hoheisel zum Beweise des Carlsonschen Satzes auftritt. Hierbei bediene ich mich einer elementaren zahlentheoretischen Methode von Herrn Ingham[8]).

In § 4 tritt der entscheidende Hilfssatz auf. Er liefert eine Darstellung von $\frac{1}{L(s, \chi)}$ bzw. $-\frac{L'}{L}(s, \chi)$ am Rande des kritischen Streifens als endliche Dirichletsche Reihe + einem „kleinen" Fehlerglied + einem Glied, das zwar nicht „klein", wohl aber „im Mittel klein" ist, was genügt, um in § 5 die Sätze 3 und 4 zu beweisen.

Bezeichnungen.

Dauernd seien zwei natürliche, teilerfremde Zahlen k und l gegeben.

$\chi(n)$ bezeichne einen Dirichletschen Charakter mod k.

$a_1, \ldots, a_{13}$ bezeichnen absolute, positive Konstanten.

$b_1, \ldots, b_6$ bezeichnen positive Konstanten, die nur von k abhängen.

O- und o-Abschätzungen gelten *bei festem k gleichmäßig in allen übrigen Variablen*[9]).

Komplexe Integrale werden stets über einen geraden Weg erstreckt, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

$d_r(n)$ bezeichne die Anzahl der Zerlegungen der natürlichen Zahl n in r positive ganzzahlige Faktoren, wobei die Reihenfolge der Faktoren berücksichtigt wird (tritt nur für $r = 2, 3, 4$ auf); für $d_2(n)$ wird kurz $d(n)$ geschrieben.

---

[7]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, The zeros of Riemann's Zeta-Function on the critical line, Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 283–317; der erwähnte Spezialfall ist ungefähr das Lemma 2 dieser Arbeit.

[8]) A. E. Ingham, Some asymptotic formulae in the theory of numbers, The Journal of The London Mathematical Society 2 (1927), p. 202–208.

[9]) $f = O(g)$ bedeute, $|f| < b\,g$ für alle in der betreffenden Voraussetzung zugelassenen Werte der Argumente, wo b nur von k abhängt. $f(z; z_1, \ldots, z_n) = o(g(z; z_1, \ldots, z_n))$ für $z \to \infty$ bedeutet, für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\omega = \omega(\varepsilon, k) > 0$, das nur von ε und k abhängt, so daß für alle in der Voraussetzung zugelassenen Werte $z_1, \ldots, z_n$ für $z \geqq \omega$ stets $|f(z; z_1, \ldots, z_n)| < \varepsilon\, g(z; z_1, \ldots, z_n)$.

$\Lambda(n)$, $\mu(n)$, $\varphi(n)$ haben als Funktionen der natürlichen Zahl n die übliche Bedeutung: Es ist

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, \text{ wenn } n = p^\alpha, \ p \text{ Primzahl}, \ \alpha \geqq 1 \text{ ganz}, \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ für } n = 1, \\ (-1)^r, \text{ wenn } n \text{ Produkt von } r \text{ verschiedenen Primzahlen ist}, \\ 0, \text{ wenn } n \text{ durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist}, \end{cases}$$

$\varphi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Restklassen mod n.

Stets ist $s = \sigma + it$, $\sigma = \Re s$;

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad \text{für} \quad \sigma > 1; \tag{13}$$

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+w)^{-s} \quad \text{für} \quad \sigma > 1, \ 0 < w \leqq 1; \tag{14}$$

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \quad \text{für} \quad \sigma > 1. \tag{15}$$

Ich erinnere an die für $\sigma > 1$ gültigen Identitäten:

$$L(s, \chi) = k^{-s} \sum_{q=1}^{k} \chi(q) \zeta\left(s, \frac{q}{k}\right); \tag{16}$$

$$\frac{-L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) n^{-s}; \tag{17}$$

$$\frac{1}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \mu(n) n^{-s}. \tag{18}$$

§ 1.

Asymptotische Entwicklung von $L(s, \chi)$ und $L'(s, \chi)$.

Hilfssatz 1. *Für* $2 \leqq t \leqq \pi T$, $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 3$, $0 < w \leqq 1$, *ganzes* $m \neq 0$ *ist*

$$\int_T^{\infty} (u+w)^{-s} e^{2\pi i m u} du = -\frac{1}{2\pi i m} e^{2\pi i m T} (T+w)^{-s} + O\left(\frac{t T^{-1-\sigma}}{m^2}\right). \tag{19}$$

Beweis. Durch partielle Integration erhält man

$$\int_T^{\infty} (u+w)^{-s} e^{2\pi i m u} du \tag{20}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i m} e^{2\pi i m T} (T+w)^{-s} + \frac{s}{2\pi i m} \int_T^{\infty} (u+w)^{-s-1} e^{2\pi i m u} du.$$

Für $u \geqq T$ strebt der Ausdruck

$$\frac{(u+w)^{-\sigma-1}}{-\frac{t}{u+w}+2\pi m} = \frac{1}{(u+w)^{\sigma}(2\pi m(u+w)-t)} \tag{21}$$

mit wachsendem u monoton gegen 0. Für $u = T$ ist der absolute Betrag von (21) gleich

$$\frac{(T+w)^{-\sigma-1}}{\left|-\frac{t}{T+w}+2\pi m\right|} \leqq \frac{T^{-\sigma-1}}{2\pi|m|-\pi} \leqq \frac{T^{-\sigma-1}}{\pi|m|}. \tag{22}$$

Also ist nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_T^{\infty}(u+w)^{-s-1}e^{2\pi i m u}\,du = \int_T^{\infty}(u+w)^{-\sigma-1}e^{i(-t\log(u+w)+2\pi m u)}\,du \tag{23}$$

$$= \int_T^{\infty}(u+w)^{-\sigma-1}\frac{1}{-\frac{t}{u+w}+2\pi m}e^{i(-t\log(u+w)+2\pi m u)}d(-t\log(u+w)+2\pi m u)$$

$$= O\left(\frac{T^{-1-\sigma}}{|m|}\right) \text{ nach (22).}$$

Aus (20) und (23) folgt die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Für* $2 < t < \pi T$, $\frac{1}{2} < \sigma < 3$, $0 < w \leqq 1$, *ganzes* T *ist*

$$g(s) = g(s;T,w) = \sum_{m=1}^{\infty}\int_T^{\infty}(u+w)^{-s}(e^{2\pi i m u}+e^{-2\pi i m u})\,du \text{ konvergent,} \tag{24}$$

$$g(s) \text{ regulär,} \tag{25}$$

$$g(s) = O\left(\frac{T^{1-\sigma}}{t}\right). \tag{26}$$

Beweis. Für ganzes $m > 0$ gilt, da auch T ganz ist,

$$\frac{-1}{2\pi i m}e^{2\pi i m T}+\frac{-1}{2\pi i(-m)}e^{2\pi i(-m)T} = 0. \tag{27}$$

Daher ist nach Hilfssatz 1

$$\int_T^{\infty}(u+w)^{-s}(e^{2\pi i m u}+e^{-2\pi i m u})\,du = O\left(\frac{t\,T^{-1-\sigma}}{m^2}\right), \tag{28}$$

woraus sofort (24) folgt.

Da nach (28) die Reihe gleichmäßig in s konvergiert, genügt es zum Beweise von (25), zu zeigen, daß jedes der Integrale in s regulär ist, was durch (20) in Evidenz gesetzt wird. Damit ist (25) bewiesen.

Nach (28) ist

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty}O\left(\frac{t\,T^{-1-\sigma}}{m^2}\right) = O(t\,T^{-1-\sigma}) = O\left(\frac{T^{1-\sigma}}{t}\right). \tag{29}$$

Hilfssatz 3. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 2 ist*

$$\zeta(s,w) \text{ regulär}, \tag{30}$$

$$\zeta(s,w)=\sum_{n=0}^{T-1}(n+w)^{-s}+\frac{1}{2}(T+w)^{-s}+g(s;T,w)-\frac{(T+w)^{1-s}}{1-s}, \tag{31}$$

$$\zeta(s,w)=\sum_{n=0}^{T-1}(n+w)^{-s}+O\left(\frac{T^{1-\sigma}}{t}\right). \tag{32}$$

Beweis. Es sei zunächst $\sigma>1$. Dann ist nach der Dirichletschen Summenformel für ganzes $V>T$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=T}^{V}(n+w)^{-s} \qquad\qquad (33)\\
&=\tfrac{1}{2}\{(T+w)^{-s}+(V+w)^{-s}\}+\lim_{N=\infty}\sum_{m=-N}^{N}\int_{T}^{V}(u+w)^{-s}e^{2\pi imu}\,du\\
&=\tfrac{1}{2}\{(T+w)^{-s}+(V+w)^{-s}\}+\int_{T}^{V}(u+w)^{-s}\,du\\
&\qquad+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{T}^{V}(u+w)^{-s}(e^{2\pi imu}+e^{-2\pi imu})\,du\\
&=\tfrac{1}{2}\{(T+w)^{-s}+(V+w)^{-s}\}+\frac{(V+w)^{1-s}}{1-s}-\frac{(T+w)^{1-s}}{1-s}\\
&\qquad+g(s;T,w)-g(s;V,w),
\end{aligned}$$

wenn $g(s;T,w)$ und $g(s;V,w)$ die Bedeutung aus Hilfssatz 2 haben. Nach (26) ist

$$\lim_{V=\infty}g(s;V,w)=0; \tag{34}$$

also folgt aus (33), wenn V gegen ∞ geht:

$$\sum_{n=T}^{\infty}(n+w)^{-s}=\frac{1}{2}(T+w)^{-s}-\frac{(T+w)^{1-s}}{1-s}+g(s;T,w). \tag{35}$$

Aus (35) und (14) folgt sofort (31) für $\sigma>1$. Da die in (31) auf der rechten Seite auftretenden Funktionen für alle s der Voraussetzung regulär sind nach (25), gelten (31) und (30) für alle unsere s. (32) aber folgt sofort aus (31) und (26).

Hilfssatz 4. *Für* $2<t<\pi T$, $\frac{1}{2}<\sigma<3$ *ist*

$$L(s,\chi) \text{ regulär}, \tag{36}$$

$$L(s,\chi)=\sum_{1\leqq r\leqq kT}\chi(r)r^{-s}+O\left(\frac{T^{1-\sigma}}{t}\right). \tag{37}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei T ganz. Sonst betrachte man $[T]+1$ statt T. Das geht wegen

$$(38) \qquad \left| \sum_{kT < r \leqq k([T]+1)} \chi(r) r^{-s} \right| \leqq k(kT)^{-\sigma} = O\left(\frac{T^{1-\sigma}}{t}\right).$$

Aus (16) folgt zunächst (36) nach (30). Ferner folgt aus (16) und (32)

$$(39) \qquad L(s,\chi) = k^{-s} \sum_{q=1}^{k} \chi(q) \left\{ \sum_{n=0}^{T-1} \left(n + \frac{q}{k}\right)^{-s} + O\left(\frac{T^{1-\sigma}}{t}\right) \right\}$$

$$= \sum_{r=1}^{kT} \chi(r) r^{-s} + O\left(\frac{T^{1-\sigma}}{t}\right).$$

Hilfssatz 5. *Für* $3 \leqq t \leqq T$, $\frac{3}{4} \leqq \sigma \leqq 2$ *ist*

$$(40) \qquad -L'(s,\chi) = \sum_{1 \leqq r \leqq kT} \chi(r) \log r \, r^{-s} + O\left(\log T \frac{T^{1-\sigma}}{t}\right).$$

Beweis. Setzt man

$$(41) \qquad h(s) = L(s,\chi) - \sum_{1 \leqq r \leqq kT} \chi(r) r^{-s},$$

so ist $h(s)$ nach Hilfssatz 4 für alle s der Voraussetzung von Hilfssatz 4 regulär, und es genügt zum Beweise von (40),

$$(42) \qquad h'(s) = O\left(\log T \frac{T^{1-\sigma}}{t}\right)$$

für alle s der Voraussetzung von Hilfssatz 5 zu zeigen. Es sei nunmehr $s_0 = \sigma_0 + i t_0$ mit

$$(43) \qquad \frac{3}{4} \leqq \sigma_0 \leqq 2, \; 3 \leqq t_0 \leqq T$$

beliebig, aber fest gewählt. Dann genügen alle s mit

$$(44) \qquad |s - s_0| \leqq \frac{1}{4 \log T} \left(< \frac{1}{4}\right)$$

den Voraussetzungen von Hilfssatz 4; es ist also für jedes s, das auf dem Kreise (44) liegt,

$$(45) \qquad h(s) = O\left(\frac{T^{1-\sigma}}{t}\right) = O\left(\frac{T^{1-\sigma_0+\frac{1}{4\log T}}}{t_0}\right) = O\left(\frac{T^{1-\sigma_0}}{t_0}\right).$$

Also ist nach Cauchy:

$$(46) \qquad |h'(s_0)| \leqq 4 \log T \, O\left(\frac{T^{1-\sigma_0}}{t_0}\right).$$

Damit ist (42), also auch (40) bewiesen.

§ 2.

Der Littlewoodsche Satz über die Nullstellen von $L(s, \chi)$.

Hilfssatz 6. *Für* $\xi > 0$, $0 < \sigma < 1$ *ist*

$$\frac{1-\sigma}{\xi} - \frac{2^{-[\xi]}}{\xi} + \frac{2^{-[\xi]}}{[\xi]+2} < \log 2 \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}. \tag{47}$$

Beweis. Für reelles η ist

$$2^{\eta} - \eta > 0 \tag{48}$$

und

$$\eta(2^{\eta}-1) \geqq 0. \tag{49}$$

Also ist

$$\xi(2^{\eta}-\eta) + \eta(2^{\eta}-1) > 0, \tag{50}$$

$$2^{\eta}(\xi+\eta) - \eta(\xi+1) > 0. \tag{51}$$

Also ist für $\eta > -\xi$

$$\frac{2^{\eta}}{\xi(\xi+1)} - \frac{\eta}{\xi(\xi+\eta)} > 0, \tag{52}$$

$$2^{\eta}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi+1}\right) - \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi+\eta} > 0. \tag{53}$$

Setzt man

$$\eta = \frac{\log \frac{1}{1-\sigma}}{\log 2} - \xi, \tag{54}$$

so folgt aus (53)

$$\frac{1}{1-\sigma} 2^{-\xi}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi+1}\right) - \frac{1}{\xi} + \frac{\log 2}{\log \frac{1}{1-\sigma}} > 0, \tag{55}$$

$$2^{-[\xi]}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{[\xi]+2}\right) - \frac{1-\sigma}{\xi} + (1-\sigma)\frac{\log 2}{\log \frac{1}{1-\sigma}} > 0. \tag{56}$$

Das gibt die Behauptung.

Hilfssatz 7. *Für* $\xi \geqq \frac{3}{2}$ *ist*

$$-\frac{1}{\xi} + \frac{1}{[\xi]+2} \geqq -\frac{1}{[\xi]+2}. \tag{57}$$

Beweis. Für $\xi \geqq 2$ ist

$$2\xi \geqq \xi + 2 \geqq [\xi] + 2, \tag{58}$$

für $\frac{3}{2} \leqq \xi < 2$ ist

$$2\xi \geqq 3 = [\xi] + 2, \tag{59}$$

also für $\xi \geqq \frac{3}{2}$

$$2\xi \geqq [\xi] + 2, \quad \frac{1}{\xi} \leqq \frac{2}{[\xi]+2}, \tag{60}$$

woraus die Behauptung folgt.

Hilfssatz 8. *Für* $3 \leqq t$, $0 < w \leqq 1$, $0 < \sigma < 1$, $r > 0$, $R = 2^{r-1}$, $1 \leqq N \leqq N' < 2N$, $N \leqq t$ *ist, wenn* r, N, N' *ganz sind,*

$$\left| \sum_{n=N}^{N'} (n+w)^{-s} \right| \leqq a_6 N^{1-\sigma} \left(N^{-\frac{1}{R}} t^{\frac{1}{R(r+1)}} + t^{-\frac{1}{R(r+1)}} \right) \log t. \tag{61}$$

Beweis. Siehe Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Band 2, Satz 389[10]).

Hilfssatz 9[11]). *Für* $\frac{3}{4} \leqq \sigma < 1$, $t \geqq 3$, $0 < w \leqq 1$ *ist*

$$\zeta(s, w) - w^{-s} = O\left(t^{\log 2 \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \log^2 t \right). \tag{62}$$

Beweis. Nach Hilfssatz 3 mit $T = [t] + 1$ ist

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^{[t]} (n+w)^{-s} + O(1). \tag{63}$$

Ich zerteile die Summe folgendermaßen:

$$\sum_{n=0}^{[t]} = \sum_{n=0}^{0} + \sum_{n=1}^{1} + \sum_{n=2}^{3} + \sum_{n=4}^{7} + \cdots + \sum_{n=2^{\left[\frac{\log t}{\log 2}\right]}}^{[t]}. \tag{64}$$

Das geht, denn es ist

$$2^{\left[\frac{\log t}{\log 2}\right]} \leqq 2^{\frac{\log t}{\log 2}} = t < 2^{\left[\frac{\log t}{\log 2}\right]+1}, \tag{65}$$

$$2^{\left[\frac{\log t}{\log 2}\right]} \leqq [t] < 2^{\left[\frac{\log t}{\log 2}\right]+1}. \tag{66}$$

Die erste Summe in (64) ist w^{-s}, die zweite ist $O(1)$. Die übrigen genügen nach (66) den Voraussetzungen von Hilfssatz 8, und ihre Anzahl ist gleich $\left[\frac{\log t}{\log 2}\right] = O(\log t)$. Es genügt also, für jede dieser Summen zu zeigen, daß sie

$$O\left(t^{\log 2 \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \log t \right) \tag{67}$$

---

[10]) Dort wird der Satz nur für $t > 3$ bewiesen. Aber daß er auch für $t \geqq 3$ richtig ist, folgt aus Stetigkeitsgründen.

[11]) Dieser Satz geht auf die Herren Hardy und Littlewood zurück. Er findet sich in etwas schwächerer Form bei Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 2, Satz 394. Eine schärfere Abschätzung steht bei van der Corput-Koksma, Sur l'ordre de grandeur de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann dans la bande critique, Annales de la faculté des sciences de l'université de Toulouse, 3. sér. 22 (1930), p. 1—39.

ist. Wenn, wie in Hilfssatz 8, N und N' erstes und letztes Glied der Summe bezeichnen, so ist

$$2 \leqq N \leqq N' \leqq t, \quad N' < 2N. \tag{68}$$

Erster Fall. $t^{\frac{2}{3}} < N \leqq t$. Dann ist nach Hilfssatz 8 mit $r = 1$, $R = 1$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{N'} (n+w)^{-s} \right| &\leqq a_6 \left(N^{-\sigma} t^{\frac{1}{2}} + N^{1-\sigma} t^{-\frac{1}{2}} \right) \log t \\ &\leqq a_6 \left(t^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}} t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}} \right) \log t \leqq 2 a_6 \log t. \end{aligned} \tag{69}$$

Zweiter Fall. $2 \leqq N \leqq t^{\frac{2}{3}}$. Wir setzen $\xi = \frac{\log t}{\log N} \left(\geqq \frac{3}{2} \right)$ und wenden Hilfssatz 8 an mit $r = [\xi] + 1$, $R = 2^{[\xi]}$. Dann gilt, da $N = t^{\frac{1}{\xi}}$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{N'} (n+w)^{-s} \right| &\leqq a_6 t^{\frac{1-\sigma}{\xi}} \left(t^{\frac{2^{-[\xi]}}{\xi} + \frac{2^{-[\xi]}}{[\xi]+2}} + t^{-\frac{2^{-[\xi]}}{[\xi]+2}} \right) \log t \\ &\leqq 2 a_6 t^{\frac{1-\sigma}{\xi}} t^{\frac{-2^{-[\xi]}}{\xi} + \frac{2^{-[\xi]}}{[\xi]+2}} \log t \text{ (nach Hilfssatz 7)} \\ &\leqq 2 a_6 t^{\log 2 \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \log t \text{ (nach Hilfssatz 6).} \end{aligned} \tag{70}$$

Damit ist Hilfssatz 9 bewiesen.

Hilfssatz 10. *Für* $\frac{3}{4} \leqq \sigma < 1$, $t \geqq 3$ *ist*

$$L(s, \chi) = O\left(t^{\log 2 \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \log^2 t \right). \tag{71}$$

Beweis. Es ist nach (16) und Hilfssatz 9

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= k^{-s} \sum_{q=1}^{k} \chi(q) \left(\zeta\left(s, \frac{q}{k}\right) - \left(\frac{q}{k}\right)^{-s} \right) + \sum_{q=1}^{k} \chi(q) q^{-s} \\ &= O\left(t^{\log 2 \frac{1-\sigma}{\log \frac{1}{1-\sigma}}} \log^2 t \right) + O(1). \end{aligned} \tag{72}$$

Hilfssatz 11. *Es sei* $f(x)$ *regulär für* $|x| \leqq 1$, $f(0) = 1$, $M \geqq 0$,

$$|f(x)| \leqq e^M \text{ für } |x| \leqq 1. \tag{73}$$

Dann gilt für $|x| < 1$, *wenn* ξ *alle (in ihrer Vielfachheit gezählten*[12]*) Wurzeln von* $f(x)$ *mit* $|\xi| < 1$ *durchläuft*[13]*),*

$$\left| \frac{f'(x)}{f(x)} - \sum_{\xi} \left(\frac{1}{x - \xi} + \frac{\bar{\xi}}{1 - \bar{\xi} x} \right) \right| \leqq \frac{2M}{(1 - |x|)^2}. \tag{74}$$

[12]) Auch im folgenden werden natürlich Wurzeln stets in entsprechender Vielfachheit gezählt.

[13]) Wenn es kein solches ξ gibt, ist der Satz auch richtig, in dem eine leere Summe 0, ein leeres Produkt 1 bedeutet. Entsprechendes gilt auch für die folgenden Hilfssätze.

Beweis. Bekanntlich ist, da $|\xi|<1$,

$$\left|\frac{x-\xi}{1-\bar{\xi}x}\right|=1 \text{ für } |x|=1. \tag{75}$$

Setzt man

$$g(x)=f(x)\prod_{\xi}\frac{1-\bar{\xi}x}{x-\xi}, \tag{76}$$

so ist

$$g(x) \text{ regulär für } |x|\leqq 1, \tag{77}$$

$$g(x)\neq 0 \text{ für } |x|<1, \tag{78}$$

$$|g(x)|=|f(x)| \text{ für } |x|=1 \text{ nach (75)}, \tag{79}$$

$$|g(x)|\leqq e^{M} \text{ für } |x|=1, \tag{80}$$

$$|g(x)|\leqq e^{M} \text{ für } |x|\leqq 1, \tag{81}$$

$$g(0)=f(0)\prod_{\xi}\frac{1}{-\xi}, \tag{82}$$

$$|g(0)|\geqq 1. \tag{83}$$

Nach (77) und (78) gibt es ein $h(x)$ mit

$$g(x)=e^{h(x)}, \tag{84}$$

so daß

$$h(x) \text{ regulär für } |x|<1, \tag{85}$$

$$\Re(h(x))\leqq M \text{ für } |x|<1 \text{ nach (81)}, \tag{86}$$

$$\Re(h(0))\geqq 0 \text{ nach (83)}. \tag{87}$$

Also gilt für $|x|<1$

$$|h'(x)|\leqq\frac{2(M-\Re(h(0)))}{(1-|x|)^2}\leqq\frac{2M}{(1-|x|)^2}. \tag{88}$$

Aus (76) und (84) folgt für $|x|<1$

$$h'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}-\sum_{\xi}\left(\frac{1}{x-\xi}+\frac{\bar{\xi}}{1-\bar{\xi}x}\right). \tag{89}$$

Aus (89) und (88) folgt die Behauptung.

Hilfssatz 12. *Es sei* $a_7=\frac{2}{31}$, $t_1\geqq 3$, $\sigma_1=1+a_7\frac{\log\log t_1}{\log t_1}$, $r=\frac{(\log\log t_1)^3}{\log t_1}$, $1\leqq m\leqq 4$, *m ganz*, $s_m=\sigma_1+im\,t_1$. *ϱ durchlaufe alle Nullstellen von $L(s,\chi)$ im Innern des Kreises:*

$$|s-s_m|\leqq r. \tag{90}$$

Dann gilt für alle s des Kreisinnern bei $t_1\to\infty$

$$\left|\frac{L'}{L}(s,\chi)-\sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{\overline{\varrho-s_m}}{r^2-(\overline{\varrho-s_m})(s-s_m)}\right)\right|\leqq\frac{2\log 2r^2\log t_1\,(1+o(1))}{\log\log t_1\,(r-|s-s_m|)^2}; \tag{91}$$

und speziell für $s = s_m$ *bei* $t_1 \to \infty$

$$(92)\qquad \left|\frac{L'}{L}(s_m,\chi) - \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s_m-\varrho}+\frac{\overline{\varrho-s_m}}{r^2}\right)\right| \leqq \frac{2\log 2\log t_1(1+o(1))}{\log\log t_1}.$$

Beweis. Es sei t_1 sofort so groß, daß der Kreis (90) ganz zu dem Bereich

$$(93)\qquad \sigma \geqq \frac{3}{4}, \qquad t \geqq 3$$

gehört und $r<1$ ist. Aus (90) folgt, wenn $\sigma<1$,

$$(94)\qquad \sigma \geqq \sigma_1 - r > 1-r, \qquad 1-\sigma < r,$$

$$(95)\qquad \frac{1-\sigma}{\log\frac{1}{1-\sigma}} < \frac{r}{\log\frac{1}{r}}.$$ [14])

Daher ist nach Hilfssatz 10 für alle s aus (90)

$$(96)\qquad L(s,\chi) = O\left(t^{\log 2\frac{r}{\log\frac{1}{r}}\log^2 t}\right);$$

denn für $\sigma \geqq 1$ ist (96) nach (37) trivial. Aus (96) folgt

$$(97)\qquad L(s,\chi) = O\left(e^{\log t\frac{(\log\log t_1)^2\log 2}{\log t_1(\log\log t_1 - 3\log\log\log t_1)}+2\log\log t}\right).$$

Wegen

$$(98)\qquad \frac{\log t}{\log t_1} = 1+o(1),$$

$$(99)\qquad \frac{\log\log t_1}{\log\log t_1 - 3\log\log\log t_1} = 1+o(1),$$

$$(100)\qquad 2\log\log t = o((\log\log t_1)^2)$$

folgt aus (97)

$$(101)\qquad |L(s,\chi)| \leqq e^{\log 2(\log\log t_1)^2(1+o(1))}.$$

Ferner gilt wegen

$$(102)\qquad \left|\frac{1}{L(s_m,\chi)}\right| \leqq \zeta(\sigma_1) = O\left(\frac{1}{\sigma_1-1}\right) = O\left(\frac{\log t_1}{\log\log t_1}\right) \leqq e^{o((\log\log t_1)^2)}$$

für alle s aus (90)

$$(103)\qquad \left|\frac{L(s,\chi)}{L(s_m,\chi)}\right| \leqq e^{\log 2(\log\log t_1)^2(1+o(1))}.$$

---

[14]) Die Funktion $\frac{u}{\log\frac{1}{u}}$ steigt monoton für $0<u<1$.

Wir setzen

$$x = \frac{s - s_m}{r}, \qquad \xi = \frac{\varrho - s_m}{r}, \tag{104}$$

$$f(x) = f\left(\frac{s - s_m}{r}\right) = \frac{L(s,\chi)}{L(s_m,\chi)}, \tag{105}$$

so daß ξ alle Wurzeln von $f(x)$ im Kreise $|x| < 1$ durchläuft.

Da $f(0) = 1$ ist, ist Hilfssatz 11 auf $f(x)$ mit

$$M = \log 2\,(\log\log t_1)^2\,(1 + o(1)) \tag{106}$$

anwendbar, und aus (74) folgt unter Berücksichtigung von (104), (105), (106) und

$$f'(x) = r\,\frac{L'(s,\chi)}{L(s_m,\chi)} \tag{107}$$

die Ungleichung

$$\left| r\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} - \sum_{\varrho}\left(\frac{r}{s-\varrho} + \frac{\overline{\frac{\varrho - s_m}{r}}}{1 - \overline{\frac{\varrho - s_m}{r}}\cdot\frac{s - s_m}{r}}\right)\right| \tag{108}$$

$$\leqq 2\log 2\,(\log\log t_1)^2\,(1 + o(1))\,\frac{1}{\left(1 - \frac{|s - s_m|}{r}\right)^2}$$

$$= 2\log 2\, r\,\frac{\log t_1}{\log\log t_1}\,(1 + o(1))\,\frac{r^2}{(r - |s - s_m|)^2}.$$

Dividiert man (108) durch r, so folgt (91).

Hilfssatz 13. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz* 12 *gilt*

$$\Re\left(\frac{1}{s_m - \varrho} + \frac{\overline{\varrho - s_m}}{r^2}\right) \geqq 0 \quad \textit{für jedes } \varrho,^{15}) \tag{109}$$

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(s_m,\chi)\right) \leqq 2\log 2\,\frac{\log t_1}{\log\log t_1}\,(1 + o(1)), \tag{110}$$

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(s_m,\chi)\right) \leqq 2\log 2\,\frac{\log t_1}{\log\log t_1}\,(1 + o(1)) - \Re\left(\frac{1}{s_m - \varrho}\right) \textit{ für jedes } \varrho. \tag{111}$$

Beweis. Bekanntlich ist $L(s,\chi) \neq 0$ für $\sigma > 1$, also

$$\Re(s_m - \varrho) > 0, \qquad \Re\left(\frac{1}{s_m - \varrho}\right) > 0. \tag{112}$$

Es ist

$$\frac{1}{s_m - \varrho} + \frac{\overline{\varrho - s_m}}{r^2} = \frac{1}{s_m - \varrho}\left(1 - \frac{|\varrho - s_m|^2}{r^2}\right). \tag{113}$$

Aus (112), (113) und

$$|\varrho - s_m| < r \tag{114}$$

---

15) Wenn es kein ϱ mit $|\varrho - s_m| < r$ gibt, enthalten (109) und (111) keine Aussage.

folgt (109). Aus (92) folgt

$$(115)\quad -\Re\Big(\frac{L'}{L}(s_m,\chi)\Big)+\Re\Big(\sum_{\varrho}\Big(\frac{1}{s_m-\varrho}+\frac{\overline{\varrho-s_m}}{r^2}\Big)\Big)\leqq 2\log 2\,\frac{\log t_1}{\log\log t_1}(1+o(1)).$$

Aus (115) und (109), angewandt auf alle ϱ, folgt (110).

Aus (115) und (109), angewandt auf alle ϱ mit einer Ausnahme, folgt für dieses ausgenommene ϱ

$$(116)\quad -\Re\Big(\frac{L'}{L}(s_m,\chi)\Big)\leqq 2\log 2\,\frac{\log t_1}{\log\log t_1}(1+o(1))-\Re\Big(\frac{1}{s_m-\varrho}\Big)-\Re\Big(\frac{\overline{\varrho-s_m}}{r^2}\Big).$$

Es ist nach (114)

$$(117)\qquad -\Re\Big(\frac{\overline{\varrho-s_m}}{r^2}\Big)\leqq\frac{1}{r}=o\Big(\frac{\log t_1}{\log\log t_1}\Big).$$

Aus (116) und (117) folgt (111).

Hilfssatz 14. *Für reelles φ ist*

$$(118)\quad P(\varphi)=47+80\cos\varphi+49\cos(2\varphi)+20\cos(3\varphi)+4\cos(4\varphi)\geqq 0.$$

Beweis. Setzt man $\cos\varphi=\eta$, so ist

$$(119)\quad \cos(2\varphi)=2\eta^2-1,\ \cos(3\varphi)=4\eta^3-3\eta,\ \cos(4\varphi)=8\eta^4-8\eta^2+1,$$

$$\begin{aligned}(120)\quad P(\varphi)&=47+80\eta+98\eta^2-49+80\eta^3-60\eta+32\eta^4-32\eta^2+4\\&=2+20\eta+66\eta^2+80\eta^3+32\eta^4\\&=2(1+\eta)(1+9\eta+24\eta^2+16\eta^3)\\&=2(1+\eta)^2(1+8\eta+16\eta^2)=2(1+\eta)^2(1+4\eta)^2\geqq 0.\end{aligned}$$

Hilfssatz 15. *Für $\sigma>1$ und reelles t ist*

$$\begin{aligned}(121)\quad -\Re\Big\{47\frac{L'}{L}(\sigma,\chi^0)+80\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi)+49\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2)\\+20\frac{L'}{L}(\sigma+3it,\chi^3)+4\frac{L'}{L}(\sigma+4it,\chi^4)\Big\}\geqq 0.\end{aligned}$$

Beweis. Für ganzes $m\geqq 0$ ist

$$(122)\quad -\frac{L'}{L}(\sigma+imt,\chi^m)=\sum_{\substack{n=1\\(n,k)=1}}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}(\chi(n)n^{-it})^m.$$

Wählt man für die in (122) auftretenden n die $\varphi_n\geqq 0$ so, daß

$$(123)\qquad \cos\varphi_n=\Re(\chi(n)n^{-it}),$$

so ist

$$(124)\qquad \cos(m\varphi_n)=\Re\big((\chi(n)n^{-it})^m\big).$$

Also ist die linke Seite der Behauptung gleich

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,k)=1}}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} P(\varphi_n) \geqq 0. \tag{125}$$

Hilfssatz 16. *Für* $3 \leqq b_2 \leqq t$, $a_5 = \frac{1}{49{,}13}$, $\sigma \geqq 1 - a_5 \frac{\log\log t}{\log t}$ *ist*

$$L(s, \chi) \neq 0. \tag{126}$$

Beweis (indirekt). Angenommen, es gäbe unendlich viele Wurzeln $\varrho = \beta + i\gamma$, $\beta = \Re(\varrho)$, von $L(s, \chi)$ mit

$$\gamma \geqq 3, \quad 1 - a_5 \frac{\log\log\gamma}{\log\gamma} \leqq \beta \leqq 1. \tag{127}$$

Dann setze ich

$$\sigma_1 = 1 + a_7 \frac{\log\log\gamma}{\log\gamma} \tag{128}$$

und wende Hilfssatz 13 auf $L(s, \chi^m)$ für $1 \leqq m \leqq 4$ an mit

$$t_1 = \gamma, \quad s_m = \sigma_1 + im\gamma. \tag{129}$$

Es gilt also für $\gamma \to \infty$ wegen $0 < s_1 - \varrho = O\left(\frac{\log\log\gamma}{\log\gamma}\right) = o\left(\frac{(\log\log\gamma)^2}{\log\gamma}\right)$

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(\sigma_1 + im\gamma, \chi^m)\right) \leqq 2\log 2 \frac{\log\gamma}{\log\log\gamma}(1 + o(1)) \text{ für } m = 4, 3, 2 \text{ nach (110)}, \tag{130}$$

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(\sigma_1 + i\gamma, \chi)\right) \leqq 2\log 2 \frac{\log\gamma}{\log\log\gamma}(1 + o(1)) - \frac{1}{\sigma_1 - \beta} \text{ nach (111)}, \tag{131}$$

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(\sigma_1, \chi^0)\right) = \frac{1}{\sigma_1 - 1}(1 + o(1)) = \frac{1}{a_7} \frac{\log\gamma}{\log\log\gamma}(1 + o(1)); \tag{132}$$

denn $-\frac{L'}{L}(s, \chi^0)$ hat in $s = 1$ einen einfachen Pol mit dem Residuum 1. Multipliziert man die fünf Ungleichungen (nämlich (130) für $m = 4, 3, 2$, (131) und (132)) mit 4, 20, 49, 80, 47 und addiert man sie alsdann, so folgt nach Hilfssatz 15

$$0 \leqq \frac{\log\gamma}{\log\log\gamma}(1 + o(1))\left\{2\log 2\,(4 + 20 + 49 + 80) + \frac{47}{a_7}\right\} - \frac{80}{\sigma_1 - \beta}. \tag{133}$$

Aus (127) und (128) folgt

$$-\frac{80}{\sigma_1 - \beta} \leqq -\frac{80}{a_5 + a_7} \frac{\log\gamma}{\log\log\gamma}. \tag{134}$$

Aus (133) und (134) folgt

$$0 \leqq \frac{\log\gamma}{\log\log\gamma}(1 + o(1))\left(306\log 2 + \frac{47}{a_7} - \frac{80}{a_5 + a_7}\right). \tag{135}$$

Dividiert man (135) durch $\frac{\log\gamma}{\log\log\gamma}$ und läßt man γ gegen ∞ gehen (das

geht, denn wir hatten ja angenommen, daß es unendlich viele γ gibt, die (127), also auch (135) genügen), so erhält man

$$(136)\quad 0 \leqq 306\log 2 + \frac{47}{a_7} - \frac{80}{a_5+a_7} = 306\log 2 + \frac{47\cdot 31}{2} - \frac{80}{\frac{1}{49{,}13}+\frac{2}{31}}$$

$$< 306\cdot 0{,}694 + 728{,}5 - \frac{80\cdot 49{,}13\cdot 31}{129{,}26}$$

$$= 940{,}864 - \frac{121\,842{,}4}{129{,}26} < 941 - \frac{121\,842{,}4}{129{,}3}$$

$$= \frac{121\,671{,}3 - 121\,842{,}4}{129{,}3} < 0.$$

Durch diesen Widerspruch ist unser Satz bewiesen.

Hilfssatz 17. *Es sei*

$$a_8 = \frac{1}{49{,}15}(< a_5), \quad t \geqq b_3 \geqq b_2 \geqq 3, \quad \sigma \geqq 1 - a_8\frac{\log\log t}{\log t}.$$

Dann ist

$$(137)\qquad \frac{L'}{L}(s,\chi) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right).$$

Beweis. Es sei

$$(138)\qquad \sigma_1 = 1 + a_7\frac{\log\log t}{\log t}, \qquad s_1 = \sigma_1 + it.$$

Ist $\sigma \geqq \sigma_1$, so ist (137) trivial wegen

$$(139)\quad \left|\frac{L'}{L}(s,\chi)\right| \leqq -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leqq -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_1) = \frac{1}{\sigma_1 - 1} + O(1) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right).$$

Also sei alsbald

$$(140)\qquad \sigma < \sigma_1.$$

Wir wenden Hilfssatz 12 an mit $t_1 = t$, $m = 1$.

Dann folgt aus (92) und (139)

$$(141)\qquad \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s_1 - \varrho} + \frac{\overline{\varrho - s_1}}{r^2}\right) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right).$$

Nunmehr wählen wir $b_3 \geqq b_2$ so groß, daß für $t \geqq b_3$ erstens

$$(142)\qquad 0 < s_1 - s \leqq \frac{1}{2}r.$$

Das geht wegen

$$(143)\qquad s_1 - s = O\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right) = o(r) \text{ für } t \to \infty.$$

Zweitens sei b_3 so groß gewählt, daß bei $t \geqq b_3$ für alle in (141) auftretenden ϱ gilt

$$(144)\qquad \beta = \Re(\varrho) \leqq 1 - \frac{a_5 + a_8}{2}\frac{\log\log t}{\log t}.$$

Das geht nach Hilfssatz 16, da $\frac{a_5+a_8}{2} < a_5$.[16]) Dann ist nach Voraussetzung und nach (144)

$$|s-\varrho| \geqq \Re(s-\varrho) \tag{145}$$

$$= \sigma - \beta \geqq \left(1 - a_8 \frac{\log\log t}{\log t}\right) - \left(1 - \frac{a_5+a_8}{2}\frac{\log\log t}{\log t}\right) = \frac{a_5-a_8}{2}\frac{\log\log t}{\log t}.$$

Ferner ist

$$0 < \sigma_1 - \sigma = s_1 - s \leqq (a_7+a_8)\frac{\log\log t}{\log t}. \tag{146}$$

Aus (145) und (146) folgt

$$s_1 - s \leqq 2\frac{a_7+a_8}{a_5-a_8}|s-\varrho|, \tag{147}$$

$$|s_1-\varrho| \leqq (s_1-s)+|s-\varrho| \leqq \left(1+2\frac{a_7+a_8}{a_5-a_8}\right)|s-\varrho| = a_{11}|s-\varrho|. \tag{148}$$

Ferner folgt aus

$$\beta < \sigma < \sigma_1 \tag{149}$$

$$s_1 - s < \Re(s_1-\varrho), \tag{150}$$

und auch

$$|s-\varrho| < |s_1-\varrho| < r. \tag{151}$$

Aus (142) und (151) folgt

$$\left|\frac{r^2-(s-\varrho)(\overline{\varrho-s_1})}{r^2(r^2-(s-s_1)(\overline{\varrho-s_1}))}\right| \leqq \frac{r^2+r\cdot r}{r^2\left(r^2-\frac{1}{2}r\cdot r\right)} = \frac{4}{r^2}. \tag{152}$$

Es ist

$$\frac{1}{s-\varrho} + \frac{\overline{\varrho-s_1}}{r^2-(s-s_1)(\overline{\varrho-s_1})} = \frac{r^2-|\varrho-s_1|^2}{(s-\varrho)(r^2-(s-s_1)(\overline{\varrho-s_1}))}, \tag{153}$$

$$\frac{1}{s_1-\varrho} + \frac{\overline{\varrho-s_1}}{r^2} = \frac{r^2-|\varrho-s_1|^2}{(s_1-\varrho)r^2}, \tag{154}$$

$$\Re\left(\frac{1}{s_1-\varrho}+\frac{\overline{\varrho-s_1}}{r^2}\right) = \frac{\Re(s_1-\varrho)(r^2-|\varrho-s_1|^2)}{|s_1-\varrho|^2 r^2}. \tag{155}$$

Subtrahiert man (154) von (153), so ergibt sich für den absoluten Betrag der Differenz

---

[16]) Wegen $|\gamma-t| < r = o(1)$ gilt bei hinreichend großem b_3 für $t \geqq b_3$

$$\beta \leqq 1 - a_5\frac{\log\log\gamma}{\log\gamma} = 1 - a_5\frac{\log\log(t+o(1))}{\log(t+o(1))} \leqq 1 - \frac{a_5+a_8}{2}\frac{\log\log t}{\log t}.$$

(156)
$$\left|\frac{1}{s-\varrho}+\frac{\overline{\varrho-s_1}}{r^2-(s-s_1)(\overline{\varrho-s_1})}-\frac{1}{s_1-\varrho}-\frac{\overline{\varrho-s_1}}{r^2}\right|$$
$$=(r^2-|\varrho-s_1|^2)\left|\frac{(s_1-\varrho)r^2-(s-\varrho)r^2+(s-\varrho)(s-s_1)(\overline{\varrho-s_1})}{(s-\varrho)(r^2-(s-s_1)(\overline{\varrho-s_1}))(s_1-\varrho)r^2}\right|$$
$$=(s_1-s)\frac{r^2-|\varrho-s_1|^2}{|s-\varrho|\,|s_1-\varrho|}\left|\frac{r^2-(s-\varrho)(\overline{\varrho-s_1})}{r^2(r^2-(s-s_1)(\overline{\varrho-s_1}))}\right|$$
$$\leqq(s_1-s)\frac{r^2-|\varrho-s_1|^2}{|s-\varrho|\,|s_1-\varrho|}\frac{4}{r^2}\ \text{(nach (152))}$$
$$\leqq\Re(s_1-\varrho)\,a_0\frac{r^2-|\varrho-s_1|^2}{|s_1-\varrho|^2}\frac{4}{r^2}\ \text{(nach (150) und (148))}$$
$$=4a_0\,\Re\left(\frac{1}{s_1-\varrho}+\frac{\overline{\varrho-s_1}}{r^2}\right)\ \text{nach (155).}$$

Aus (156) folgt

(157)
$$\left|\sum_\varrho\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{\overline{\varrho-s_1}}{r^2-(s-s_1)(\overline{\varrho-s_1})}\right)-\sum_\varrho\left(\frac{1}{s_1-\varrho}+\frac{\overline{\varrho-s_1}}{r^2}\right)\right|$$
$$\leqq 4a_0\,\Re\left(\sum_\varrho\left(\frac{1}{s_1-\varrho}+\frac{\overline{\varrho-s_1}}{r^2}\right)\right)\leqq 4a_0\left|\sum_\varrho\left(\frac{1}{s_1-\varrho}+\frac{\overline{\varrho-s_1}}{r^2}\right)\right|.$$

Aus (141) und (157) folgt

(158)
$$\sum_\varrho\left(\frac{1}{s-\varrho}+\frac{\overline{\varrho-s_1}}{r^2-(s-s_1)(\overline{\varrho-s_1})}\right)=O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right).$$

Aus (91), (142) und (158) folgt die Behauptung.

Hilfssatz 18. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz* 17 (*d. h. auch bei demselben* b_3) *gilt*

(159)
$$\frac{1}{L(s,\chi)}=O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right).$$

Beweis. Erster Fall. Es sei $\sigma\geqq\sigma_0=1+\frac{\log\log t}{\log t}$. Dann ist (159) trivial wegen

(160)
$$\left|\frac{1}{L(s,\chi)}\right|\leqq\zeta(\sigma)\leqq\zeta(\sigma_0)=\frac{1}{\sigma_0-1}+O(1)=O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right).$$

Zweiter Fall. Es sei $\sigma<\sigma_0$. Dann ist

(161)
$$\log|L(s,\chi)|=\Re\log L(\sigma_0+it,\chi)+\Re\int_{\sigma_0+it}^{s}\frac{L'}{L}(u,\chi)\,du$$
$$\geqq-\log\zeta(\sigma_0)+\int_{\sigma_0}^{\sigma}O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right)du\ \text{(nach Hilfssatz 17)}$$
$$=\log(\sigma_0-1)+O(1)=-\log\log t+\log\log\log t+O(1),$$

(162)
$$\left|\frac{1}{L(s,\chi)}\right|=e^{-\log|L(s,\chi)|}\leqq e^{\log\log t-\log\log\log t+O(1)}=O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right).$$

§ 3.

Hilfssätze über die Teilerzahlen.

In den Hilfssätzen 19—21 dieses Paragraphen bezeichnen kleine lateinische Buchstaben natürliche Zahlen.

Hilfssatz 19. *Für* $z \geqq 2$, $2 \leqq r \leqq 4$ *ist*

$$\sum_{n \leqq z} \frac{d_r(n)}{n} = O(\log^r z). \tag{163}$$

Beweis. Es ist

$$\sum_{n \leqq z} \frac{d_r(n)}{n} = \sum_{n \leqq z} \sum_{u_1 \dots u_r = n} \frac{1}{u_1 \dots u_r} \leqq \sum_{\substack{u_1 \leqq z \\ \dots\dots \\ u_r \leqq z}} \frac{1}{u_1 \dots u_r} = \Big(\sum_{u \leqq z} \frac{1}{u}\Big)^r = O(\log^r z). \tag{164}$$

Hilfssatz 20. *Für* $z \geqq 2$ *ist*

$$\sum_{n \leqq z} \frac{d^2(n)}{n} = O(\log^4 z). \tag{165}$$

Beweis. Aus $d(vw) \leqq d(v)\,d(w)$ folgt

$$d^2(n) = \sum_{u \mid n} d(n) \leqq \sum_{u \mid n} d(u)\, d\Big(\frac{n}{u}\Big) = d_4(n), \tag{166}$$

und Hilfssatz 19 mit $r = 4$ gibt die Behauptung.

Hilfssatz 21. *Für* $z \geqq 2$ *ist*

$$S = \sum_{n < m \leqq z} \frac{d(n)\,d(m)}{n\,m \log \frac{m}{n}} = O(\log^4 z). \tag{167}$$

Beweis. Es ist für $m > n$

$$\log \frac{m}{n} = -\log\Big(1 - \frac{m-n}{m}\Big) > \frac{m-n}{m}, \tag{168}$$

$$\begin{aligned} S &< \sum_{n < m \leqq z} \frac{d(n)\,d(m)}{n(m-n)} = \sum_{n < m \leqq z} \frac{d(n)\,d(m)}{m(m-n)} + \sum_{n < m \leqq z} \frac{d(n)\,d(m)}{n\,m} \\ &\leqq \sum_{n < m \leqq z} \frac{d(n)\,d(m)}{m(m-n)} + \Big(\sum_{n \leqq z} \frac{d(n)}{n}\Big)^2 = \sum_{n < m \leqq z} \frac{d(n)\,d(m)}{m(m-n)} + O(\log^4 z) \end{aligned} \tag{169}$$

nach Hilfssatz 19 mit $r = 2$. Setzt man

$$m = ce, \quad n = fg, \quad m - n = r, \tag{170}$$

so folgt aus (169)

$$S \leqq O(\log^4 z) + \sum_{r \leqq z} \frac{1}{r} \sum_{\substack{c,e,f,g \\ ce \leqq z \\ ce - fg = r}} \frac{1}{ce}. \tag{171}$$

In dieser Summe treten c und e, sowie f und g symmetrisch auf; wir verkleinern die Summe also nicht, wenn wir sie mit 4 multiplizieren und zu den Summationsbedingungen noch die Ungleichungen

$$c \leqq e, \quad f \leqq g \tag{172}$$

hinzufügen. Aus (172) folgt überdies wegen

$$e^2 \geqq ce = r + fg > fg \geqq f^2 \tag{173}$$

noch die Summationsbedingung

$$e > f. \tag{174}$$

Aus (170) folgt

$$ce \equiv r \pmod f. \tag{175}$$

Wir können also die Ungleichung (171) ersetzen durch:

$$S \leqq O(\log^4 z) + 4 \sum_{r \leqq z} \frac{1}{r} \sum_{c \leqq z} \frac{1}{c} \sum_{f \leqq z} \sum_{\substack{e \\ f < e \leqq z \\ ce \equiv r \pmod f}} \frac{1}{e}. \tag{176}$$

Wird $h = (c, f)$ gesetzt, so kann bei festen c, r, f (175) nur dann eine Lösung haben, wenn

$$h \mid r. \tag{177}$$

Es sei also (177) erfüllt und e_0 die kleinste Lösung von (175), die der Bedingung (174) genügt. Alle übrigen Lösungen von (175) mit $f < e \leqq z$ sind dann unter den Zahlen

$$e = e_0 + \frac{f}{h} u, \quad u \leqq z \tag{178}$$

enthalten. Aus (176) folgt daher unter Berücksichtigung von (177) und (178)

$$\begin{aligned} S &\leqq O(\log^4 z) + 4 \sum_{c \leqq z} \frac{1}{c} \sum_{f \leqq z} \sum_{\substack{r \leqq z \\ h \mid r}} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{e_0} + \sum_{u \leqq z} \frac{1}{e_0 + \frac{f}{h} u} \right) \\ &\leqq O(\log^4 z) + 4 \sum_{c \leqq z} \frac{1}{c} \sum_{f \leqq z} \sum_{\substack{r \leqq z \\ h \mid r}} \frac{1}{r e_0} + 4 \sum_{c \leqq z} \sum_{f \leqq z} \sum_{\substack{r \leqq z \\ h \mid r}} \sum_{u \leqq z} \frac{h}{crfu}. \end{aligned} \tag{179}$$

Wegen $e_0 > f$ ist

$$\sum_{c \leqq z} \frac{1}{c} \sum_{f \leqq z} \sum_{\substack{r \leqq z \\ h \mid r}} \frac{1}{r e_0} \leqq \sum_{c \leqq z} \frac{1}{c} \sum_{f \leqq z} \frac{1}{f} \sum_{r \leqq z} \frac{1}{r} = O(\log^3 z). \tag{180}$$

Zur Abschätzung der zweiten Summe in (179) setzen wir

$$c = hc', \quad f = hf', \quad r = hr'. \tag{181}$$

Dann ist

$$(182)\quad \sum_{c\leqq z}\sum_{f\leqq z}\sum_{\substack{r\leqq z\\ h\mid r}}\sum_{u\leqq z}\frac{h}{crfu}\leqq \sum_{h\leqq z}\sum_{c'\leqq z}\sum_{f'\leqq z}\sum_{r'\leqq z}\sum_{u\leqq z}\frac{h}{hc'hr'hf'u}$$
$$=\sum_{h\leqq z}\frac{1}{h^2}\Big(\sum_{v\leqq z}\frac{1}{v}\Big)^4=O(\log^4 z).$$

Aus (179), (180) und (182) folgt die Behauptung.

Bezeichnung. Für den Rest dieser Arbeit sei für $0\leqq t\leqq T$

$$(183)\quad A(s)=A(s;T,\chi)=1-\sum_{1\leqq n\leqq kT}\chi(n)n^{-s}\sum_{1\leqq n\leqq kT}\chi(n)\mu(n)n^{-s}.$$

Hilfssatz 22. *Für* $T\geqq 3$, $\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq 1$ *ist*

$$(184)\quad \int_0^T|A(s)|^2\,dt=O(T^{4(1-\sigma)}\log^4 T).$$

Beweis. Bekanntlich ist für ganzes $v>1$

$$(185)\quad \sum_{u\mid v}\chi\Big(\frac{v}{u}\Big)\chi(u)\mu(u)=\chi(v)\sum_{u\mid v}\mu(u)=0,$$

also nach (183) bei passenden $e(n)$

$$(186)\quad A(s)=\sum_{kT<n\leqq(kT)^2}e(n)n^{-s},$$

wo

$$e(n)=e(n;T,\chi),\qquad |e(n)|\leqq d(n).$$

Also ist

$$(187)\quad \int_0^T|A(s)|^2\,dt=\int_0^T\Big(\sum_{kT<m\leqq(kT)^2}e(m)m^{-\sigma-it}\sum_{kT<n\leqq(kT)^2}\overline{e(n)}n^{-\sigma+it}\Big)dt$$

$$=T\sum_{kT<m\leqq(kT)^2}|e(m)|^2m^{-2\sigma}+\sum_{\substack{kT<m\leqq(kT)^2\\ kT<n\leqq(kT)^2\\ m\neq n}}e(m)\overline{e(n)}(mn)^{-\sigma}\int_0^T\Big(\frac{n}{m}\Big)^{it}dt$$

$$\leqq T\sum_{kT<m\leqq(kT)^2}\frac{d^2(m)}{m}m^{1-2\sigma}+\sum_{\substack{kT<m\leqq(kT)^2\\ kT<n\leqq(kT)^2\\ m\neq n}}\frac{d(m)d(n)}{mn}(mn)^{1-\sigma}\frac{2}{\Big|\log\frac{m}{n}\Big|}$$

$$\leqq T(kT)^{1-2\sigma}\sum_{kT<m\leqq(kT)^2}\frac{d^2(m)}{m}+4(kT)^{4(1-\sigma)}\sum_{kT<n<m\leqq(kT)^2}\frac{d(m)d(n)}{mn\log\frac{m}{n}}$$

$$\leqq k^{1-2\sigma}T^{2(1-\sigma)}\sum_{1\leqq m\leqq(kT)^2}\frac{d^2(m)}{m}+4k^{4(1-\sigma)}T^{4(1-\sigma)}\sum_{1\leqq n<m\leqq(kT)^2}\frac{d(m)d(n)}{mn\log\frac{m}{n}}$$

$$=O(T^{4(1-\sigma)}\log^4 T)$$

nach Hilfssatz 20 und 21.

§ 4.

Asymptotische Entwicklung von $\frac{1}{L(s,\chi)}$ und $\frac{-L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$.

In diesem Paragraphen sei stets

$$(188)\qquad (3 \leqq b_2 \leqq) b_3 \leqq b_4 \leqq (\log T)^{a_8+2} \leqq t \leqq T,$$

$$(189)\qquad \sigma = 1 - a_8 \frac{\log\log T}{\log T}.$$

Es sei $b_4 \geqq b_3$ so groß gewählt, daß für $b_4 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2$

$$(190)\qquad \frac{\log\log \tau_1}{\log \tau_1} \geqq \frac{\log\log \tau_2}{\log \tau_2}$$

ist, und aus (188) und (189) die zwei nachstehenden Ungleichungen folgen:

$$(191)\qquad \frac{4}{5} \leqq \sigma < 1,$$

$$(192)\qquad |\Sigma \chi(n) n^{-s}| \geqq \frac{1}{\log T},$$

wo Σ, wie auch weiterhin in diesem Paragraphen, zur Abkürzung für $\sum_{1 \leqq n \leqq kT}$ steht. Daß sich (190) und (191) durch hinreichend große Wahl von b_4 erreichen lassen, ist ohne weiteres klar. Aus (188), (189), (190) und (191) folgt, daß sich die Hilfssätze 4, 5, 17 und 18 auf alle unsere s anwenden lassen, was wir in diesem Paragraphen mehrfach benutzen werden. Nach Hilfssatz 4 und 18 ist

$$(193)\quad |\Sigma \chi(n) n^{-s}| \geqq |L(s,\chi)| + O\left(\frac{T^{1-\sigma}}{t}\right) \geqq b_5 \frac{\log\log t}{\log t} + O\left(\frac{e^{\log T\, a_8 \frac{\log\log T}{\log T}}}{(\log T)^{a_8+2}}\right)$$
$$\geqq b_5 \frac{\log\log T}{\log T} + O\left(\frac{1}{\log^2 T}\right) \geqq \frac{1}{\log T}$$

bei passend großem b_4. Damit ist (192) bewiesen.

Hilfssatz 23. *Es ist*

$$(194)\qquad \frac{1}{L(s,\chi)} = \sum_{1 \leqq n \leqq (kT)^2} c(n) n^{-s} + O\left(\log^2 T \frac{T^{1-\sigma}}{t}\right) + O(\log T)|A(s)|^2,$$

wo

$$(195)\qquad c(n) = c(n; T, \chi), \qquad |c(n)| \leqq 3 d_3(n).$$

Beweis. Es ist

$$(196)\qquad \frac{1}{L(s,\chi)} = \frac{1}{\Sigma \chi(n) n^{-s}} + \frac{\Sigma \chi(n) n^{-s} - L(s,\chi)}{L(s,\chi)\, \Sigma \chi(n) n^{-s}},$$

also nach Hilfssatz 4, 18 und (192)

$$(197)\qquad \frac{1}{L(s,\chi)} = \frac{1}{\sum \chi(n) n^{-s}} + O\left(\log^2 T \frac{T^{1-\sigma}}{t}\right)$$
$$= \frac{A^2(s)}{\sum \chi(n) n^{-s}} + 2\sum \chi(n)\mu(n) n^{-s} - \sum \chi(n) n^{-s} \left(\sum \chi(n)\mu(n) n^{-s}\right)^2$$
$$+ O\left(\log^2 T \frac{T^{1-\sigma}}{t}\right),$$

woraus nach (192) die Behauptung folgt, wenn man

$$(198)\quad c(n) = -\sum_{\substack{uvw=n \\ 1\leqq u\leqq kT \\ 1\leqq v\leqq kT \\ 1\leqq w\leqq kT}} \chi(u)\chi(v)\mu(v)\chi(w)\mu(w) + \begin{cases} 2\chi(n)\mu(n) \text{ für } 1\leqq n\leqq kT, \\ 0 \text{ für } kT < n \leqq (kT)^3 \end{cases}$$

setzt.

Hilfssatz 24. *Es ist*

$$(199)\quad -\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{1\leqq n\leqq (kT)^4} g(n) n^{-s} + O\left(\log^2 T \frac{T^{1-\sigma}}{t}\right) + O(\log T)|A(s)|^2,$$

wo

$$(200)\qquad g(n) = g(n; T, \chi), \qquad |g(n)| \leqq 3(\log(kT))\, d_4(n).$$

Beweis. Es ist

$$(201)\quad \frac{-L'}{L}(s,\chi) = \frac{\sum \chi(n)\log n\, n^{-s}}{\sum \chi(n) n^{-s}} + \frac{L'}{L}(s,\chi)\frac{L(s,\chi) - \sum \chi(n) n^{-s}}{\sum \chi(n) n^{-s}}$$
$$- \frac{L'(s,\chi) + \sum \chi(n)\log n\, n^{-s}}{\sum \chi(n) n^{-s}}$$
$$= \frac{\sum \chi(n)\log n\, n^{-s}}{\sum \chi(n) n^{-s}} + O\left(\log^2 T \frac{T^{1-\sigma}}{t}\right).$$

nach (192) und den Hilfssätzen 4, 5 und 17. Da nach der in (193) ausgeführten Rechnung

$$(202)\qquad \log^2 T \frac{T^{1-\sigma}}{t} \leqq 1,$$

folgt aus (201) und Hilfssatz 17

$$(203)\qquad \frac{\sum \chi(n)\log n\, n^{-s}}{\sum \chi(n) n^{-s}} = O(\log T).$$

Ferner folgt aus (201)

$$(204)\quad -\frac{L'}{L}(s,\chi) = A^2(s)\frac{\sum \chi(n)\log n\, n^{-s}}{\sum \chi(n) n^{-s}} + 2\sum \chi(n)\log n\, n^{-s} \sum \chi(n)\mu(n) n^{-s}$$
$$- \sum \chi(n)\log n\, n^{-s} \sum \chi(n) n^{-s} \left(\sum \chi(n)\mu(n) n^{-s}\right)^2 + O\left(\log^2 T \frac{T^{1-\sigma}}{t}\right).$$

Aus (204) und (203) folgt die Behauptung, wenn man

$$(205)\quad g(n) = 2\sum_{\substack{uv=n \\ u\leqq kT \\ v\leqq kT}} \chi(u)\log u\, \chi(v)\mu(v) - \sum_{\substack{uvwq=n \\ u\leqq kT \\ v\leqq kT \\ w\leqq kT \\ q\leqq kT}} \chi(u)\log u\, \chi(v)\chi(w)\mu(w)\chi(q)\mu(q)$$

setzt.

§ 5.

Beweis der Hauptsätze.

Wir setzen

$$a_{10} = 249{,}8. \tag{206}$$

Dann ist

$$a_9(4 - a_{10}) + 5 = \frac{1}{49{,}15}(-245{,}8) + 5 = \frac{-0{,}05}{49{,}15} < 0. \tag{207}$$

Da bekanntlich $L(1 + it) \neq 0$, gibt es ein $b_6 < 1$, so daß

$$L(s, \chi) \neq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq b_4, \quad \sigma \geqq b_6. \tag{208}$$

Es sei $x > 0$ die in Satz 3 und 4 auftretende Variable. Wir wählen $T > 0$, so daß

$$T^{a_{10}} = x \tag{209}$$

ist, und setzen

$$\sigma_0 = 1 - a_8 \frac{\log\log T}{\log T}. \tag{210}$$

Da T mit x gegen ∞ wächst, können wir x sofort so groß annehmen, daß erstens

$$b_4 \leqq (\log T)^{a_8+2} \leqq T, \tag{211}$$

zweitens

$$\sigma_0 \geqq b_6, \tag{212}$$

drittens

$$T \leqq \frac{x}{(kT)^4} \tag{213}$$

gilt.

Dann ist wegen (211) § 4 anwendbar mit

$$\sigma = \sigma_0, \quad (\log T)^{a_8+2} \leqq t \leqq T. \tag{214}$$

Es ist also insbesondere für $b_4 \leqq t \leqq T$ nach (190)

$$a_5 \frac{\log\log t}{\log t} > a_8 \frac{\log\log t}{\log t} \geqq a_8 \frac{\log\log T}{\log T} = 1 - \sigma_0. \tag{215}$$

Aus (215), (190) und Hilfssatz 16 einerseits, (208) und (212) andererseits folgt

$$L(s, \chi) \neq 0 \quad \text{für} \quad \sigma \geqq \sigma_0, \quad 0 \leqq t \leqq T. \tag{216}$$

Unter diesen Annahmen gilt für $y \geqq x$ bei $x \to \infty$:

Hilfssatz 25. $$\int_{\sigma_0}^{\sigma_0 + iT} y^{s-1} \frac{-L'}{L}(s, \chi)\, ds = o(1).$$

Hilfssatz 26. $\int_{\sigma_0}^{\sigma_0+iT} y^{s-1}\frac{1}{L(s,\chi)}ds = o(1).$

Beweis. Es ist

(217) $$T^{1-\sigma_0} = T^{a_8\frac{\log\log T}{\log T}} = (\log T)^{a_8},$$

(218) $$y^{\sigma_0-1} \leqq x^{\sigma_0-1} = T^{a_{10}(\sigma_0-1)} = (\log T)^{-a_8 a_{10}},$$

also nach (207)

(219) $$y^{\sigma_0-1}(T^{1-\sigma_0})^4 \log^5 T \leqq (\log T)^{-a_8 a_{10}+4a_8+5} = o(1).$$

Wir setzen zur Abkürzung

(220) $$v = (\log T)^{a_8+2}.$$

Erster Schritt $\left(\int_{\sigma_0}^{\sigma_0+iv}\right)$. Es ist für $\sigma = \sigma_0$, $0 \leqq t \leqq v$

(221) $$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(\log T),$$

(222) $$\frac{1}{L(s,\chi)} = O(\log T).$$

Denn für $t \geqq b_4$ folgt (221) bzw. (222) aus Hilfssatz 17 bzw. 18 und (215). Für $0 \leqq t \leqq b_4$ gilt sogar

(223) $$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(1) \quad \text{für} \quad \chi \neq \chi_0 \ (\chi_0 \text{ Hauptcharakter}),$$

(224) $$\frac{1}{L(s,\chi)} = O(1);$$

denn diese Funktionen sind für $\sigma = 1$ regulär. Ferner gilt

(225) $$-\frac{L'}{L}(s,\chi_0) = O\left(\frac{1}{1-\sigma_0}\right) = O(\log T),$$

da diese Funktion auf der Geraden $\sigma = 1$ als einzige Singularität einen Pol erster Ordnung in $s = 1$ besitzt. Damit sind (221) und (222) bewiesen. Also folgt

(226) $$\left|\int_{\sigma_0}^{\sigma_0+iv} y^{s-1}\frac{-L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}ds\right| \leqq v\,y^{\sigma_0-1}O(\log T)$$
$$= O\left((\log T)^{a_8+2-a_8a_{10}+1}\right) \quad \text{(nach (218) und (220))}$$
$$= o(1) \quad \text{nach (207);}$$

und entsprechend

$$\left| \int_{\sigma_0}^{\sigma_0+iv} y^{s-1} \frac{1}{L(s,\chi)}\, ds \right| = o(1). \tag{227}$$

Zweiter Schritt (Behandlung des ersten Fehlergliedes in den Hilfssätzen 23 und 24). Es ist

$$\left| \int_{\sigma_0+iv}^{\sigma_0+iT} y^{s-1} \log^2 T \frac{T^{1-\sigma}}{t}\, ds \right| \leqq y^{\sigma_0-1} \log^2 T \cdot T^{1-\sigma_0} \int_1^T \frac{dt}{t} \tag{228}$$

$$= y^{\sigma_0-1} T^{1-\sigma_0} \log^3 T = o(1) \text{ nach (219).}$$

Dritter Schritt (Behandlung des zweiten Fehlergliedes in den Hilfssätzen 23 und 24). Es ist

$$\left| \int_{\sigma_0+iv}^{\sigma_0+iT} y^{s-1} \log T\, |A(s)|^2\, ds \right| \leqq y^{\sigma_0-1} \log T \int_0^T |A(\sigma_0+it)|^2\, dt \tag{229}$$

$$= y^{\sigma_0-1} \log T \cdot O(T^{4(1-\sigma_0)} \log^4 T) \text{ (Hilfssatz 22)}$$

$$= o(1) \text{ nach (219).}$$

Vierter Schritt (Beweis von Hilfssatz 25). Nach Hilfssatz 24, (226), (228), (229) genügt es zu zeigen:

$$\int_{\sigma_0+iv}^{\sigma_0+iT} y^{s-1} \sum_{1 \leqq n \leqq (kT)^4} g(n) n^{-s}\, ds = o(1). \tag{230}$$

Es ist

$$\int_{\sigma_0+iv}^{\sigma_0+iT} y^{s-1} \sum_{1 \leqq n \leqq (kT)^4} g(n) n^{-s}\, ds \tag{231}$$

$$= i \sum_{1 \leqq n \leqq (kT)^4} \frac{g(n)}{n} \left(\frac{y}{n}\right)^{\sigma_0-1} \int_v^T \left(\frac{y}{n}\right)^{it} dt$$

$$= O\left(\sum_{1 \leqq n \leqq (kT)^4} \frac{d_4(n)}{n} \log(kT) \left(\frac{y}{n}\right)^{\sigma_0-1} \frac{1}{\log \frac{y}{n}} \right) \text{ (nach (200))}$$

$$= O\left(\log^4 T \log T \left(\frac{y}{(kT)^4}\right)^{\sigma_0-1} \frac{1}{\log T} \right) \text{ (nach Hilfssatz 19 und (213))}$$

$$= O\left(\left(\frac{y}{T^4}\right)^{\sigma_0-1} \log^4 T \right) = o(1) \text{ nach (219).}$$

Damit ist Hilfssatz 25 bewiesen.

Fünfter Schritt (Beweis von Hilfssatz 26). Nach Hilfssatz 23, (227), (228), (229) genügt es zu zeigen:

$$\int_{\sigma_0+iv}^{\sigma_0+iT} y^{s-1} \sum_{1 \leqq n \leqq (kT)^3} c(n) n^{-s}\, ds = o(1). \tag{232}$$

Es ist

$$(233)\qquad \int_{\sigma_0+iv}^{\sigma_0+iT} y^{s-1} \sum_{1\leqq n\leqq (kT)^3} c(n)\, n^{-s}\, ds$$

$$= i \sum_{1\leqq n\leqq (kT)^3} \frac{c(n)}{n} \left(\frac{y}{n}\right)^{\sigma_0-1} \int_v^T \left(\frac{y}{n}\right)^{it} dt$$

$$= O\left(\sum_{1\leqq n\leqq (kT)^3} \frac{d_3(n)}{n} \left(\frac{y}{n}\right)^{\sigma_0-1} \frac{1}{\log \frac{y}{n}} \right) \text{ (nach (195))}$$

$$= O\left(\log^3 T \left(\frac{y}{(kT)^3}\right)^{\sigma_0-1} \frac{1}{\log T} \right) \text{ (nach Hilfssatz 19 und (213))}$$

$$= O\left(\log^2 T\, y^{\sigma_0-1} T^{3(1-\sigma_0)}\right) = o(1) \text{ nach (219).}$$

Damit ist auch Hilfssatz 26 bewiesen.

Hilfssatz 27. *Es sei* $|h(n)| \leqq \log n$ *für* $n \geqq 3$, *also*

$$(234)\qquad H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)\, n^{-s}$$

absolut konvergent für $\sigma > 1$. *Es sei ferner für* $1 < \sigma \leqq 2$

$$(235)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} |h(n)|\, n^{-\sigma} \leqq a_{11} \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Dann ist für $z \geqq T \geqq 3$, $1 < \eta < 2$

$$(236)\qquad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - iT}^{\eta + iT} \frac{z^s H(s)}{s}\, ds - \sum_{1\leqq n\leqq z} h(n) \right| \leqq a_{12} \frac{z^\eta \log^2 z}{(\eta - 1) T}.$$

Beweis. Siehe Landau, Über einige Summen, die von den Nullstellen der Riemann'schen Zetafunktion abhängen, Acta Mathematica **35** (1912), S. 271—294, Hilfssatz 3 [17]).

Nunmehr setzen wir

$$(237)\qquad H_1(s) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \frac{1}{\chi(l)} \frac{-L}{L}(s, \chi),$$

$$(238)\qquad H_2(s) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \frac{1}{\chi(l)} \frac{1}{L(s, \chi)},$$

indem wir über alle Charaktere χ mod k summieren. Die Funktionen $H_1(s)$ und $H_2(s)$ gestatten die für $\sigma > 1$ gültigen Entwicklungen:

---

[17]) Herr Landau beweist den Satz nur in der schwächeren Form, in der statt a_{12} nur eine von z, η und T unabhängige Konstante steht. Doch liefert sein Beweis auch genau den obigen Hilfssatz.

$$H_1(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv l \pmod k}}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-s}, \tag{239}$$

$$H_2(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv l \pmod k}}^{\infty} \mu(n)\, n^{-s}, \tag{240}$$

die sofort aus (237) und (238) einerseits, (17) und (18) andererseits folgen. Da nach (239) und (240) die Funktionen $H_1(s)$ und $H_2(s)$ den Voraussetzungen von Hilfssatz 27 genügen, ist für

$$1 < \eta = 1 + \frac{1}{\log x} < 2 \tag{241}$$

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\substack{x < n \leqq x + x^{a_4} \\ n \equiv l \pmod k}} \Lambda(n) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - iT}^{\eta + iT} \{(x + x^{a_4})^s - x^s\} H_1(s) \frac{ds}{s} \right| \\ &\qquad \leqq \frac{a_{12}}{(\eta - 1)\, T} \left((x + x^{a_4})^{1 + \frac{1}{\log x}} \log^2 (x + x^{a_4}) + x^{1 + \frac{1}{\log x}} \log^2 x \right) \\ &\qquad \leqq \frac{a_{13}}{T} \log x\, x \log^2 x = o(x^{a_4}) \end{aligned} \tag{242}$$

wegen

$$\frac{x}{T} = x^{1 - \frac{1}{a_{10}}}, \qquad 1 - \frac{1}{a_{10}} = 1 - \frac{1}{249{,}8} < 1 - \frac{1}{250} = a_4. \tag{243}$$

Entsprechend erhält man

$$\left| \sum_{\substack{x < n \leqq x + x^{a_4} \\ n \equiv l \pmod k}} \mu(n) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - iT}^{\eta + iT} \{(x + x^{a_4})^s - x^s\} H_2(s) \frac{ds}{s} \right| = o(x^{a_4}). \tag{244}$$

Auf dem abgeschlossenen Rechteck

$$\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \eta, \quad |t| \leqq T \tag{245}$$

sind die Funktionen

$$\{(x + x^{a_4})^s - x^s\} H_\nu(s) \frac{1}{s} \qquad (\nu = 1, 2) \tag{246}$$

regulär mit Ausnahme des Pols in $s = 1$ von höchstens erster Ordnung mit dem Residuum $(2 - \nu) \frac{x^{a_4}}{\varphi(k)}$, da auf (245) überall $L(s, \chi) \neq 0$ nach (216). Um die in (242) und (244) auftretenden Integrale zu behandeln, wenden wir den Cauchyschen Integralsatz auf das Rechteck (245) an. Wir wollen zeigen

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta - iT}^{\eta + iT} - (2 - \nu) \frac{x^{a_4}}{\varphi(k)} = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\eta - iT}^{\sigma_0 - iT} + \int_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} + \int_{\sigma_0 + iT}^{\eta + iT} \right) = o(x^{a_4}), \tag{247}$$

wenn der Integrand die Funktion (246) ist. Da dieser für reelle s reell ist, genügt es,

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma_0+iT} \{(x+x^{a_4})^s - x^s\} H_\nu(s) \frac{ds}{s} = o(x^{a_4}) \tag{248}$$

und

$$\int_{\sigma_0+iT}^{\eta+iT} \{(x+x^{a_4})^s - x^s\} H_\nu(s) \frac{ds}{s} = o(x^{a_4}) \tag{249}$$

zu zeigen. Für $t = T$, $\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \eta$ ist nach Hilfssatz 17 bzw. 18

$$H_\nu(s) = O(\log T), \tag{250}$$

woraus sofort

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_0+iT}^{\eta+iT} \{(x+x^{a_4})^s - x^s\} H_\nu(s) \frac{ds}{s} &= (\eta-\sigma_0)\, O(x)\, O(\log T)\frac{1}{T} \\ &= O\left(\frac{x \log T}{T}\right) = o(x^{a_4}) \text{ (nach (243))}\end{aligned} \tag{251}$$

folgt.

Ferner ist

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_0}^{\sigma_0+iT} \{(x+x^{a_4})^s - x^s\} H_\nu(s) \frac{ds}{s} &= \int_x^{x+x^{a_4}} dy \int_{\sigma_0}^{\sigma_0+iT} y^{s-1} H_\nu(s)\, ds \\ &= \int_x^{x+x^{a_4}} o(1)\, dy = o(x^{a_4}) \text{ nach Hilfssatz 25 und 26.}\end{aligned} \tag{252}$$

Somit sind (248) und (249), also auch (247) bewiesen. Aus (247) mit $\nu = 2$ und (244) folgt sofort Satz 4. Aus (247) mit $\nu = 1$ und (242) folgt

$$\sum_{\substack{x < n \leqq x+x^{a_4} \\ n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} \Lambda(n) = \frac{x^{a_4}}{\varphi(k)} + o(x^{a_4}). \tag{253}$$

Hieraus erhält man aber sofort Satz 3. Denn es ist

$$\pi(x+x^{a_4}; k, l) - \pi(x; k, l) \leqq \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{x < n \leqq x+x^{a_4} \\ n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} \Lambda(n) = \frac{1}{\varphi(k)} \frac{x^{a_4}}{\log x}(1+o(1) \tag{254}$$

$$\begin{aligned}\pi(x+x^{a_4}; k, l) - \pi(x; k, l) &\geqq \sum_{\substack{x < p^m \leqq x+x^{a_4} \\ p^m \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}}{}' 1 + O(\sqrt{x}) \\ &\geqq \frac{1}{\log(x+x^{a_4})} \sum_{\substack{x < n \leqq x+x^{a_4} \\ n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)}} \Lambda(n) + O(\sqrt{x}) = \frac{1}{\varphi(k)} \frac{x^{a_4}}{\log x}(1+o(1)).\end{aligned} \tag{255}$$

(Eingegangen am 28. Januar 1932.)

Studien zur Kombinatorik.

Von

Richard Rado in Berlin.

Einleitung.

Diese Arbeit knüpft an einen in letzter Zeit viel genannten kombinatorischen Satz von van der Waerden[1]) an, welcher lautet:

k, l und N seien natürliche Zahlen. Man verteile die Zahlen

$$1, 2, \ldots, N$$

irgendwie auf k Klassen. Ist N mindestens gleich einer gewissen von k und l abhängenden Konstanten $f(k, l)$, dann gibt es stets bei jeder solchen Verteilung in mindestens einer Klasse ein Zahlensystem von der Form

$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+ld$$

mit $a, d > 0$, also eine arithmetische Progression von $l+1$ Gliedern.

Dieser außerordentlich interessante Satz macht gewisse zahlentheoretische Sätze zugänglich, die mit den bisherigen Mitteln fast unangreifbar erschienen. Derartige Folgerungen hat Herr A. Brauer[2]) aus dem Satz gezogen. Schon vor van der Waerden hat Herr I. Schur[3]) sich im Zusammenhang mit einem zahlentheoretischen Satz ein ähnliches kombinatorisches Problem gestellt und gelöst, indem er folgendes nachwies:

Wenn man die Zahlen

$$1, 2, \ldots, [e \cdot k!]$$

auf k Klassen verteilt, dann gibt es immer in mindestens einer Klasse ein Zahlensystem der Form

$$a, b, a+b.$$

---

[1]) Nieuw archief voor wiskunde **15**, S. 212–216.

[2]) Sitzungsberichte d. Preuß. Akad. d. Wiss., math.-physik. Klasse, 1928, S. 9–16, 1931, S. 329–341.

[3]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **25** (1916), S. 114.

Aber auch abgesehen von ihren Anwendungen bietet der obige van der Waerdensche und der letzte Satz Interesse. Ein ganz neuer Problemkreis der Kombinatorik erschließt sich mit diesen Sätzen. Man kann sich nämlich fragen, ob es noch andere Systeme von positiv ganzzahlig lösbaren Gleichungen oder andersartigen Bedingungen gibt, die bei beliebigen Verteilungen hinreichend vieler natürlicher Zahlen auf endlich viele Klassen immer in mindestens einer Klasse erfüllbar sind. Bedingungssysteme mit dieser Eigenschaft will ich *regulär* nennen. Gilt dieselbe Lösbarkeitsaussage für ein Bedingungssystem bei allen Verteilungen mit *fester* Klassenanzahl k, dann nenne ich das Bedingungssystem *k-fach regulär*.

Der obige Satz von Schur ist, wenn man von dem genauen Wert der Konstanten $[e \cdot k!]$ absieht, identisch mit der Aussage, daß die Gleichung

$$x + y - z = 0$$

regulär ist.

Das Hauptresultat der folgenden Untersuchungen wird die Bestimmung sämtlicher Systeme linearer Gleichungen sein, die diese Eigenschaft der Regularität haben. Für den Spezialfall homogener Gleichungen erhält man unter Benutzung des obigen Satzes von van der Waerden folgendes Kriterium:

Dann und nur dann ist das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

regulär, wenn man die Indizes $1, 2, \ldots, n$ so in endlich viele Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ einteilen kann, daß es zu jedem $\varkappa = 1, 2, \ldots, q$ eine Lösung x_ν des Gleichungssystems gibt mit

$$\begin{aligned} &x_\nu \text{ rational} && \text{für alle } \nu \text{ aus } \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\varkappa-1}, \\ &x_\nu = 1 && \text{für alle } \nu \text{ aus } \Gamma_\varkappa, \\ &x_\nu = 0 && \text{für alle } \nu \text{ aus } \Gamma_{\varkappa+1}, \Gamma_{\varkappa+2}, \ldots, \Gamma_q. \end{aligned}$$

Für eine einzige Gleichung

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = 0 \qquad (c_\nu \neq 0, \text{ rational}) \tag{1}$$

besagt dieses Kriterium einfach, daß irgendwelche der c_ν eine verschwindende Summe haben müssen. Man sieht, wie der obige Satz von Schur aus dem Kriterium unmittelbar folgt. Der Satz von van der Waerden folgt auch aus ihm, sogar gleich mit der von I. Schur[4]) herrührenden Verschärfung, daß man die Progression immer so wählen kann, daß ihre sämtlichen $l+1$ Glieder und ihre *Differenz* in derselben Klasse liegen. Diese verschärfte Form ist nämlich identisch mit der Aussage, daß das Gleichungssystem

[4]) Publiziert bei A. Brauer, vgl. [2]), S. 9–16 (Satz 5).

$$\begin{aligned} x_0 \quad &- 2x_1 \quad + x_2 \quad = 0 \\ x_1 \quad &- 2x_2 \quad + x_3 \quad = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{l-2} &- 2x_{l-1} + x_l \quad = 0 \\ x_{l-1} &- x_l \quad + x_{l+1} = 0 \end{aligned}$$

regulär ist.

Eine dem Kriterium genügende Gruppeneinteilung der hier in Betracht kommenden Indizes $0, 1, \ldots, l+1$ ist:

1. Gruppe Γ_1: $0, 1, \ldots, l$

2. Gruppe Γ_2: $l+1$.

Der erste Teil der vorstehenden Arbeit beschäftigt sich im wesentlichen mit der Regularität linearer Gleichungen und Ungleichungen. § 1 bringt den Satz von van der Waerden mit einem etwas abgeänderten Beweis, in § 2 werden unter den Gleichungen (1) alle diejenigen bestimmt, welche zweifach regulär sind. § 3 bringt einen allgemeinen Satz über reguläre Bedingungssysteme, den man den Satz von der gleichmäßigen Lösbarkeit regulärer Bedingungssysteme nennen könnte. Er zeigt nämlich allgemein die Identität der folgenden beiden Aussagen, die van der Waerden[5]) noch ausdrücklich auseinanderhält:

1. Das Bedingungssystem $\mathfrak{S}$ ist bei jeder Verteilung *aller* natürlichen Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots$$

auf k Klassen stets durch Zahlen zu befriedigen, die derselben Klasse angehören.

2. Es gibt eine Konstante N, so daß $\mathfrak{S}$ bei jeder Verteilung der *endlich vielen* Zahlen

$$1, 2, \ldots, N$$

auf k Klassen stets durch Zahlen aus derselben Klasse zu befriedigen ist. (Die letzte Aussage ist nach obiger Definition identisch damit, daß $\mathfrak{S}$ k-fach regulär ist. In § 1 wird aus Bequemlichkeitsgründen als Regularitätsdefinition das Zutreffen von 1. gewählt.)

In § 4 wird das allgemeine Kriterium für Regularität linearer Gleichungssysteme hergeleitet. Ferner wird dort eine Folgerung aus diesem Kriterium angegeben, welche lautet:

---

[5]) loc. cit. S. 212.

Um nachzuweisen, daß das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \tag{2}$$

regulär ist, genügt es, von jeder Gleichung, die durch lineare Kombination der Gleichungen von (2) mit rationalen Koeffizienten entsteht, Regularität zu beweisen.

In § 5 werden verschiedene Methoden angegeben, mehrere reguläre lineare Gleichungssysteme zu einem neuen regulären Gleichungssystem zu kombinieren. Insbesondere ergibt sich das überraschende Resultat: Bei jeder Verteilung aller natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen gibt es mindestens eine Klasse, in der *sämtliche* überhaupt existierenden regulären linearen homogenen Gleichungssysteme *gleichzeitig* je eine Lösung haben.

§ 6 enthält einen Satz, der einen ersten Schritt in der Richtung auf folgende mit großer Wahrscheinlichkeit zutreffende Vermutung darstellt: Zu jedem n gibt es eine Zahl k_n, die die Eigenschaft hat, daß jedes Gleichungssystem (2) in n Unbekannten entweder regulär oder höchstens k_n-fach regulär ist.

In § 7 wird folgendes bewiesen: Wenn man bei einem k-fach regulären Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

beliebige der Gleichheitszeichen durch die Zeichen $>$ oder $<$ ersetzt, dann ist das entstehende Bedingungssystem wieder k-fach regulär, vorausgesetzt, daß es überhaupt durch positive Zahlen lösbar ist. Außerdem wird in diesem Paragraphen untersucht, welche homogenen regulären Gleichungssysteme bei jeder Verteilung der natürlichen Zahlen stets so zu lösen sind, daß die Unbekannten sämtlich in derselben Klasse liegen und *voneinander verschieden* sind.

In § 8 wird erörtert, welche linearen Gleichungssysteme sich Verteilungen der positiven *und negativen* ganzen Zahlen

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{3}$$

gegenüber genau so verhalten wie die regulären Gleichungen bei den Verteilungen der natürlichen Zahlen, also bei jeder Verteilung der Zahlen (3) immer durch Zahlen aus derselben Klasse zu lösen sind. Unter diesen Gleichungssystemen kommen offenbar sämtliche regulären Gleichungssysteme vor. Es zeigt sich, daß außer diesen im früheren Sinne regulären Gleichungssystemen nur noch solche Gleichungssysteme in Frage kommen, bei denen diese Lösbarkeitseigenschaft auf ganz triviale Art zustande kommt.

Der zweite Teil dieser Arbeit ist allgemeineren Fragen rein kombinatorischer Art gewidmet. Die bisherigen Begriffsbildungen werden in einer

Art verallgemeinert, daß kein Gebrauch mehr davon gemacht wird, daß die Dinge, die auf die Klassen verteilt werden, Zahlen sind, zwischen denen Rechnungsarten definiert sind. Es werden allgemeiner die Elemente irgendeiner abstrakten abzählbaren Menge verteilt.

In § 1 wird der Gleichmäßigkeitssatz auf diese allgemeineren Verhältnisse übertragen, in § 2 wird gezeigt, daß den Sätzen von § 5 des ersten Teiles über die Koppelung mehrerer regulärer Gleichungssysteme zu neuen regulären Gleichungssystemen bedeutend allgemeinere Sätze rein kombinatorischer Art zugrunde liegen, speziell, daß man zur Ableitung der erwähnten Koppelungssätze das Regularitätskriterium gar nicht benötigt. Es war lediglich eine Frage der Bequemlichkeit, wenn diese Sätze im ersten Teil mit Benutzung dieses Kriteriums abgeleitet wurden.

Inhalt.

Seite

Einleitung 424

I. Teil. Regularität linearer Gleichungen und Ungleichungen.

§ 1. Einführende Definitionen. Der Satz von van der Waerden . . . 428

§ 2. Ein spezielles Beispiel 435

§ 3. Der Gleichmäßigkeitssatz 439

§ 4. Bestimmung aller regulären Systeme linearer Gleichungen . . . 443

§ 5. Koppelung regulärer Gleichungssysteme 455

§ 6. Abschätzung des Regularitätsgrades für nichtreguläre lineare Gleichungen 462

§ 7. Zwei spezielle reguläre Systeme von linearen Gleichungen und Ungleichungen 465

§ 8. Erweiterung der Menge der verteilten Zahlen 469

II. Teil. Allgemeinste Bedingungssysteme.

§ 1. Einführende Begriffsbildungen. Verallgemeinerung des Gleichmäßigkeitssatzes 471

§ 2. Koppelung von Bedingungssystemen 474

I. Teil.

Regularität linearer Gleichungen und Ungleichungen.

§ 1.

Einführende Definitionen. Der Satz von van der Waerden.

Man denke sich die natürlichen Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots$$

irgendwie auf endlich viele Klassen verteilt. Derartige Verteilungen bezeichne ich im folgenden mit

$$\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \ldots, \mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots.$$

Zwei Verteilungen werden als miteinander identisch betrachtet, wenn sie sich nur in der Bezeichnung der Klassen unterscheiden. Bei diesen Verteilungen können auch einzelne Klassen leer bleiben, so daß also eine Verteilung auf k Klassen gleichzeitig als Verteilung auf $(k+1)$ Klassen angesehen wird. Die Schreibweise

$$a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}) \tag{1}$$

möge bedeuten, daß sich die Zahlen a und b bei der Verteilung $\mathfrak{V}$ in derselben Klasse befinden. Wird umgekehrt für jedes Paar a, b irgendwie festgesetzt, ob (1) gelten soll oder nicht, so ist dadurch eine Verteilung $\mathfrak{V}$ definiert, wenn die üblichen drei Postulate erfüllt sind:

1. $a \equiv a \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V})$.
2. Wenn $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V})$, dann $b \equiv a \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V})$.
3. Wenn $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V})$, $b \equiv c \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V})$, dann $a \equiv c \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V})$.

Im folgenden wird es sehr häufig vorkommen, daß eine Verteilung derartig definiert wird. Es ist dann jedesmal klar, daß diese Postulate gelten, was nicht mehr besonders hervorgehoben wird.

So wird oft auf folgende Art von einer gegebenen Verteilung $\mathfrak{V}$ zu einer anderen Verteilung $\mathfrak{V}'$ übergegangen werden: Gegeben sind außer $\mathfrak{V}$ noch endlich viele Funktionen

$$f(x), g(x), \ldots, l(x), \tag{2}$$

die für natürliches x definiert sind und nur natürliche Zahlen als Funktionswerte haben. $\mathfrak{V}'$ wird nun definiert durch:

Dann und nur dann ist $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}')$, wenn

$$\begin{aligned} f(a) &\equiv f(b) \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}), \\ g(a) &\equiv g(b) \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ l(a) &\equiv l(b) \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}). \end{aligned}$$

Den Übergang von $\mathfrak{V}$ zu $\mathfrak{V}'$ kann man sich so klar machen: Die Klassen von $\mathfrak{V}$ seien mit

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_k \tag{3}$$

bezeichnet. c sei irgendeine natürliche Zahl. Dann verteilen sich die Zahlen

$$f(c), g(c), \ldots, l(c)$$

in bestimmter Weise auf die Klassen (3). Es sei etwa

$$f(c) \prec \mathfrak{K}_\alpha, g(c) \prec \mathfrak{K}_\beta, \ldots, l(c) \prec \mathfrak{K}_\lambda.$$

Bei der neuen Verteilung $\mathfrak{V}'$ liegen dann alle und nur die Zahlen c in derselben Klasse, bei denen die Indizes

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda \tag{4}$$

der Größe und Reihenfolge nach übereinstimmen.

Die Anzahl der Funktionen (2) sei N. Da für jeden der Indizes (4) k Werte in Frage kommen, gibt es genau

$$K = k^N$$

verschiedene Systeme (4). Folglich besitzt $\mathfrak{V}'$ genau ebenso viele Klassen, wobei auch, wie oben schon erwähnt wurde, manche Klassen leer sein können.

Die so definierte Verteilung $\mathfrak{V}'$ bezeichne ich durch

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}[f(\xi), g(\xi), \ldots, l(\xi)].$$

Der Buchstabe ξ wird im folgenden nur für die Verwendung in diesem Symbol reserviert bleiben.

Für jedes $\mathfrak{V}$ ist z. B.

$$\mathfrak{V}[\xi] = \mathfrak{V}.$$

Für die spezielle Verteilung

$$\mathfrak{V}'' = \begin{Bmatrix} 1, 5, 7, 8, & 9, \ldots \\ 2, 3, 4, 6, & 10, \ldots \end{Bmatrix}$$

wird

$$\mathfrak{V}''[2\zeta] = \begin{Bmatrix} 4, \ldots \\ 1, 2, 3, 5, \ldots \end{Bmatrix}, \qquad \mathfrak{V}''[\xi, \xi+1] = \begin{Bmatrix} 7, 8, \ldots \\ 1, 5, 9, \ldots \\ 4, 6, \ldots \\ 2, 3, \ldots \end{Bmatrix}.$$

Statt

$$\mathfrak{V}[f_1(\xi), f_2(\xi), \ldots, f_N(\xi)]$$

schreibe ich auch

$$\mathfrak{V}[f_\nu(\xi)\,(1 \leqq \nu \leqq N)].$$

Die Relation

$$x \equiv y \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}[f_\nu(\xi)\,(1 \leqq \nu \leqq N)])$$

ist also völlig identisch mit den N Relationen

$$f_\nu(x) \equiv f_\nu(y) \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}) \qquad (1 \leqq \nu \leqq N).$$

Dieses Übergehen zu neuen Verteilungen mit eventuell bedeutend größerer Klassenanzahl durch Vermittlung irgendwelcher Funktionen wird sich als ein äußerst fruchtbares Beweisprinzip herausstellen.

Mit $\mathfrak{V}_m$ (m = natürliche Zahl) sei im folgenden stets die Restklassenverteilung mod m bezeichnet, also:

$$\mathfrak{V}_m = \begin{Bmatrix} 1, & 1+m, & 1+2m, \ldots \\ 2, & 2+m, & 2+2m, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m, & 2m, & 3m, \ldots \end{Bmatrix}.$$

Es bezeichne $\mathfrak{S}$ ein System irgendwelcher Bedingungen für die Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Zahlen sind, dann besage die Ausdrucksweise

$$\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

daß die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Bedingungen $\mathfrak{S}$ erfüllen.

Definition. Ein Bedingungssystem $\mathfrak{S}$ heißt *k-fach regulär*, wenn es zu jeder Verteilung $\mathfrak{V}$ mit k Klassen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt mit

$$a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \equiv a_n \,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{V})$$
$$\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

$\mathfrak{S}$ heißt *regulär* schlechthin, wenn $\mathfrak{S}$ k-fach regulär ist für jedes k.

So ist z. B. die Gleichung

$$(x+1-y)(x+2-y) = 0 \tag{5}$$

zweifach regulär. Denn wenn $\mathfrak{V}$ irgendeine Verteilung der natürlichen Zahlen auf zwei Klassen ist, dann liegen zwei von den drei Zahlen 1, 2, 3 in derselben Klasse. Es ist also mindestens eine der folgenden drei Relationen richtig:

$$1 \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{V}),$$
$$1 \equiv 3\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{V}),$$
$$2 \equiv 3\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{V}).$$

Trifft die erste zu, dann ist $x = 1, y = 2$ eine Lösung von (5), in den anderen Fällen ist $x = 1$, $y = 3$ bzw. $x = 2$, $y = 3$ eine Lösung von (5), deren Zahlen, wie die obige Definition verlangt, sich in derselben Klasse befinden. Die Gleichung (5) ist aber nicht dreifach regulär. Denn wählt man zwei Zahlen x, y, die bei der speziellen Verteilung

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_3 = \begin{Bmatrix} 1, 4, 7, \ldots \\ 2, 5, 8, \ldots \\ 3, 6, 9, \ldots \end{Bmatrix}$$

sich in derselben Klasse befinden, dann gilt für sie offenbar niemals (5). Die Gleichung (5) ist also zweifach regulär, aber nicht regulär schlechthin.

Dagegen ist die Gleichung

$$x^2 - 3xy + 4y^2 - 2 = 0$$

regulär. Denn sie ist durch $x = y = 1$ befriedigt, und es ist ja für jedes $\mathfrak{V}$

$$1 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{V}).$$

Allgemein ist jedes Bedingungssystem

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

regulär, für das eine natürliche Zahl a existiert mit

$$\mathfrak{S}(a, a, \ldots, a) = 0.$$

Es gilt nun folgender Satz von van der Waerden[6]):

[6]) Siehe Einleitung.

Satz I. *Zu den natürlichen Zahlen k, l gibt es eine natürliche Zahl $f(k, l)$, so daß das Bedingungssystem*

$$x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \ldots = x_{l-1} - x_l \neq 0$$

$$x_0, x_1, \ldots, x_l \leqq f(k, l)$$

k-fach regulär ist.

Der Satz besagt also, daß man bei jeder Verteilung der natürlichen Zahlen auf k Klassen immer in mindestens einer Klasse $l+1$ Zahlen finden kann, die eine arithmetische Progression bilden und höchstens gleich einer nur von k und l abhängenden Konstanten sind. Der folgende Beweis knüpft an die Beweismethode von van der Waerden an. Ihm liegt aber ein etwas andersartiger Gedankengang zugrunde, der schneller zum Ziel führt.

Beweis. Die Behauptung kann auch so formuliert werden: Zu jedem $\mathfrak{B}$ mit k Klassen gibt es natürliche Zahlen a, d mit

$$a + \lambda d \equiv a \pmod{\mathfrak{B}} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq l),$$

$$a + l d \leqq f(k, l).$$

Für $l = 1$ leistet offenbar

$$f(k, 1) = k + 1$$

das, was behauptet wird. Denn von den $k+1$ Zahlen

$$1, 2, \ldots, k+1$$

liegen bei Verteilungen auf k Klassen immer zwei Zahlen in derselben Klasse. Man nehme an, es sei die Existenz einer Zahl $f(k, l)$ für alle k und ein festes $l \geqq 1$ bereits bewiesen. Hieraus wird sich die Existenz von $f(k, l+1)$ für alle k und dasselbe l ergeben, womit der Satz bewiesen sein wird.

$\mathfrak{B}$ sei eine Verteilung auf k Klassen.

Lemma. Zu den ganzen Zahlen $a \geqq 0$, $n > 0$ gibt es natürliche Zahlen a', d' mit

$$a + (a' + \lambda d') + \nu \equiv a + a' + \nu \pmod{\mathfrak{B}} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq l,\ 0 \leqq \nu < n), \tag{6}$$

$$a' + l d' \leqq f(k^n, l). \tag{7}$$

Beweis des Lemmas. Die Verteilung

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}[a + \xi + \nu\ (0 \leqq \nu < n)] \tag{8}$$

hat k^n Klassen. Also gibt es nach der Bedeutung von $f(k^n, l)$ natürliche Zahlen a', d' mit (7) und

$$a' + \lambda d' \equiv a' \pmod{\mathfrak{B}'} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq l). \tag{9}$$

(9) ist nach (8) identisch mit (6), womit das Lemma bewiesen ist.

Nun wähle man zunächst beliebige natürliche Zahlen $n_0, n_1, \ldots, n_k$ und bestimme sukzessiv Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_k$, $d_0, d_1, \ldots, d_k$ folgendermaßen: Die Anwendung des Lemmas auf $a = 0$, $n = n_0$ liefert die Existenz natürlicher Zahlen $a' = a_0$, $d' = d_0$ mit

$$(a_0 + \lambda_0 d_0) + \nu_0 \equiv a_0 + \nu_0 \,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{B}) \qquad (0 \leqq \lambda_0 \leqq l,\ 0 \leqq \nu_0 < n_0),$$

$$a_0 + l\,d_0 \leqq f(k^{n_0}, l).$$

Wenn bereits $a_0, a_1, \ldots, a_{\varkappa-1}$, $d_0, d_1, \ldots, d_{\varkappa-1}$ bestimmt sind $(1 \leqq \varkappa < k)$, dann liefert das Lemma, angewandt auf die Zahlen

$$a = \sum_{\varrho=0}^{\varkappa-1} a_\varrho, \qquad n = n_\varkappa,$$

die Existenz natürlicher Zahlen $a' = a_\varkappa$, $d' = d_\varkappa$ mit

$$(10)\quad \sum_0^{\varkappa-1} a_\varrho + (a_\varkappa + \lambda_\varkappa d_\varkappa) + \nu_\varkappa \equiv \sum_0^{\varkappa-1} a_\varrho + a_\varkappa + \nu_\varkappa \,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{B}) \quad (0 \leqq \lambda_\varkappa \leqq l, 0 \leqq \nu_\varkappa < n_\varkappa),$$

$$(11)\qquad a_\varkappa + l\,d_\varkappa \leqq f(k^{n_\varkappa}, l).$$

Man setze fest, daß Summen der Form $\sum_{\varrho=\alpha}^{\alpha-1} x_\varrho$ den Wert Null haben sollen. Dann gilt (10) und (11) für $\varkappa = 0, 1, \ldots, k$.

Da $\mathfrak{B}$ nur k Klassen hat, gibt es unter den $k+1$ Zahlen

$$b_\varkappa = \sum_0^k a_\varrho + (l+1) \sum_{\varkappa+1}^k d_\varrho \qquad (0 \leqq \varkappa \leqq k)$$

zwei voneinander verschiedene Zahlen, die in derselben Klasse liegen. Es gibt also $\varkappa_1, \varkappa_2$ mit $0 \leqq \varkappa_1 < \varkappa_2 \leqq k$ und

$$(12)\qquad b_{\varkappa_1} \equiv b_{\varkappa_2} \,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{B}).$$

Setzt man nun

$$a = b_{\varkappa_2}, \qquad d = \sum_{\varkappa_1+1}^{\varkappa_2} d_\varrho,$$

dann wird sich zeigen, daß für passende, nur von k und l abhängige Wahl der $n_\varkappa$ die $l+2$ Zahlen

$$(13)\qquad a + \mu\,d \qquad (0 \leqq \mu \leqq l+1)$$

sämtlich in derselben Klasse liegen, womit die Existenz von $f(k, l+1)$ erwiesen sein wird.

Zunächst ist

$$(14)\quad a + (l+1)\,d = \sum_1^k a_\varrho + (l+1) \sum_{\varkappa_1+1}^{\varkappa_2} d_\varrho + (l+1) \sum_{\varkappa_2+1}^k d_\varrho = b_{\varkappa_1}.$$

Für $0 \leqq \lambda \leqq l$ ist

$$(15)\quad a + \lambda\,d = \sum_1^{\varkappa_1} a_\varrho + \sum_{\varkappa_1+1}^{\varkappa_2} (a_\varrho + \lambda\,d_\varrho) + \sum_{\varkappa_2+1}^k (a_\varrho + [l+1]\,d_\varrho).$$

Will man auf (15) die Relation (10) anwenden mit

$$\varkappa = \varkappa_1 + 1, \qquad \nu_\varkappa = \sum_{\varkappa_1+2}^{\varkappa_2} (a_\varrho + \lambda d_\varrho) + \sum_{\varkappa_2+1}^{k} (a_\varrho + [l+1] d_\varrho),$$

so ist dazu erforderlich:

$$\sum_{\varkappa_1+2}^{\varkappa_2} (a_\varrho + \lambda d_\varrho) + \sum_{\varkappa_2+1}^{k} (a_\varrho + [l+1] d_\varrho) < n_{\varkappa_1+1}.$$

Nach (11) ist hierzu hinreichend eine Ungleichung der Form

$$F(n_{\varkappa_1+2}, n_{\varkappa_1+3}, \ldots, n_k) < n_{\varkappa_1+1},$$

wobei F außer von den $n_\varkappa$ nur noch von k und l abhängt. Die Anwendung von (10) würde ergeben:

$$a + \lambda d \equiv \sum_{1}^{\varkappa_1+1} a_\varrho + \sum_{\varkappa_1+2}^{\varkappa_2} (a_\varrho + \lambda d_\varrho) + \sum_{\varkappa_2+1}^{k} (a_\varrho + [l+1] d_\varrho) \pmod{\mathfrak{B}}.$$

Falls $\varkappa_2 \geqq \varkappa_1 + 2$, dann könnte man durch nochmalige Anwendung von (10) mit $\varkappa = \varkappa_1 + 2$ hieraus folgern:

$$a + \lambda d \equiv \sum_{1}^{\varkappa_1+2} a_\varrho + \sum_{\varkappa_1+3}^{\varkappa_2} (a_\varrho + \lambda d_\varrho) + \sum_{\varkappa_2+1}^{k} (a_\varrho + [l+1] d_\varrho) \pmod{\mathfrak{B}}$$

vorausgesetzt, daß eine Relation der Form

$$G(n_{\varkappa_1+3}, n_{\varkappa_1+4}, \ldots, n_k) < n_{\varkappa_1+2}$$

gilt. Fährt man so fort, dann erhält man nach $\varkappa_2 - \varkappa_1$ Schritten

$$(16) \quad a + \lambda d \equiv \sum_{1}^{\varkappa_2} a_\varrho + \sum_{\varkappa_2+1}^{k} (a_\varrho + [l+1] d_\varrho) = b_{\varkappa_2} \pmod{\mathfrak{B}} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq l).$$

Erforderlich wären hierzu endlich viele Relationen der Form

$$H(n_{\varkappa+1}, n_{\varkappa+2}, \ldots, n_k) < n_\varkappa,$$

wobei die H gewisse Funktionen sind, die außer von den n_ϱ nur noch von k und l abhängen. Aus der Form der Relationen erkennt man, daß man nacheinander feste, nur von k und l abhängende Werte von $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_0$ angeben kann, die allen diesen Relationen genügen. Aus (14), (16), (12) folgt dann, wie oben behauptet, daß sich alle Zahlen (13) in derselben Klasse befinden. Da sie außerdem durch eine nur von k und l abhängende Schranke abschätzbar sind, ist die Existenz von $f(k, l+1)$ und damit der Satz I bewiesen.

Der vorstehende Beweis liefert folgende Methode, sukzessiv der Behauptung genügende Werte von $f(k, l)$ zu bestimmen: Man setze

$$f(k, 1) = k + 1.$$

Ist bereits $f(k, l)$ für alle k und ein festes $l \geqq 1$ bestimmt, dann setze man

$$m_0 = 1, \quad m_{\varkappa+1} = m_\varkappa + 2 \cdot f(k^{m_\varkappa}, l) \qquad (0 \leqq \varkappa \leqq k).$$

Dann ist

$$f(k, l+1) = m_{k+1}$$

ein brauchbarer Wert. Man könnte leicht durch Modifikation des Beweises diese Schranken erheblich herabdrücken. Sie bleiben aber immer noch so ungeheuer groß, daß Überlegungen zu diesem Zweck keinen rechten Nutzen haben.

§ 2.
Ein spezielles Beispiel.

Bevor allgemeine Systeme linearer Gleichungen auf ihre Regularität hin untersucht werden, soll der Spezialfall einer homogenen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genauer diskutiert werden. Der folgende Satz gestattet es, unter diesen Gleichungen alle anzugeben, die zweifach regulär sind. Zunächst sieht man leicht: Die Gleichung

$$a x + b y = 0 \tag{1}$$

ist regulär für $a + b = 0$, nicht zweifach regulär für $a + b \neq 0$.

Denn für $a + b = 0$ ist $x = y = 1$ eine Lösung von (1), was Regularität nach sich zieht. Ist $a + b \neq 0$, dann kann man (1) in der Form annehmen:

$$y = c \cdot x \quad \text{mit } c \neq 1. \tag{2}$$

Für $c \leqq 0$ ist (2) garnicht durch positive Werte von x und y zu lösen, also erst recht nicht zweifach regulär. Ist $c > 0$, dann kann man, eventuell nach Vertauschung von x und y, sogar $c > 1$ annehmen. Ich gebe nun eine Verteilung der natürlichen Zahlen auf zwei Klassen an, bei der niemals x und cx in derselben Klasse liegen. Damit wäre dann gezeigt, daß (2) nicht zweifach regulär ist. Die Verteilung findet man folgendermaßen: Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es eine ganze Zahl $\varkappa$ mit

$$c^\varkappa \leqq m < c^{\varkappa+1}.$$

Legt man nun alle m mit geradem $\varkappa$ in eine Klasse, die übrigen m in eine andere Klasse, dann erhält man offenbar eine Verteilung der gewünschten Art.

Für Gleichungen mit drei Unbekannten gilt der Satz:

Satz II. *a, b, c seien natürliche Zahlen. Dann gibt es eine ebensolche Zahl N, so daß das Bedingungssystem*

$$a x + b y = c z, \quad x, y, z \leqq N$$

zweifach regulär ist.

Ein brauchbares N findet man folgendermaßen: Man bestimme natürliche Zahlen x_0, y_0, z_0 mit

$$a x_0 + b y_0 = c z_0$$

und bilde

$$A = \mathrm{Max}(x_0, y_0, z_0), \quad m = \textit{kleinstes gemeinsames Vielfaches von } \frac{a}{(a,b)} \textit{ und } \frac{c}{(b,c)},$$

$$N = \mathrm{Max}\left(mA, \frac{bm}{c}(A^2-1)(A-1) + \frac{bm}{c}\cdot A, \frac{bm}{a}\cdot A^2(A-1)\right).$$

Der Satz besagt z. B.: Verteilt man die Zahlen

$$1, 2, \ldots, 20$$

irgendwie auf zwei Klassen, dann gibt es immer in mindestens einer Klasse drei Zahlen x, y, z mit

$$2x + y = 5z.$$

Beweis. $\mathfrak{V}$ sei eine Verteilung auf zwei Klassen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, bei der im Gegensatz zur Behauptung weder in $\mathfrak{K}_1$ noch in $\mathfrak{K}_2$ Zahlen x, y, z liegen mit $ax + by = cz$. Zunächst bemerke ich folgendes: C sei eine beliebige natürliche Zahl. Dann liegen die Zahlen

$$C, 2C, 3C, \ldots, AC$$

nicht alle in derselben Klasse wegen

$$a\cdot x_0 C + b\cdot y_0 C = c\cdot z_0 C.$$

Ich setze $x = m$. Dann ist $\frac{bx}{a}$ und $\frac{bx}{c}$ ganz. Man kann annehmen:

$$x \prec \mathfrak{K}_1.$$

y sei die erste Zahl der Reihe

$$m, 2m, 3m, \ldots, Am,$$

die in $\mathfrak{K}_2$ liegt. Nach der Anfangsbemerkung gibt es eine solche Zahl. Es ist also

$$y = lm \prec \mathfrak{K}_2 \quad \text{mit} \quad 2 \leqq l \leqq A.$$

Es ist

$$\frac{b}{a}(y - x) = \frac{b}{a}(l-1)m$$

positiv und ganz. Irgendein positives Vielfaches dieser Zahl sei in $\mathfrak{K}_2$, z. B. sei

$$z = n\cdot\frac{b}{a}(y-x) \prec \mathfrak{K}_2 \quad \text{mit } n \text{ positiv, ganz.}$$

Da

$$\frac{a}{c}\cdot z + \frac{b}{c}\cdot y = \frac{a}{c}\cdot n\cdot\frac{b}{a}(l-1)m + \frac{b}{c}\cdot lm$$

positiv und ganz ist,

$$z, y \prec \mathfrak{K}_2,$$

so folgt

$$\frac{a}{c}\cdot z+\frac{b}{c}\cdot y\prec \mathfrak{R}_1.$$

Denn andernfalls hätte man in $\mathfrak{R}_2$ die Gleichung

$$a\,u+b\,v=c\,w$$

durch

$$u=z,\quad v=y,\quad w=\frac{a}{c}\cdot z+\frac{b}{c}\cdot y$$

aufgelöst, was der Annahme über $\mathfrak{B}$ widerspräche. Wegen

$$x\prec \mathfrak{R}_1,\quad \frac{a}{c}\cdot z+\frac{b}{c}\cdot y\prec \mathfrak{R}_1$$

folgt aus demselben Grunde

$$\frac{c}{a}\cdot\left(\frac{a}{c}\cdot z+\frac{b}{c}\cdot y\right)-\frac{b}{a}\cdot x\prec \mathfrak{R}_2,$$

falls diese letzte Zahl positiv und ganz ist. Das ist sie aber wegen

$$\frac{c}{a}\left(\frac{a}{c}z+\frac{b}{c}y\right)-\frac{b}{a}x=z+\frac{b}{a}(y-x)=(n+1)\cdot\frac{b}{a}(y-x).$$

Wir haben also bisher: x und y sind feste Zahlen.

$$C=\frac{b}{a}(y-x)$$

ist positiv und ganz. Aus

$$n\,C\prec \mathfrak{R}_2,\quad n \text{ positiv, ganz}$$

folgt immer

$$(n+1)\,C\prec \mathfrak{R}_2.$$

Zu diesem Schluß wurde die Verteilung von Zahlen benutzt, die alle höchstens folgende Schranke erreichen:

$$\operatorname{Max}\left(m,\,A\,m,\,n\cdot\frac{b}{a}(A-1)\,m,\,\frac{b\,n}{c}(A-1)\,m+\frac{b\,m}{c}\cdot A,\,(n+1)\cdot\frac{b}{a}(A-1)\,m\right)$$

$$=\operatorname{Max}\left(m\,A,\,\frac{b\,m\,n}{c}(A-1)+\frac{b\,m}{c}\cdot A,\,\frac{b\,m\,(n+1)}{a}(A-1)\right).$$

Nun gibt es nach der Anfangsbemerkung eine natürliche Zahl $n_0\leqq A$ mit

$$n_0\cdot C\prec \mathfrak{R}_2.$$

Indem man nun das eben formulierte Ergebnis nacheinander auf

$$n=n_0,\,n_0+1,\,n_0+2,\,\ldots,\,A\,n_0-1$$

anwendet, erhält man sukzessiv:

$$n_0\,C,\,(n_0+1)\,C,\,\ldots,\,2\cdot n_0\,C,\,\ldots,\,3\cdot n_0\,C,\,\ldots,\,A\cdot n_0\,C\prec \mathfrak{R}_2.$$

Das ist ein Widerspruch zur Anfangsbemerkung, da nicht die ersten A Viel-

fachen der Zahl $n_0 C$ sich in derselben Klasse befinden können. Wenn ich in der obigen Schranke

$$n = A n_0 - 1$$

einsetze, erhalte ich eine Schranke mit der Eigenschaft, daß ich zur Konstruktion des Widerspruchs nur Zahlen bis zu dieser Schranke heranzuziehen brauche. Diese Schranke wird höchstens gleich

$$\mathrm{Max}\left(mA, \frac{bm}{c}(A^2-1)(A-1)+\frac{bm}{c}\cdot A, \frac{bm}{a}\cdot A^2(A-1)\right).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem Satz II folgt: *Dann und nur dann ist die Gleichung*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0 \qquad (a_\nu \text{ rational}) \tag{3}$$

zweifach regulär, wenn mindestens eine der beiden folgenden Aussagen zutrifft:

1. $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 0$.

2. *Mindestens drei der Koeffizienten a_ν sind von Null verschieden. Unter den a_ν gibt es sowohl positive wie negative Zahlen.*

Denn zunächst sei weder 1. noch 2. erfüllt. Wenn alle $a_\nu \geqq 0$ oder alle $a_\nu \leqq 0$ sind, dann hat (3) keine aus positiven Zahlen bestehende Lösung, ist also erst recht nicht zweifach regulär. Gibt es unter den a_ν positive und negative Zahlen, dann hat (3) die Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \quad \text{mit} \quad a_1 + a_2 \neq 0.$$

Zu Anfang dieses Paragraphen wurde gezeigt, daß solche Gleichungen nicht zweifach regulär sind.

Ist jetzt umgekehrt eine der beiden Aussagen zutreffend, dann ist (3) zweifach regulär. Für die erste Aussage ist das evident, da dann $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ eine Lösung von (3) ist. Es sei also jetzt die zweite Aussage zutreffend. Dann hat (3) die Form

$$\sum_{\varrho=1}^{r} b_\varrho y_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{s} c_\sigma z_\sigma \qquad (b_\varrho,\ c_\sigma \text{ natürliche Zahlen},\ r \geqq 2,\ s \geqq 1).$$

Nimmt man dazu noch die weiteren Gleichungen

$$y_2 = y_3 = \ldots = y_r, \qquad z_1 = z_2 = \ldots = z_s,$$

dann erhält man als für y_1, y_2, z_1 zu erfüllende Gleichung:

$$b_1 \cdot y_1 + \sum_{2}^{r} b_\varrho \cdot y_2 = \sum_{1}^{s} c_\sigma \cdot z_1.$$

Diese Gleichung ist nach Satz II zweifach regulär.

Will man die Regularität beliebiger linearer Gleichungssysteme untersuchen, dann braucht man zunächst einen allgemeinen Satz über reguläre Bedingungssysteme, dem der folgende Paragraph gewidmet sein soll.

§ 3.

Der Gleichmäßigkeitssatz.

Satz I und II haben folgende Form: Gegeben ist eine ganze Zahl $k > 0$ und ein System $\mathfrak{S}$ von Bedingungen für die Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es wird behauptet, daß bei jeder Verteilung $\mathfrak{V}$ auf k Klassen in mindestens einer Klasse Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liegen, welche $\mathfrak{S}$ befriedigen und außerdem unterhalb einer nur von k und $\mathfrak{S}$ abhängenden Schranke liegen. Beide Beweise wurden in der Form geführt, daß zunächst für jedes $\mathfrak{V}$ nur die Existenz solcher x_ν gezeigt wurde, die in derselben Klasse liegen und $\mathfrak{S}$ genügen. Daß diese Zahlen immer unterhalb einer nur von k und $\mathfrak{S}$ abhängenden Schranke wählbar sind, ergab sich dann daraus, daß beim Beweis die Verteilung von Zahlen oberhalb einer gewissen Schranke dieser Art nicht benutzt wurde. Es wäre nun an und für sich denkbar, daß es auch solche Bedingungssysteme $\mathfrak{S}$ gibt, für die sich wohl ein Existenzbeweis für Lösungen in einer Klasse führen läßt, welche aber nicht für konstantes k immer schon unterhalb einer festen Schranke ein derartiges Lösungssystem haben. Das würde bedeuten, es gibt für ein gewisses k und jedes N spezielle Verteilungen der endlich vielen Zahlen

$$1, 2, \ldots, N$$

auf k Klassen mit der Eigenschaft, daß in keiner Klasse $\mathfrak{S}$ zu befriedigen ist. Bei Verteilungen aller Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots$$

auf k Klassen wäre jedoch immer ein Lösungssystem in einer Klasse zu finden. Es würde also Verteilungen der letzteren Art geben, bei denen erst „beliebig spät" Lösungen durch Zahlen aus derselben Klasse auftreten.

Der folgende Satz III zeigt aber, daß mit dem Existenzbeweis für Lösungen in einer Klasse immer auch schon ein Existenzbeweis für eine Schranke der obigen Art geliefert ist. Ist ein Bedingungssystem also „lösbar", so ist es auch unterhalb einer gleichmäßig für alle Verteilungen mit fester Klassenanzahl geltenden Schranke „lösbar". Der Satz lautet nun:

Satz III. Voraussetzung. *Das Bedingungssystem*

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2 \ldots, x_n) = 0$$

ist k-fach regulär.

Behauptung. *Es gibt eine nur von k und $\mathfrak{S}$ abhängende Zahl N, so daß schon das Bedingungssystem*

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq N \end{cases}$$

k-fach regulär ist.

Beweis. Die Behauptung sei falsch. Dann ist (1) für keine Wahl von N k-fach regulär. Es gibt also zu

$$N = 1, 2, 3, \ldots$$

je eine Verteilung $\mathfrak{V}^{(N)}$ mit k Klassen, die die Eigenschaft hat, daß aus

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \pmod{\mathfrak{V}^{(N)}},$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq N$$

immer folgt, daß die Zahlen x_ν nicht sämtliche Bedingungen $\mathfrak{S}$ erfüllen. Die Klassen von $\mathfrak{V}^{(N)}$ seien mit $\mathfrak{K}_1^{(N)}, \mathfrak{K}_2^{(N)}, \ldots, \mathfrak{K}_k^{(N)}$ bezeichnet. Es sei $\varkappa_\nu^{(N)}$ der untere Index derjenigen Klasse von $\mathfrak{V}^{(N)}$, in der die Zahl ν liegt. Es ist $1 \leqq \varkappa_\nu^{(N)} \leqq k$. Nach einer bekannten Schlußweise folgt jetzt:

Es gibt $\varkappa_1$, so daß für unendlich viele N gilt:

$$(2) \qquad \varkappa_1^{(N)} = \varkappa_1.$$

Es gibt $\varkappa_2$, so daß für unendlich viele N außer (2) noch gilt:

$$(3) \qquad \varkappa_2^{(N)} = \varkappa_2.$$

Es gibt $\varkappa_3$, so daß für unendlich viele N außer (2), (3) noch gilt:

$$(4) \qquad \varkappa_3^{(N)} = \varkappa_3$$

usw.

Man erhält so eine Folge

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$$

mit folgender Eigenschaft: Zu jedem m gibt es unendlich viele N mit $\varkappa_1^{(N)} = \varkappa_1, \varkappa_2^{(N)} = \varkappa_2, \ldots, \varkappa_m^{(N)} = \varkappa_m$. $\mathfrak{V}$ sei diejenige Verteilung, bei der sich die Zahl ν in der $\varkappa_\nu$-ten Klasse befindet. $\mathfrak{V}$ hat k Klassen. Also gibt es nach Voraussetzung Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit

$$(5) \qquad x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \pmod{\mathfrak{V}},$$

$$(6) \qquad \mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

(5) ist identisch mit

$$(7) \qquad \varkappa_{x_1} = \varkappa_{x_2} = \ldots = \varkappa_{x_n}.$$

Nach der Bildungsweise der $\varkappa_\nu$ gibt es unendlich viele N mit

$$(8) \qquad \varkappa_{x_1}^{(N)} = \varkappa_{x_1}, \ \varkappa_{x_2}^{(N)} = \varkappa_{x_2}, \ \ldots, \ \varkappa_{x_n}^{(N)} = \varkappa_{x_n}.$$

Also gibt es auch ein spezielles

$$N \geqq \operatorname{Max}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

für das (8) gilt. Dann hat man nach (8) und (7), indem man wieder die Bedeutung der $\varkappa_\nu^{(N)}$ beachtet:

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \pmod{\mathfrak{B}^{(N)}}, \tag{9}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq N. \tag{10}$$

(6), (9), (10) bilden einen Widerspruch zu der anfangs beschriebenen Eigenschaft von $\mathfrak{B}^{(N)}$. Damit ist der Beweis erbracht.

In § 2 wurde die zweifache Regularität von

$$ax + by = cz \qquad (a, b, c \text{ rational}, > 0)$$

bewiesen und gleichzeitig eine von a, b, c abhängende Zahl angegeben, welche dieselbe Rolle spielt wie die Konstante N, deren Existenz allgemein durch Satz III bewiesen ist. Der Satz III ist ein reiner Existenzsatz, er gestattet keinerlei konkrete Berechnung einer solchen Konstanten. Es müssen ganz andere als die vorstehenden Betrachtungen herangezogen werden, wenn man ein N finden will.

Anwendung. $\mathfrak{S}'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei ein Bedingungssystem, bei dem als Argumente auch gebrochene rationale x_ν zulässig sind. Es sei homogen in dem Sinne, daß aus

$$\mathfrak{S}'(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

a positiv, ganz immer

$$\mathfrak{S}'(a_1 a, a_2 a, \ldots, a_n a) = 0$$

folgt.

Voraussetzung. *Wenn man alle positiven rationalen Zahlen auf k Klassen verteilt, dann gibt es immer in mindestens einer Klasse rationale Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit*

$$\mathfrak{S}'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Behauptung. $\mathfrak{S}'(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *ist k-fach regulär.*

Beweis. Die positiven rationalen Zahlen lassen sich abzählen. Eine ihrer Ordnungen sei

$$r_1, r_2, r_3, \ldots .$$

Ich definiere ein System $\mathfrak{S}$ von Bedingungen folgendermaßen:

Dann und nur dann ist

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

wenn die x_ν natürliche Zahlen sind und

$$\mathfrak{S}'(r_{x_1}, r_{x_2}, \ldots, r_{x_n}) = 0$$

erfüllen. Ich behaupte zunächst, daß $\mathfrak{S}$ k-fach regulär ist. Denn es sei $\mathfrak{V}$ eine beliebige Verteilung der natürlichen Zahlen auf k Klassen. Ich definiere eine Verteilung $\mathfrak{V}'$ der positiven rationalen Zahlen auf k Klassen durch:

$$r_\varkappa \equiv r_\lambda \pmod{\mathfrak{V}'}, \quad \text{wenn} \quad \varkappa \equiv \lambda \pmod{\mathfrak{V}}. \tag{11}$$

Nach Voraussetzung gibt es $r_{x_1}, r_{x_2}, \ldots, r_{x_n}$ mit

$$r_{x_1} \equiv r_{x_2} \equiv \ldots \equiv r_{x_n} \pmod{\mathfrak{B}'}, \tag{12}$$

$$\mathfrak{S}'(r_{x_1}, r_{x_2}, \ldots, r_{x_n}) = 0. \tag{13}$$

(12) besagt nach (11) dasselbe wie

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \pmod{\mathfrak{B}},$$

(13) ist identisch mit

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

was die k-fache Regularität von $\mathfrak{S} = 0$ beweist.

Nun gibt es nach Satz III eine natürliche Zahl N, so daß auch das Bedingungssystem

$$\begin{cases} \mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq N \end{cases} \tag{14}$$

k-fach regulär ist. Das heißt ausführlich: Bei jeder Verteilung der Zahlen

$$1, 2, \ldots, N$$

auf k Klassen liegen in mindestens einer Klasse Zahlen x_ν mit

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Das ist genau dasselbe wie: Bei jeder Verteilung der Zahlen

$$r_1, r_2, \ldots, r_N \tag{15}$$

auf k Klassen liegen in mindestens einer Klasse Zahlen r_{x_ν} mit

$$\mathfrak{S}'(r_{x_1}, r_{x_2}, \ldots, r_{x_n}) = 0.$$

Aus der Homogenität von $\mathfrak{S}'$ folgt weiter für jede natürliche Zahl H: Bei jeder Verteilung der Zahlen

$$r_1 H, r_2 H, \ldots, r_N H \tag{16}$$

auf k Klassen liegen in mindestens einer Klasse Zahlen $r_{x_\nu} \cdot H$ mit

$$\mathfrak{S}'(r_{x_1} \cdot H, r_{x_2} \cdot H, \ldots, r_{x_n} \cdot H) = 0.$$

Wählt man nun für H den Hauptnenner aller Zahlen (15), dann sind alle Zahlen (16) positiv und ganz, woraus die Behauptung unmittelbar hervorgeht.

Was eben bewiesen wurde, lautet in anderen Worten: Um nachzuweisen, daß ein homogenes Bedingungssystem $\mathfrak{S}' = 0$ *k-fach regulär* ist, genügt es, zu zeigen, daß $\mathfrak{S}' = 0$ bei jeder Verteilung aller *positiven rationalen* Zahlen auf k Klassen stets eine Lösung besitzt, deren Zahlen sich in derselben Klasse befinden. Man überlegt sich leicht noch folgendes: Um *Regularität* eines homogenen Bedingungssystems $\mathfrak{S}' = 0$ nachzuweisen, genügt es sogar, bei jeder Verteilung aller *positiven* und *negativen rationalen*

Zahlen auf eine endliche Klassenanzahl stets ein Lösungssystem in einer Klasse zu finden. Daß die Homogenität von $\mathfrak{S}'$ notwendig ist, zeigt das Beispiel der Gleichung $x + y = 3$. Diese Gleichung ist bei jeder Verteilung der positiven rationalen Zahlen auf endlich viele Klassen immer durch Zahlen aus derselben Klasse lösbar, da ja $x = y = \frac{3}{2}$ die Gleichung befriedigt. Dagegen ist diese Gleichung nicht einmal zweifach regulär, wie man an der Verteilung

$$\mathfrak{V} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2, 3, 4, \ldots \end{matrix} \right\}$$

erkennt.

§ 4.

Bestimmung aller regulären Systeme linearer Gleichungen.

Ich nenne im folgenden ein Bedingungssystem $\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *homogen*, wenn, in etwas schwächerer Bedeutung des Wortes homogen, als es sonst üblich ist, nur folgendes gilt: Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ natürliche Zahlen mit

$$\mathfrak{S}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

dann ist immer

$$\mathfrak{S}(a_1 a, a_2 a, \ldots, a_n a) = 0.$$

Um alle regulären Systeme linearer Gleichungen zu finden, beweist man zunächst folgenden Hilfssatz, der später auch für verschiedene andere Fragen nützlich sein wird:

Hilfssatz I. Voraussetzung. $\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ *ist ein homogenes, k-fach reguläres Bedingungssystem, M eine natürliche Zahl,* $\mathfrak{V}$ *eine Verteilung aller natürlichen Zahlen auf k Klassen.*

Behauptung. *Es gibt natürliche Zahlen* $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, d$ *mit*

$$\mathfrak{S}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0,$$

$$x_\nu^{(0)} + \lambda d \equiv x_1^{(0)} \pmod{\mathfrak{V}} \quad \textit{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n, \quad \lambda \textit{ ganz}, \quad |\lambda| \leqq M.$$

Beweis. Nach dem Gleichmäßigkeitssatz gibt es eine natürliche Zahl N, so daß das Bedingungssystem

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq N \tag{1}$$

k-fach regulär ist. Es sei

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}[\nu\xi (1 \leqq \nu \leqq N)]. \tag{2}$$

Nach van der Waerden gibt es $a', d' > 0$ mit

$$a' + \lambda' d' \equiv a' \pmod{\mathfrak{V}'} \text{ für } \lambda' \text{ ganz}, \quad |\lambda'| \leqq MN^{n-1}. \tag{3}$$

Denn (3) besagt nur, daß a' das mittlere Glied einer arithmetischen Progression von $2MN^{n-1} + 1$ Gliedern ist, deren Zahlen sich alle in derselben Klasse befinden. Es sei

$$\mathfrak{V}'' = \mathfrak{V}[a'\xi]. \tag{4}$$

$\mathfrak{B}''$ hat k Klassen. Da (1) k-fach regulär ist, gibt es also natürliche Zahlen $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ mit

$$\mathfrak{S}(x_1', x_2', \ldots, x_n') = 0, \tag{5}$$

$$x_1', x_2', \ldots, x_n' \leqq N, \tag{6}$$

$$x_1' \equiv x_2' \equiv \ldots \equiv x_n' \pmod{\mathfrak{B}''}. \tag{7}$$

Ich behaupte nun, die Zahlen

$$x_\nu^{(0)} = a' x_\nu' \qquad (1 \leqq \nu \leqq n), \tag{8}$$

$$d = d' x_1' x_2 \ldots x_n' \tag{9}$$

erfüllen die in der obigen Behauptung angegebenen Relationen. Zunächst folgt aus (5), (8) und der Homogenität von $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0. \tag{10}$$

Ferner ist (7) nach (4) und (8) identisch mit

$$x_1^{(0)} \equiv x_2^{(0)} \equiv \ldots \equiv x_n^{(0)} \pmod{\mathfrak{B}}. \tag{11}$$

(3) bedeutet nach (2) dasselbe wie

$$\nu(a' + \lambda' d') \equiv \nu a' \pmod{\mathfrak{B}} \quad (1 \leqq \nu \leqq N,\ \lambda' \text{ ganz},\ |\lambda'| \leqq MN^{n-1}). \tag{12}$$

Für $1 \leqq \mu \leqq n$, λ ganz, $|\lambda| \leqq M$ wird nach (8), (9), (6):

$$\begin{aligned} x_\mu^{(0)} + \lambda d = a' x_\mu' + \lambda d' x_1' x_2' \ldots x_n' &= x_\mu'(a' + \lambda x_1' \ldots x_{\mu-1}' x_{\mu+1}' \ldots x_n' d') \\ &= \nu(a' + \lambda' d') \end{aligned} \tag{13}$$

mit $1 \leqq \nu = x_\mu' \leqq N$, $|\lambda'| = |\lambda x_1' \ldots x_{\mu-1}' x_{\mu+1}' \ldots x_n'| \leqq MN^{n-1}$.

Auf (13) ist also (12) anwendbar, was

$$x_\mu^{(0)} + \lambda d \equiv x_\mu^{(0)} \pmod{\mathfrak{B}} \qquad (1 \leqq \mu \leqq n,\ \lambda \text{ ganz},\ |\lambda| \leqq M) \tag{14}$$

liefert. (10), (11), (14) zeigen die Richtigkeit der Behauptung.

Um später den Gang eines Beweises nicht unterbrechen zu müssen, schicke ich noch einen einfachen Hilfssatz über lineare Kongruenzen voraus:

Hilfssatz II. Voraussetzung. *Zu den ganzen rationalen Zahlen*

$$b_{\varkappa\lambda},\ b_\varkappa \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq k,\ 1 \leqq \lambda \leqq l)$$

gibt es unendlich viele Tripel r, s, t von ganzen Zahlen, deren t beliebig groß werden, für die ferner $(r, t) = 1$ gilt und für die das System von Kongruenzen

$$\sum_{\lambda=1}^{l} b_{\varkappa\lambda} x_\lambda + r s b_\varkappa \equiv 0 \pmod{st} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq k) \tag{15}$$

je mindestens ein ganzzahliges Lösungssystem $x_1, x_2, \ldots, x_l$ hat.

Behauptung. *Das Gleichungssystem*

$$\sum_{\lambda=1}^{l} b_{\varkappa\lambda} x_\lambda + b_\varkappa = 0 \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq k) \tag{16}$$

besitzt Lösungen.

Beweis. Dann und nur dann hat (16) eine Lösung, wenn aus $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ganz,

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} c_\varkappa b_{\varkappa\lambda} = 0 \qquad (1 \leqq \lambda \leqq l) \tag{17}$$

immer

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} c_\varkappa b_\varkappa = 0 \tag{18}$$

folgt. Es möge also (17) gelten. Dann folgt aus (15):

$$\sum_{\varkappa} c_\varkappa \sum_{\lambda} b_{\varkappa\lambda} x_\lambda + \sum_{\varkappa} c_\varkappa r s b_\varkappa \equiv 0 \pmod{st}$$

oder

$$0 + rs \sum_{\varkappa} c_\varkappa b_\varkappa \equiv 0 \pmod{st},$$

$$r \sum_{\varkappa} c_\varkappa b_\varkappa \equiv 0 \pmod{t},$$

$$\sum_{\varkappa} c_\varkappa b_\varkappa \equiv 0 \pmod{t} \quad \text{(wegen } (r, t) = 1\text{)}. \tag{19}$$

Da (19) für beliebig große t gilt, folgt (18), was den Hilfssatz beweist.

Die beiden Hilfssätze gestatten nun, alle regulären linearen homogenen Gleichungssysteme aufzustellen, deren Koeffizienten rational sind.

Satz IV. *Dann und nur dann ist das Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m,\ a_{\mu\nu} \text{ rational}) \tag{20}$$

regulär, wenn die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

folgende Eigenschaft hat: Die Spalten von $\mathfrak{A}$ lassen sich derart in Gruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_q$ einteilen, daß gilt:

Die Summe der Spalten von $\mathfrak{G}_1$ verschwindet.

Die Summe der Spalten von $\mathfrak{G}_2$ ist aus den Spalten von $\mathfrak{G}_1$ linear kombinierbar.

Die Summe der Spalten von $\mathfrak{G}_3$ ist aus den Spalten von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ linear kombinierbar.

. . . . . .

Die Summe der Spalten von $\mathfrak{G}_q$ ist aus den Spalten von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_{q-1}$ linear kombinierbar.

Ehe wir zum Beweis des Satzes übergehen, soll seine Behauptung etwas erläutert werden: Für den Fall einer Gleichung sagt sie folgendes aus: *Dann und nur dann ist eine Gleichung*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0 \qquad (a_\nu \text{ rational})$$

bei jeder Verteilung der natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen stets durch Zahlen aus derselben Klasse lösbar, wenn es irgendwelche von Null verschiedene Zahlen unter den a_ν gibt deren Summe verschwindet. Der von I. Schur[7]) betrachtete Fall

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

fällt hierunter, ebenso der von A. Brauer[8]) erörterte Fall

$$x_1 + a x_2 - x_3 = 0 \qquad (a \text{ ganz}).$$

Dagegen ist z. B. die Gleichung

$$x_1 + x_2 - 3 x_3 = 0$$

nicht regulär, da keine Teilsumme aus den Koeffizienten dieser Gleichung den Wert Null ergibt. Aus einem späteren Satz[9]) wird sogar folgen, daß diese Gleichung höchstens dreifach regulär ist.

Man kann Satz IV auch folgendermaßen formulieren: *Dann und nur dann ist* (20) *regulär, wenn man die Indizes* $1, 2, \ldots, n$ *so in Gruppen* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_q$ *einteilen kann, daß folgendes gilt: Zu jedem* $\varkappa = 1, 2, \ldots, q$ *gibt es ein Lösungssystem* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *von* (20) *mit*

$$x_\nu = 1 \text{ für alle } \nu \text{ aus } \Gamma_\varkappa,$$
$$x_\nu = 0 \text{ für alle } \nu \text{ aus } \Gamma_{\varkappa+1}, \Gamma_{\varkappa+2}, \ldots, \Gamma_q.$$

Aus dieser Formulierung ergibt sich leicht folgende Verallgemeinerung des Satzes von van der Waerden: *Verteilt man alle natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen, dann gibt es zu den natürlichen Zahlen* r, l *immer eine Klasse* $\mathfrak{K}_0$ *und ein System*

$$a_0, a_1, \ldots, a_l$$

natürlicher Zahlen, welche eine arithmetische Reihe r*-ter Stufe bilden und welche mit allen ihren Differenzen bis zu denen* r*-ter Stufe in* $\mathfrak{K}_0$ *liegen.* (Natürlich muß $r < l$ sein.) Man hat hier als Unbekannte alle Größen des Schemas

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_{00} & & x_{01} & & x_{02} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & x_{0l} \\ & x_{11} & & x_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & x_{1l} & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & & & x_{rr} & \cdots & \cdots & x_{rl} & \end{array}$$

zu betrachten. Sie sollen den Gleichungen

$$x_{\varrho\lambda} + x_{\varrho+1,\lambda} = x_{\varrho,\lambda+1} \qquad (0 \leqq \varrho < r, \ \varrho \leqq \lambda < l)$$

genügen. Um die Regularität dieses Gleichungssystems zu erkennen, muß man

[7]) Siehe Einleitung.

[8]) Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., math.-physikal. Klasse 1931, S. 15.

[9]) Satz X, 1.

die Indexpaare (ϱ, λ) $(0 \leqq \varrho \leqq \lambda \leqq l)$ derart auf Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ verteilen, daß man zu jeder Gruppe eine Lösung des Gleichungssystems finden kann, bei der die zu dieser Gruppe gehörigen $x_{\varrho\lambda}$ gleich Eins und die zu den folgenden Gruppen gehörigen $x_{\varrho\lambda}$ gleich Null sind. Offenbar hat die Zerlegung

$$\Gamma_\varrho = \{(\varrho, \varrho),\ (\varrho, \varrho+1),\ \ldots,\ (\varrho, l)\} \qquad (0 \leqq \varrho \leqq r)$$

diese Eigenschaft.

Beweis von Satz IV. 1. $\mathfrak{A} = (a_{\mu\nu})$ möge die beschriebene Eigenschaft haben. Ich habe zu zeigen, daß (20) regulär ist. Für $q = 1$ ist das richtig. Denn in diesem Falle ist $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ eine Lösung von (20). Man kann für kleinere Werte von q daher die Behauptung als bewiesen ansehen. Ich will zeigen, daß (20) k-fach regulär ist für jedes $k \geqq 1$. Für $k = 1$ besagt diese Aussage, daß (20) eine Lösung durch positive ganze x_ν besitzt. Daß das der Fall ist, sieht man so: $\mathfrak{G}_q$ bestehe etwa aus den r letzten Spalten von $\mathfrak{A}$. Nach Induktionsannahme ist das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \tag{21}$$

regulär, also überhaupt durch positive ganze Werte der x_ν, etwa

$$x_\nu = g_\nu > 0 \qquad (1 \leqq \nu \leqq n-r)$$

zu befriedigen. Nach Voraussetzung gibt es Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_{n-r}$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} a_{\mu\nu} s_\nu + \sum_{\nu=n-r+1}^{n} a_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{22}$$

Offenbar können die s_ν auch rational gewählt werden. Es folgt nun für jedes A und B:

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} a_{\mu\nu} (A g_\nu + B s_\nu) + \sum_{\nu=n-r+1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot B = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{23}$$

Wählt man für B den Hauptnenner H aller s_ν und für A eine genügend große ganze Zahl, dann zeigt (23), daß (20) eine Lösung durch positive ganze Werte der x_ν besitzt, also einfach regulär ist. Meine Behauptung wird bewiesen sein, wenn folgendes gezeigt ist: Aus der Annahme, daß (21) regulär und (20) $(k-1)$-fach regulär ist $(2 \leqq k)$, folgt, daß (20) k-fach regulär ist. Diese beiden Annahmen über (21) und (20) will ich nun machen.

Da (20) $(k-1)$-fach regulär ist, gibt es nach dem Gleichmäßigkeitssatz eine Konstante N, so daß schon das Bedingungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m),$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq N$$

$(k-1)$-fach regulär ist. Jetzt sei $\mathfrak{B}$ eine Verteilung auf k Klassen.

Annahme. Es gibt keine natürlichen Zahlen x_ν mit (20), welche bei $\mathfrak{V}$ in derselben Klasse liegen.

Folgerungen. Da (21) regulär ist, kann auf (21) und $\mathfrak{V}$ der Hilfssatz I angewandt werden. Als M wähle ich dabei

$$M = HN \cdot \mathrm{Max}(|s_1|, |s_2|, \ldots, |s_{n-r}|). \tag{24}$$

H bedeutet, wie oben, den Hauptnenner aller s_ν. Nach Hilfssatz I folgt dann die Existenz natürlicher Zahlen $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-r}^{(0)}, d$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} a_{\mu\nu} \cdot x_\nu^{(0)} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{25}$$

$$x_\nu^{(0)} + \lambda d \equiv x_1^{(0)} \pmod{\mathfrak{V}} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n-r,\ \lambda \text{ ganz},\ |\lambda| \leqq M). \tag{26}$$

Aus (25) und (22) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n-r} a_{\mu\nu}(x_\nu^{(0)} + \varkappa \cdot Hs_\nu d) + \sum_{\nu=n-r+1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot \varkappa Hd = 0 \tag{27}$$

$$(1 \leqq \mu \leqq m,\ 1 \leqq \varkappa \leqq N).$$

Die Klasse von $\mathfrak{V}$, in der alle Zahlen (26) liegen, sei $\mathfrak{K}_0$. Aus (24) und der Definition von H folgt, daß die Zahlen

$$\varkappa \cdot Hs_\nu \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq N,\ 1 \leqq \nu \leqq n-r)$$

ganz und höchstens vom Absolutbetrag M sind. Also ist nach (26)

$$x_\nu^{(0)} + \varkappa \cdot Hs_\nu d \prec \mathfrak{K}_0 \qquad (1 \leqq \nu \leqq n-r,\ 1 \leqq \varkappa \leqq N). \tag{28}$$

Aus (27), (28) und der Annahme über $\mathfrak{V}$ folgt

$$\varkappa \cdot Hd \not\prec \mathfrak{K}_0 \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq N). \tag{29}$$

Jetzt bilde ich

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}[\xi \cdot Hd]. \tag{30}$$

Wegen (29) verteilen sich die Zahlen

$$1, 2, \ldots, N$$

bei $\mathfrak{V}'$ auf höchstens $k-1$ Klassen. Aus der Definition von N folgt daher die Existenz natürlicher Zahlen $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu' = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m), \tag{31}$$

$$x_1', x_2', \ldots, x_n' \leqq N,$$

$$x_1' \equiv x_2' \equiv \ldots \equiv x_n' \pmod{\mathfrak{V}'}. \tag{32}$$

Aus (31) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot x_\nu' Hd = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{33}$$

(32) besagt nach (30) dasselbe wie

$$x_1' \cdot Hd \equiv x_2' \cdot Hd \equiv \ldots \equiv x_n' \cdot Hd \pmod{\mathfrak{B}}. \tag{34}$$

(33) und (34) stellen einen Widerspruch zur Annahme über $\mathfrak{B}$ dar.

Da $\mathfrak{B}$ eine beliebige Verteilung auf k Klassen war, ist die k-fache Regularität von (20) und damit die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

2. Das Gleichungssystem (20) sei regulär. Ich habe die Spalten der Matrix $\mathfrak{A}$ so in Gruppen einzuteilen, daß die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

p sei eine beliebige Primzahl. Jede natürliche Zahl x ist eindeutig zerlegbar in der Form

$$x = u_p \cdot p^{v_p} \quad \text{mit} \quad p \nmid u_p, \; u_p \text{ und } v_p \text{ ganz.}$$

Man hat also eine eindeutige Funktion $u_p(x)$. Ich bilde nun

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_p[u_p(\xi)].$$

$\mathfrak{B}_p$ ist dabei, wie in § 1 allgemein erwähnt, die Restklassenverteilung mod p. Da (20) regulär ist, gibt es natürliche Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit (20) und

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \pmod{\mathfrak{B}}. \tag{35}$$

Aus (35) folgt die Existenz von u_0 mit $p \nmid u_0$ und

$$x_\nu = (u_0 + k_\nu p) \cdot p^{v_\nu} \quad \text{mit } k_\nu, v_\nu \text{ ganz.} \tag{36}$$

Man kann $v_1 \leqq v_2 \leqq v_3 \leqq \ldots \leqq v_n$ annehmen oder genauer

$$\begin{aligned} 0 \leqq v_1 = v_2 = \ldots = v_{\alpha_1} < v_{\alpha_1+1} = v_{\alpha_1+2} = \ldots \\ = v_{\alpha_2} < v_{\alpha_2+1} = \ldots < v_{\alpha_3+1} = \ldots = v_{\alpha_q} \qquad (\alpha_q = n). \end{aligned}$$

Da für jede der Zahlen $q, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ nur eine Zahl aus der Reihe

$$1, 2, \ldots, n$$

in Frage kommt, gibt es unendlich viele p, für die diese Zahlen übereinstimmen. Aus einer unendlichen Folge solcher Primzahlen denke ich mir im folgenden p gewählt. Aus (20) und (36) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(u_0 + k_\nu p) \cdot p^{v_\nu} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{37}$$

Man betrachte (37) zunächst mod $p^{v_{\alpha_1}+1}$. Dann folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha_1} a_{\mu\nu} \cdot u_0 \, p^{v_{\alpha_1}} \equiv 0 \pmod{p^{v_{\alpha_1}+1}} \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

oder

$$u_0 \cdot \sum_{\nu=1}^{\alpha_1} a_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod{p} \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{38}$$

Da p unendlich viele Primzahlen durchlaufen kann und $p \nmid u_0$ ist, folgt aus (38):

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha_1} a_{\mu\nu} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{39}$$

Ferner betrachte man (37) mod $p^{\nu_{\alpha_\varkappa}+1}$ $(2 \leqq \varkappa \leqq q)$. Dann folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha_{\varkappa-1}} a_{\mu\nu} x_\nu + \sum_{\nu=\alpha_{\varkappa-1}+1}^{\alpha_\varkappa} a_{\mu\nu}\, u_0\, p^{\nu_{\alpha_\varkappa}} \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p^{\nu_{\alpha_\varkappa}+1}) \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{40}$$

Wendet man auf (40) nun Hilfssatz II an mit

$$r = u_0, \quad s = p^{\nu_{\alpha_\varkappa}}, \quad t = p$$

(daß seine Voraussetzungen erfüllt sind, sieht man sofort), dann folgt: Für $2 \leqq \varkappa \leqq q$ hat das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha_{\varkappa-1}} a_{\mu\nu} y_\nu + \sum_{\nu=\alpha_{\varkappa-1}+1}^{\alpha_\varkappa} a_{\mu\nu} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \tag{41}$$

eine Lösung in den y_ν. (39) und (41) zeigen, daß $\mathfrak{A}$ die gewünschte Zerlegbarkeitseigenschaft besitzt In dieselbe Gruppe $\mathfrak{G}_\varkappa$ sind einfach diejenigen Spalten von $\mathfrak{A}$ zu legen, deren zugehörige x_ν mit gleicher Nummer durch genau dieselbe Potenz von p teilbar sind. Satz IV ist damit vollständig bewiesen.

Durch einfaches Rechnen mit linearen Gleichungen kann man den Hilfssatz II leicht dahin verschärfen, daß man nur ein einziges Tripel r, s, t in seiner Voraussetzung braucht, dessen t aber mindestens gleich einer angebbaren, von den Koeffizienten abhängigen Schranke ist. Wenn man diesen verschärften Hilfssatz hier benutzt, dann ergibt sich: $\mathfrak{A}$ habe den Rang s $(1 \leqq s \leqq m)$. $M_s(\mathfrak{A})$ sei das Maximum der absoluten Beträge der Unterdeterminanten s-ten Grades von $\mathfrak{A}$. p sei eine Primzahl mit

$$p > M_s(\mathfrak{A}) \sum_{\mu,\nu} |a_{\mu\nu}|,$$

$u_p(x)$ sei die Seite 449 eingeführte Funktion. Dann gilt: *Dann und nur dann ist* (20) *regulär, wenn* (20) *bei der speziellen Verteilung*

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_p[u_p(\xi)]$$

ein Lösungssystem hat, dessen Zahlen sich in derselben Klasse befinden.

Um also nachzuprüfen, ob ein Gleichungssystem (20) bei *jeder beliebigen* Verteilung der natürlichen Zahlen auf *endlich* viele Klassen stets durch Zahlen aus derselben Klasse lösbar ist, braucht man nur *eine einzige*, leicht angebbare Verteilung daraufhin zu untersuchen, ob in einer Klasse sich ein Lösungssystem von (20) befindet. Ist letzteres der Fall, dann gibt es auch bei jeder anderen Verteilung auf beliebig viele Klassen immer ein solches Lösungssystem.

Wenn man alle regulären linearen *homogenen* Gleichungssysteme mit rationalen Koeffizienten kennt, dann ist es nicht mehr schwer, auch noch die *inhomogenen* linearen Gleichungssysteme mit rationalen Koeffizienten zu bestimmen, die regulär sind. Es gilt hier

Satz V. *Dann und nur dann ist das Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \quad (a_{\mu\nu}, a_\mu \text{ rational}) \tag{42}$$

regulär, wenn mindestens eine der folgenden beiden Aussagen zutrifft:

1. *Es gibt eine natürliche Zahl a mit*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} a = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

2. *Es gibt eine ganze Zahl $a \leqq 0$ mit*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} a = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

Ferner ist das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \tag{43}$$

regulär.

Beweis. 1. Ich zeige zunächst, daß die Richtigkeit jeder der beiden Aussagen hinreichend ist für Regularität von (42). Für die erste Aussage ist das klar. Denn nach ihr gehört ja a zu den Zahlen, die auf die Klassen verteilt werden. Es sei jetzt die zweite Aussage zutreffend. Man kann (42) schreiben:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(x_\nu - a) = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{44}$$

Die Regularität von (44) wird bewiesen sein, wenn allgemeiner gezeigt ist: *Ist*

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

ein homogenes, k-fach reguläres Bedingungssystem, a eine ganze Zahl, dann ist auch

$$\mathfrak{S}(x_1 - a, x_2 - a, \ldots, x_n - a) = 0 \tag{45}$$

ein k-fach reguläres Bedingungssystem. Die Richtigkeit dieses allgemeinen Prinzips ergibt sich so: Es sei

$$b \text{ ganz}, \quad b > |a|. \tag{46}$$

$\mathfrak{B}$ sei eine beliebige Verteilung auf k Klassen. Man bilde

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}[a + b\xi]. \tag{47}$$

Da für natürliches x immer $a + bx$ wegen (46) eine natürliche Zahl ist, hat die Definition von $\mathfrak{V}'$ einen Sinn. $\mathfrak{V}'$ hat k Klassen. Also gibt es natürliche Zahlen $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ mit

$$\mathfrak{S}(x_1', x_2', \ldots, x_n') = 0 \tag{48}$$

$$x_1' \equiv x_2' \equiv \ldots \equiv x_n' \pmod{\mathfrak{V}'}. \tag{49}$$

(49) ist nach (47) gleichbedeutend mit

$$a + bx_1' \equiv a + bx_2' \equiv \ldots \equiv a + bx_n' \pmod{\mathfrak{V}}. \tag{50}$$

Setzt man

$$x_\nu = a + bx_\nu' \qquad (1 \leqq \nu \leqq n),$$

dann folgt aus (50), (48) und der Homogenität von $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S}(x_1 - a, x_2 - a, \ldots, x_n - a) = 0; \qquad x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \pmod{\mathfrak{V}}.$$

Da $\mathfrak{V}$ beliebig war, bedeutet das k-fache Regularität von (45).

2. Jetzt sei umgekehrt (42) regulär. Es ist zu zeigen, daß eine der beiden obigen Aussagen zutrifft.

Man betrachte zunächst den Fall $m = 1$, das heißt: Man nehme an, die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x_\nu = c \qquad (c_\nu, c \text{ ganz rational}) \tag{51}$$

sei regulär. Dann folgt: m sei eine natürliche Zahl mit

$$m \mid \sum_\nu c_\nu. \tag{52}$$

Es sei

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_m.$$

Da (51) regulär ist, gibt es natürliche Zahlen $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ mit

$$\sum_\nu c_\nu x_\nu^{(0)} = c$$

$$x_1^{(0)} \equiv x_2^{(0)} \equiv \ldots \equiv x_n^{(0)} \pmod{\mathfrak{V}}.$$

Dann folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $x^{(0)}$ mit

$$x_\nu^{(0)} \equiv x^{(0)} \pmod{m} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n),$$

$$\sum_\nu c_\nu x^{(0)} \equiv c \pmod{m}. \tag{53}$$

Wegen (52) folgt aus (53):

$$m \mid c.$$

Da das für jedes m mit (52) gilt, ergibt sich:

(54) *Entweder ist* $\sum_\nu c_\nu = c = 0$, *oder es ist* $\sum_\nu c_\nu \neq 0$, $\frac{c}{\sum_\nu c_\nu}$ = *ganze Zahl.*

Nun ist (42) ein reguläres Gleichungssystem. Also ist speziell jede lineare Gleichung, die eine lineare Kombination der Gleichungen (42) mittels rationaler Koeffizienten ist, regulär. Für jede derartige Gleichung gilt somit (54). Ich behaupte nun: Für alle μ mit

$$\sum_{\nu} a_{\mu\nu} \neq 0$$

stimmen die ganzen Zahlen

$$\frac{a_\mu}{\sum_{\nu} a_{\mu\nu}}$$

überein. Denn es sei im Widerspruch hiermit

$$\sum_{\nu} a_{1\nu} \neq 0, \quad \sum_{\nu} a_{2\nu} \neq 0, \quad \frac{a_1}{\sum_{\nu} a_{1\nu}} \neq \frac{a_2}{\sum_{\nu} a_{2\nu}}.$$

Will man naheliegende Stetigkeitsüberlegungen vermeiden, dann kann man so schließen: Aus der Regularität von (42) folgt, daß

$$\begin{aligned}&(2a_2 - \sum_{\nu} a_{2\nu}) \sum_{\nu} a_{1\nu} x_\nu - (2a_1 - \sum_{\nu} a_{1\nu}) \sum_{\nu} a_{2\nu} x_\nu \\ &= (2a_2 - \sum_{\nu} a_{2\nu}) a_1 - (2a_1 - \sum_{\nu} a_{1\nu}) a_2\end{aligned}$$

eine reguläre Gleichung ist. Wegen

$$\frac{(2a_2 - \sum_{\nu} a_{2\nu}) a_1 - (2a_1 - \sum_{\nu} a_{1\nu}) a_2}{(2a_2 - \sum_{\nu} a_{2\nu}) \sum_{\nu} a_{1\nu} - (2a_1 - \sum_{\nu} a_{1\nu}) \sum_{\nu} a_{2\nu}} = \frac{1}{2}$$

ist das ein Widerspruch zu (54), wonach die letzte Zahl ganz wäre.

Bis jetzt ist also die Existenz einer ganzen Zahl a bewiesen mit

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot a = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{55}$$

Falls $a > 0$, dann trifft von den beiden als hinreichend erkannten Bedingungen die erste zu.

Falls $a = 0$, dann folgt aus (55):

$$a_\mu = 0 \text{ für alle } \mu.$$

Also ist (43) regulär, die zweite Bedingung ist erfüllt.

Falls $a < 0$, schließt man so: $\mathfrak{V}$ sei eine beliebige Verteilung,

$$\mathfrak{V}'' = \mathfrak{V}[\xi - a]. \tag{56}$$

Wegen $a < 0$ ist die letzte Bildung sinnvoll. Wegen der Regularität von (42) gibt es x'_ν mit

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x'_\nu = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m), \tag{57}$$

$$x'_1 \equiv x'_2 \equiv \ldots \equiv x'_n \pmod{\mathfrak{V}''}. \tag{58}$$

Nach (55) schreibt sich (57) auch

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}(x'_\nu - a) = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{59}$$

(58) ist nach (56) gleichwertig mit

$$x'_1 - a \equiv x'_2 - a \equiv \ldots \equiv x'_n - a \,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{R}). \tag{60}$$

(59) und (60) zeigen, daß (43) regulär ist, so daß in diesem Fall also Bedingung 2 erfüllt ist.

Die letzte Überlegung zeigt allgemein, daß folgendes Seitenstück des allgemeinen Prinzips von Seite 451 gültig ist:

Ist a eine negative ganze Zahl,

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

ein k-fach reguläres Bedingungssystem, dann ist auch

$$\mathfrak{S}(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a) = 0$$

k-fach regulär. Für $a > 0$ braucht das nicht immer zu gelten, wie folgendes Beispiel zeigt:

$\mathfrak{S}$ besteht aus der einen regulären Gleichung

$$x_1 = 1,$$

a hat den Wert 1.

Man überlegt sich leicht, wie man die bisherigen Regularitätskriterien zu modifizieren hat, wenn die $a_{\mu\nu}$ und a_μ nicht ganze rationale, sondern beliebige Zahlen sind. Man findet folgendes allgemeine, IV und V enthaltende Kriterium:

Satz VI. *Dann und nur dann ist das Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu \quad (1 \leqq \mu \leqq m;\ a_{\mu\nu}, a_\mu \text{ beliebig})$$

regulär, wenn mindestens eine der folgenden beiden Aussagen zutrifft:

1. *Es gibt eine ganze Zahl $a > 0$ mit*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot a = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

2. *Es gibt eine ganze Zahl $a \leqq 0$ mit*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} \cdot a = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

Ferner kann man die Spalten der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

so in Gruppen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_q$ einteilen, daß gilt:

Die Summe der Spalten von $\mathfrak{G}_1$ verschwindet.

Die Summe der Spalten von $\mathfrak{G}_\varkappa$ $(2 \leqq \varkappa \leqq q)$ *ist mittels rationaler Koeffizienten aus den Spalten von* $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_{\varkappa-1}$ *linear kombinierbar.*

Auf Grund von Satz VI zeigt man leicht durch Anwendung einfacher Sätze über lineare Formen:

Satz VII. *Dann und nur dann ist das Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu \quad (1 \leqq \mu \leqq m;\ a_{\mu\nu}, a_\mu \text{ beliebig}) \tag{61}$$

regulär, wenn für jede Wahl von rationalen Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *die Gleichung*

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} c_\mu a_\mu$$

regulär ist.

Das wesentliche an dem letzten Satz ist, daß man die $c_1, c_2, \ldots, c_m$ nur *rational* zu wählen braucht. Läßt man diese Beschränkung fort, dann wäre der Satz eine unmittelbare Folge aus der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums.

Es wäre von Interesse, einen Beweis von Satz VII zu finden, der von der Kenntnis aller regulären Gleichungssysteme keinen Gebrauch macht. Dann könnte man vielleicht auch die folgende Frage angreifen: Es ist unbekannt, ob Satz VII noch gilt, wenn man in ihm das Wort *regulär* ersetzt durch *k-fach regulär*. Falls das richtig wäre, dann könnte man unter anderem aus Satz II folgern: Dann und nur dann ist (61) zweifach regulär, wenn (61) eine Lösung durch natürliche x_ν besitzt, und wenn außerdem die Summe je zweier Spalten der Matrix $\mathfrak{A} = (a_{\mu\nu})$ aus ihren übrigen $n - 2$ Spalten mittels rationaler Koeffizienten linear kombinierbar ist.

Der folgende Paragraph bringt einige Anwendungen von Satz VI.

§ 5.

Koppelung regulärer Gleichungssysteme.

Wir wollen uns jetzt mit folgender Frage befassen: $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ seien zwei reguläre Gleichungssysteme für die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bzw $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Ist es dann möglich, bei jeder Verteilung der natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen stets in mindestens einer Klasse sowohl ein Lösungssystem x_μ des ersten als auch ein Lösungssystem y_ν des zweiten Gleichungssystems zu finden? Das folgende einfache Beispiel zeigt, daß diese Frage nicht immer zu bejahen ist. Es sei nämlich

$$\mathfrak{S}_1: \quad x_1 + x_2 = 2,$$
$$\mathfrak{S}_2: \quad y_1 + y_2 = 4.$$

$\mathfrak{S}_1$ ist regulär wegen $\mathfrak{S}_1(1, 1) = 0$, $\mathfrak{S}_2$ ist regulär wegen $\mathfrak{S}_2(2, 2) = 0$. Bei der Verteilung

$$\mathfrak{V} = \left\{ \begin{matrix} 1. \\ 2, 3, 4, \ldots \end{matrix} \right\}$$

ist $\mathfrak{S}_1 = 0$ nur in der ersten, $\mathfrak{S}_2 = 0$ nur in der zweiten Klasse zu befriedigen, so daß es also keine Klasse gibt, in der sowohl $\mathfrak{S}_1 = 0$ als auch $\mathfrak{S}_2 = 0$ lösbar ist. Aus dem folgenden wird sich unter anderem ergeben, daß ein derartiger Fall nicht eintreten kann, wenn $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ homogen sind. Es gilt der viel weiter gehende Satz:

Satz VIII. *Bei jedem $\mathfrak{V}$ gibt es mindestens eine Klasse, in der sämtliche überhaupt existierenden regulären linearen homogenen Gleichungssysteme gleichzeitig je eine Lösung haben.*

Der Satz besagt also z. B.: Wenn in einer Klasse von $\mathfrak{V}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

keine Lösung besitzt, dann gibt es eine andere Klasse von $\mathfrak{V}$, in der beliebig lange arithmetische Progressionen liegen. Denn obiges Gleichungssystem ist nach Satz VI regulär. Man hat hier

$$q = 2; \quad \mathfrak{G}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{G}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Beweis von Satz VIII. Ich zeige zunächst: Sind

$$\mathfrak{S}_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \quad \mathfrak{S}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

zwei reguläre lineare homogene Gleichungssysteme, dann ist das Gleichungssystem

$$\mathfrak{S}_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \quad \mathfrak{S}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \tag{62}$$

für die $m + n$ Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$ auch regulär. Aus der Regularität von $\mathfrak{S}_1 = 0$ folgt nämlich, daß man die Indizes $1, 2, \ldots, m$ so in Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{q_1}$ einteilen kann, daß zu jedem $\varkappa_1$ mit $1 \leqq \varkappa_1 \leqq q_1$ ein Lösungssystem von $\mathfrak{S}_1 = 0$ existiert mit

$$\begin{cases} x_\mu \text{ rational} & \text{für } \mu \text{ aus } \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\varkappa_1 - 1}, \\ x_\mu = 1 & \text{für } \mu \text{ aus } \Gamma_{\varkappa_1}, \\ x_\mu = 0 & \text{für } \mu \text{ aus } \Gamma_{\varkappa_1 + 1}, \Gamma_{\varkappa_1 + 2}, \ldots, \Gamma_{q_1}. \end{cases}$$

Das ist nur eine andere Formulierung für die in Satz VI beschriebene Zerlegbarkeitseigenschaft der dortigen Matrix $\mathfrak{A}$. Es sei der bequemeren Ausdrucksweise wegen in diesem Paragraphen hierfür folgende Formulierung gestattet: Man betrachte $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{q_1}$ nicht als eine Gruppeneinteilung der

Indizes $1, 2, \ldots, m$, sondern der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Zu jedem $\varkappa_1 = 1, 2, \ldots, q_1$ gibt es ein Lösungssystem von $\mathfrak{S}_1 = 0$ mit

$$(63) \qquad \begin{cases} x_\mu \text{ rational für } x_\mu \text{ aus } \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\varkappa_1 - 1} \\ x_\mu = 1 \quad \text{für } x_\mu \text{ aus } \Gamma_{\varkappa_1}, \\ x_\mu = 0 \quad \text{für } x_\mu \text{ aus } \Gamma_{\varkappa_1 + 1}, \Gamma_{\varkappa_1 + 2}, \ldots, \Gamma_{q_1}. \end{cases}$$

Eine entsprechende Gruppeneinteilung $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_{q_2}'$ der Unbekannten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gibt es für $\mathfrak{S}_2$. Dann ist

$$(64) \qquad \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{q_1}, \quad \Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_{q_2}'$$

eine Gruppeneinteilung aller Unbekannten von (62), von der man leicht sieht, daß sie die für Regularität hinreichenden Eigenschaften hat. Ich habe nur zu zeigen, daß man zu jeder Gruppe Γ aus (64) eine Lösung von (62) finden kann, bei der die Unbekannten dieser Gruppe den Wert Eins, die Unbekannten der vorhergehenden Gruppen rationale Werte und die Unbekannten der folgenden Gruppen den Wert Null haben. Ist $\Gamma = \Gamma_{\varkappa_1}$, dann wähle ich für die x_μ eine Lösung von $\mathfrak{S}_1 = 0$ mit der Eigenschaft (63), während ich die y_ν alle gleich Null setze. Für $\Gamma = \Gamma_{\varkappa_2}'$ verfahre ich entsprechend. Damit ist die Regularität von (62) bewiesen. Sind

$$\mathfrak{S}_1 = 0, \mathfrak{S}_2 = 0, \ldots, \mathfrak{S}_r = 0$$

endlich viele reguläre lineare homogene Gleichungssysteme, dann ergibt sich durch mehrmalige Anwendung des obigen Resultats oder auch direkt durch eine der obigen analoge Schlußweise: Wenn man die Gleichungssysteme $\mathfrak{S}_1 = 0, \mathfrak{S}_2 = 0, \ldots, \mathfrak{S}_r = 0$ simultan ansetzt mit je einer anderen Reihe von Unbekannten, dann erhält man ein reguläres Gleichungssystem in sämtlichen Unbekannten.

Satz VIII beweist sich jetzt einfach so: Man nehme an, $\mathfrak{V}$ sei eine Verteilung auf die Klasse $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_k$, für die die Behauptung falsch wäre. Dann gäbe es also zu jeder Klasse $\mathfrak{K}_\varkappa$ ein reguläres lineares homogenes Gleichungssystem $\mathfrak{S}_\varkappa$, welches in $\mathfrak{K}_\varkappa$ keine Lösung besitzt. Nun folgt aber aus dem letzten Resultat, daß es mindestens eine Klasse $\mathfrak{K}_{\varkappa_0}$ von $\mathfrak{V}$ gibt, in der jedes $\mathfrak{K}_\varkappa$ je eine Lösung hat. Für $\varkappa = \varkappa_0$ ist das ein Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{S}_{\varkappa_0}$.

Eine weitere Anwendung von Satz VI ist der folgende

Satz IX. *$\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ seien zwei reguläre lineare homogene Gleichungssysteme in m bzw. n Unbekannten, $\mathfrak{V}$ eine beliebige Verteilung. Dann gibt es eine Matrix*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n} \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1}, & x_{m2}, & \ldots, & x_{mn} \end{pmatrix},$$

deren sämtliche Elemente sich in derselben Klasse von $\mathfrak{B}$ befinden und die die Eigenschaft hat, daß ihre Spalten Lösungen von $\mathfrak{S}_1 = 0$, ihre Zeilen Lösungen von $\mathfrak{S}_2 = 0$ sind.

Sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ die Koeffizientenmatrizen von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, dann kann man die Behauptung auch so ausdrücken: *Das Gleichungssystem*

$$\mathfrak{A}_1 X = 0, \qquad X\mathfrak{A}_2 = 0 \tag{65}$$

in den $m \cdot n$ Unbekannten $x_{\mu\nu}$ ist regulär.

Beweis. Ebenso wie beim Beweis von Satz VIII werde ich eine Gruppenzerlegung der Unbekannten $x_{\mu\nu}$ von (65) angeben, die die bei Satz VI gebrauchte Eigenschaft hat. Gruppenzerlegungen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{q_1}$ und $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_{q_2}'$ der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bzw. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mit der entsprechenden Eigenschaft für $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$ gibt es bereits. Es sei $\Gamma_{\varkappa\lambda}$ die Menge aller $x_{\mu\nu}$, für die

$$x_\mu \prec \Gamma_\varkappa, \qquad y_\nu \prec \Gamma_\lambda'$$

gilt. Dann liegt jedes $x_{\mu\nu}$ in genau einem $\Gamma_{\varkappa\lambda}$. Die $\Gamma_{\varkappa\lambda}$ ordne ich folgendermaßen:

$$\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \ldots, \Gamma_{1q_2}, \quad \Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \ldots, \Gamma_{2q_2}, \quad \ldots, \quad \Gamma_{q_1 1}, \ldots, \Gamma_{q_1 q_2}.$$

Ich zeige nun, daß diese Gruppeneinteilung der Unbekannten von (65) die gewünschte Eigenschaft hat. Dazu ist nur folgendes zu zeigen: zu $\varkappa, \lambda$ mit $1 \leqq \varkappa \leqq q_1$, $1 \leqq \lambda \leqq q_2$ gibt es ein Lösungssystem von (65) mit

$x_{\mu\nu} = 1$ für alle $x_{\mu\nu}$ aus $\Gamma_{\varkappa\lambda}$,
$x_{\mu\nu}$ rational für alle $x_{\mu\nu}$ aus $\Gamma_{\varkappa'\lambda'}$ mit $\varkappa' < \varkappa$ oder mit $\varkappa' = \varkappa$, $\lambda' < \lambda$,
$x_{\mu\nu} = 0$ für alle übrigen $x_{\mu\nu}$.

Nun gibt es eine Lösung $x_\mu = x_\mu^{(0)}$ von $\mathfrak{S}_1 = 0$ mit:

$x_\mu = 1$ für alle x_μ aus $\Gamma_\varkappa$,
x_μ rational für alle x_μ aus $\Gamma_{\varkappa'}$ mit $\varkappa' < \varkappa$,
$x_\mu = 0$ für alle übrigen x_μ.

Ferner gibt es eine Lösung $y_\nu = y_\nu^{(0)}$ von $\mathfrak{S}_2 = 0$ mit:

$y_\nu = 1$ für alle y_ν aus Γ_λ',
y_ν rational für alle y_ν aus $\Gamma_{\lambda'}'$ mit $\lambda' < \lambda$,
$y_\nu = 0$ für alle übrigen y_ν.

Dann setze ich:

$$x_{\mu\nu} = x_\mu^{(0)} \cdot y_\nu^{(0)}.$$

Diese Zahlen bilden eine Lösung von (65), die die gewünschte Eigenschaft hat, wie man sofort sieht. Damit ist die Regularität von (65) bewiesen.

Ein zu IX ganz entsprechender Satz gilt für Matrizen von höherer als zweiter Dimension, wenn mehr als zwei reguläre Gleichungssysteme gegeben sind. Aus IX folgt insbesondere: Wenn $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ regulär sind, dann gibt es bei jedem $\mathfrak{B}$ eine Lösung von $\mathfrak{S}_1 = 0$ und eine Lösung von

$\mathfrak{S}_2 = 0$, so daß beide Lösungen in derselben Klasse liegen und in der Weise miteinander gekoppelt sind, daß eine beliebig vorschreibbare Unbekannte von $\mathfrak{S}_1$ denselben Wert hat wie eine andere beliebig vorschreibbare Unbekannte von $\mathfrak{S}_2$. Das heißt: Sind

$$\mathfrak{S}_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \qquad \mathfrak{S}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

zwei reguläre Gleichungssysteme (homogene), dann ist für jede Wahl von μ_0, ν_0 mit $1 \leqq \mu_0 \leqq m$, $1 \leqq \nu_0 \leqq n$ auch das Gleichungssystem

$$\mathfrak{S}_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \qquad \mathfrak{S}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$
$$x_{\mu_0} = y_{\nu_0}$$

regulär. Das folgt sofort aus Satz IX. Man braucht ja nur für die x_μ die ν_0-te Spalte, für die y_ν die μ_0-te Zeile der Matrix X zu nehmen. Verfährt man entsprechend mit der Verallgemeinerung von IX auf Matrizen von mehr als zwei Dimensionen, dann ergibt sich:

$$\mathfrak{S}_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}) = 0$$
$$\mathfrak{S}_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{S}_r(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_{n_r}^{(r)}) = 0$$

seien r reguläre lineare homogene Gleichungssysteme. Dann kann man bei jedem $\mathfrak{V}$ die Systeme $\mathfrak{S}_\varrho$ so durch Zahlen aus derselben Klasse lösen, daß eine beliebig vorschreibbare Unbekannte von $\mathfrak{S}_1$ gleich einer beliebigen Unbekannten von $\mathfrak{S}_2$, gleichzeitig eine beliebig auswählbare Unbekannte von $\mathfrak{S}_1$ oder $\mathfrak{S}_2$ gleich einer beliebigen Unbekannten von $\mathfrak{S}_3$, eine Unbekannte von $\mathfrak{S}_1$ oder $\mathfrak{S}_2$ oder $\mathfrak{S}_3$ gleich einer Unbekannten von $\mathfrak{S}_4$ ist usw. Das kann man auch so ausdrücken: Man wähle für $2 \leqq \sigma \leqq r$ beliebige Zahlen $\nu_\sigma, \lambda_\sigma, \mu_\sigma$ mit

$$1 \leqq \nu_\sigma \leqq \sigma - 1,$$
$$1 \leqq \lambda_\sigma \leqq n_\sigma,$$
$$1 \leqq \mu_\sigma \leqq n_{\nu_\sigma}.$$

Dann ist folgendes Gleichungssystem in $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ Unbekannten $x_\nu^{(\varrho)}$ regulär:

$$\mathfrak{S}_\varrho(x_1^{(\varrho)}, x_2^{(\varrho)}, \ldots, x_{n_\varrho}^{(\varrho)}) = 0 \qquad (1 \leqq \varrho \leqq r),$$
$$x_{\mu_\sigma}^{(\nu_\sigma)} = x_{\lambda_\sigma}^{(\sigma)} \qquad (2 \leqq \sigma \leqq r).$$

Es folgt z. B., daß es bei jeder Verteilung der natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen in mindestens einer Klasse 100 arithmetische Progression von je 20 Zahlen gibt, so daß immer das Anfangsglied einer der Progressionen gleich der Differenz der folgenden Progression ist.

Im Anschluß an Satz VIII kann man das Problem der regulären Gleichungssysteme noch in einer anderen Richtung weiter verfolgen. Man nenne Mengen natürlicher Zahlen, die von *jedem* regulären linearen homogenen Gleichungssystem mindestens eine Lösung enthalten, *reguläre Mengen*. Dann lautet Satz VIII: *Teilt man die Menge aller natürlichen Zahlen in endlich viele Teilmengen, so ist mindestens eine der Teilmengen regulär.* Nun kann man leicht zeigen, daß eine reguläre Menge regulär bleibt, wenn man endlich viele ihrer Zahlen wegläßt. Es sei nämlich a eine natürliche Zahl aus $\mathfrak{M}$. Es ist nur zu zeigen, daß $\mathfrak{M} - a$ noch eine reguläre Menge ist. Es sei

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

irgendein reguläres lineares homogenes Gleichungssystem. Dann ist auch folgendes Gleichungssystem in $3n$ Unbekannten x_ν, y_ν, z_ν regulär:

$$(66) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ x_1 - y_1 = a z_1, \\ x_2 - y_2 = a z_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n - y_n = a z_n. \end{cases}$$

Denn man nehme etwa an, die schon mehrfach erwähnte Gruppeneinteilung der Unbekannten von $\mathfrak{S}$ sei

$$\Gamma_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_\alpha\}, \quad \Gamma_2 = \{x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \ldots, x_\beta\},$$
$$\Gamma_3 = \{x_{\beta+1}, x_{\beta+2}, \ldots, x_n\}.$$

Dann ist folgende Gruppeneinteilung der Unbekannten von (66) brauchbar:

$$\Gamma_1' = \{x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, y_1, y_2, \ldots, y_\alpha\},$$
$$\Gamma_2' = \{x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2}, \ldots, x_\beta, y_{\alpha+1}, y_{\alpha+2}, \ldots, y_\beta\},$$
$$\Gamma_3' = \{x_{\beta+1}, x_{\beta+2}, \ldots, x_n, y_{\beta+1}, y_{\beta+2}, \ldots, y_n\},$$
$$\Gamma_4' = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}.$$

Man sieht nämlich leicht, daß man auf Grund der Eigenschaft der Gruppeneinteilung $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ eine Lösung von (66) finden kann, bei der die Unbekannten einer beliebigen Gruppe $\Gamma_\varkappa'$ $(1 \leqq \varkappa \leqq 4)$ den Wert Eins haben, die Unbekannten der vorhergehenden Γ_ϱ' rationale Werte haben und die übrigen Unbekannten verschwinden.

Da (66) somit regulär ist, gibt es also eine Lösung von (66) in $\mathfrak{M}$. Die Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in dieser Lösung sind nach (66) größer als a, liegen also in $\mathfrak{M} - a$ und befriedigen außerdem $\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Da $\mathfrak{S}$ beliebig war, ist daher $\mathfrak{M} - a$ eine reguläre Menge.

Es drängt sich folgende Vermutung auf: *Teilt man eine reguläre Menge $\mathfrak{M}$ in endlich viele Teilmengen, dann ist mindestens eine der Teilmengen wieder regulär.* In folgenden Fällen ist diese Vermutung bisher bewiesen:

1. Wenn alle Teilmengen von $\mathfrak{M}$ bis auf eine nur endlich viele Zahlen enthalten. Dann ist die Vermutung nämlich nach der letzten Überlegung richtig.

2. Wenn $\mathfrak{M}$ die Menge aller natürlichen Zahlen ist. Dann ist die Vermutung identisch mit Satz VIII.

3. Wenn $\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}$ keine reguläre Menge ist, wobei $\mathfrak{Z}$ die Menge aller natürlichen Zahlen ist. Denn aus

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_p$$

folgt

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_p + (\mathfrak{Z} - \mathfrak{M}).$$

Da $(\mathfrak{Z} - \mathfrak{M})$ nicht regulär ist, ist nach 2. eine der Mengen $\mathfrak{M}_\lambda$ regulär. Der allgemeine Beweis der Vermutung ist noch nicht gelungen.

Man kann übrigens zu jedem k Verteilungen auf k Klassen angeben, bei denen *jede* Klasse eine *reguläre Menge* ist. Z. B. hat folgende Verteilung diese Eigenschaft: Die Klassen seien $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_k$. Man verteilt so, daß für jede Wahl von $\varkappa, n, \nu$ mit $\begin{matrix} 1 \leqq \varkappa \leqq k, \; n = 0, 1, 2, \ldots \\ 1 \leqq \nu \leqq kn + \varkappa \end{matrix}$

$$\nu \cdot (kn + \varkappa)! \prec \mathfrak{K}_\varkappa,$$

während die nicht in der Form

$$\nu \cdot (kn + \varkappa)! \quad \text{mit} \quad 1 \leqq \varkappa \leqq k, \; 0 \leqq n, \; 1 \leqq \nu \leqq kn + \varkappa$$

darstellbaren Zahlen irgendwie auf die k Klassen verteilt werden.

Man sieht sofort, daß diese Relationen nicht im Widerspruch zueinander stehen. Ferner erkennt man, daß in jeder Klasse zu jedem N ein Zahlensystem von der Form

$$1 \cdot a_N, \; 2 \cdot a_N, \; 3 \cdot a_N, \; \ldots, \; N \cdot a_N$$

liegt, was die Behauptung evident macht[10]).

Eine Bemerkung zu Satz VIII möge noch hinzugefügt werden: Man könnte versucht sein zu vermuten, daß man Satz VIII zusammen mit dem Gleichmäßigkeitssatz zu einer Aussage folgender Art kombinieren kann: Zu jedem k und zu jedem regulären linearen homogenen Gleichungssystem $\mathfrak{S} = 0$ gibt es eine Konstante $N_k(\mathfrak{S})$, so daß man bei jedem $\mathfrak{V}$ mit k Klassen immer mindestens eine Klasse finden kann, in der *jedes* $\mathfrak{S}$ eine Lösung *unterhalb* $N_k(\mathfrak{S})$ besitzt. Es würde also zu der bloßen Existenzaussage für Lösungen, wie sie in Satz VIII vorliegt, noch eine Abschätzung hinzukommen. Daß diese Vermutung unzutreffend ist, zeigt die Folge der Verteilungen

$$\mathfrak{V}^{(n)} = \left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ n+1, & n+2, & n+3, & \ldots \end{matrix} \right\}.$$

[10]) Übrigens ist für jede der Klassen $\mathfrak{K}_k$ die S. 460 unten formulierte Vermutung zutreffend.

Denn bei jeder dieser Verteilungen könnte die fragliche „reguläre“ Klasse nur die zweite sein, woraus

$$N_k(\mathfrak{S}) > n \quad \text{für alle } n$$

folgen würde. Es kann also kein $N_k(\mathfrak{S})$ existieren. Wenn man also alle $\mathfrak{S}$ gleichzeitig in derselben Klasse lösen will, dann geht der Vorteil verloren, daß man diese Lösungen abschätzen kann.

Zur Ableitung der Resultate dieses Paragraphen wurde wesentlich Satz VI benutzt, also die allgemeine Form regulärer linearer Gleichungssysteme. Es hat sich nun gezeigt, daß alle Sätze dieses Paragraphen sich auch ohne Benutzung von Satz VI beweisen lassen. Im zweiten Teil dieser Arbeit wird sogar gezeigt werden, daß Satz VIII und Satz IX weitgehende Verallgemeinerungen zulassen auf Bedingungssysteme allgemeinster Art, die statt der Forderung der Homogenität eine viel schwächere Voraussetzung erfüllen. Diese Verallgemeinerungen werden erst den wahren kombinatorischen Kern der vorstehenden Sätze deutlich machen, während die hier gebrachten Beweise lediglich für lineare Gleichungen anwendbar sind und die Kenntnis aller regulären Systeme linearer Gleichungen voraussetzen.

§ 6.

Abschätzung des Regularitätsgrades für nicht reguläre lineare Gleichungen.

Der Beweis von Satz VI gestattet es, wie S. 450 für homogene Gleichungen etwas genauer dargestellt wurde, für jedes nicht reguläre lineare Gleichungssystem $\mathfrak{S}$ eine Verteilung $\mathfrak{V}$ anzugeben, so daß $\mathfrak{S} = 0$ keine Lösung besitzt, deren Zahlen alle bei $\mathfrak{V}$ in derselben Klasse liegen. Die Anzahl der Klassen von $\mathfrak{V}$ wird dabei von den Koeffizienten von $\mathfrak{S}$ abhängen. Man kann also für den Regularitätsgrad eines nichtregulären Gleichungssystems $\mathfrak{S} = 0$ eine leicht angebbare obere Schranke finden, die von den Koeffizienten von $\mathfrak{S}$ abhängt. Es ist nun zu vermuten, daß man sogar eine Schranke finden kann, die nur von der Anzahl der Unbekannten in $\mathfrak{S}$ abhängt. Das würde bedeuten: *Zu jedem n gibt es eine Zahl k_n mit der Eigenschaft: Ein lineares Gleichungssystem in n Unbekannten ist entweder regulär oder höchstens k_n-fach regulär.* Es würde genügen, diese Vermutung nur für den Fall zu beweisen, daß $\mathfrak{S} = 0$ nur aus *einer einzigen* Gleichung besteht. Dann würde nämlich nach Satz VII auch die Richtigkeit der Vermutung für beliebige Systeme linearer Gleichungen folgen mit denselben Zahlen k_n. Eine ähnliche Überlegung wie die zu Anfang von § 2 angestellte zeigt, daß im Falle *zweier* Unbekannter

die Zahl $k_2 = 1$ im Sinne der Vermutung das Gewünschte leistet. Eine Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

ist also entweder regulär oder höchstens einfach regulär.

Übrigens ist die Vermutung unzutreffend, wenn man sich nicht auf lineare Gleichungen beschränkt. Denn für jedes k ist die Gleichung

$$(x+1-y)(x+2-y)\dots(x+k-y) = 0,$$

wie man analog wie S. 431 im Falle $k = 2$ sieht, k-fach, aber nicht $(k+1)$-fach regulär, während doch die Zahl der Unbekannten immer zwei ist. Dieselbe Eigenschaft hat, um auch ein homogenes Beispiel zu nennen, die Gleichung

$$(x - 2y)(x - 4y)\dots(x - 2^k \cdot y) = 0.$$

Daß die Vermutung im Falle linearer Gleichungen dennoch berechtigt ist, zeigt der folgende Satz:

Satz X.

1. *Die Gleichung*

(1) $$a(x+y) = z \qquad (a \text{ rational, keine Potenz von Zwei})$$

ist höchstens dreifach regulär.

2. *Die Gleichung*

$$2^\alpha \cdot (x+y) = z \qquad (\alpha \text{ ganz})$$

ist entweder regulär oder höchstens fünffach regulär.

3. *Die Gleichung*

$$p^\alpha ax + p^\alpha by + p^\gamma cz = 0$$

$(p \text{ Primzahl}, a, b, c, \alpha, \gamma \text{ ganz}, \alpha \neq \gamma, p \nmid abc(a+b))$

ist entweder regulär oder höchstens fünffach regulär.

4. *Die Gleichung*

$$p^\alpha ax + p^\beta by + p^\gamma cz = 0$$

$(p \text{ Primzahl}, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \text{ ganz}, \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha, p \nmid abc)$

ist höchstens siebenfach regulär.

Beweis. Ich beschränke mich darauf, den ersten Teil des Satzes zu beweisen. Die Beweise für die übrigen drei Behauptungen verwenden ähnliche Überlegungen. Alle diese Beweise sind Verfeinerungen der Beweismethode von Satz IV, Fall 2.

Es sei

$$a = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{mit } a_1, a_2 \text{ ganz.}$$

Da a keine Potenz von Zwei ist, gibt es eine ungerade Primzahl p, die in a_1 und a_2 in einer verschiedenen Potenz aufgeht. Es sei etwa

$$a_1 = a_1' \cdot p^{\alpha_1}, \quad a_2 = a_2' \cdot p^{\alpha_2} \quad \text{mit } \alpha_1 \neq \alpha_2, \quad p \nmid a_1' a_2'.$$

Die eindeutige Zerlegung

$$x = u_p \cdot p^{v_p} \quad \text{mit} \quad p \nmid u_p$$

liefert, wie S. 449, die eindeutige Funktion $u_p(x)$, außerdem noch die zweite Funktion $v_p(x)$. Nun sei $\mathfrak{V}^{(1)}$ eine Verteilung aller zu p teilerfremden positiven Zahlen auf zwei Klassen derart, daß aus

$$u_1 \equiv u_2 \pmod{\mathfrak{V}^{(1)}}$$

immer

$$p \nmid (u_1 + u_2)$$

folgt. Eine solche Verteilung ist z. B.

$$\mathfrak{V}^{(1)} = \begin{cases} \text{1. Klasse: Alle Zahlen } lp + r \text{ mit } l = 0, 1, \ldots;\ r = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}. \\ \text{2. Klasse: Alle Zahlen } lp + r \text{ mit } l = 0, 1, \ldots;\ r = \frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \ldots, p - \end{cases}$$

$\mathfrak{V}^{(2)}$ sei eine Verteilung aller nicht negativen ganzen Zahlen auf zwei Klassen derart, daß für jedes v immer

$$v + \alpha_1 - \alpha_2 \not\equiv v \pmod{\mathfrak{V}^{(2)}}$$

gilt. Eine solche Verteilung ist z. B.

$$\mathfrak{V}^{(2)} = \begin{cases} \text{1. Klasse: Alle Zahlen } x \text{ mit } \left[\frac{x}{\alpha_1 - \alpha_2}\right] \equiv 0 \pmod 2. \\ \text{2. Klasse; Alle Zahlen } x \text{ mit } \left[\frac{x}{\alpha_1 - \alpha_2}\right] \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Jetzt definiere ich eine Verteilung $\mathfrak{V}$ aller natürlichen Zahlen durch $x \equiv y \pmod{\mathfrak{V}}$, wenn $u_p(x) \equiv u_p(y) \pmod{\mathfrak{V}^{(1)}}$, $v_p(x) \equiv v_p(y) \pmod{\mathfrak{V}^{(2)}}$.

$\mathfrak{V}$ hat offenbar vier Klassen. Wenn ich gezeigt habe, daß für jede Wahl natürlicher Zahlen x_1, x_2 mit

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{\mathfrak{V}}, \tag{2}$$

für die

$$a(x_1 + x_2) \tag{3}$$

positiv und ganz ist,

$$a(x_1 + x_2) \not\equiv x_1 \pmod{\mathfrak{V}} \tag{4}$$

ist, dann ist bewiesen, daß die Gleichung (1) nicht vierfach regulär ist, was mit der ersten Behauptung von Satz X übereinstimmt. Es gelte also (2), und (3) sei eine natürliche Zahl. Setzt man

$$u' = u_p(x_1), \quad u'' = u_p(x_2), \quad v' = v_p(x_1), \quad v'' = v_p(x_2),$$

dann folgt aus (2)

$$\begin{aligned} u' &\equiv u'' \pmod{\mathfrak{V}^{(1)}}, \\ v' &\equiv v'' \pmod{\mathfrak{V}^{(2)}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ist zunächst

$$v' < v'',$$

dann ist

$$(6) \qquad a(x_1 + x_2) = \frac{a_1' p^{\alpha_1 - \alpha_2}(u' p^{v'} + u'' p^{v''})}{a_2'} = \frac{a_1'(u' + u'' p^{v'' - v'})}{a_2'} \cdot p^{v' + \alpha_1 - \alpha_2}.$$

Die Zahl

$$\frac{a_1'(u' + u'' p^{v'' - v'})}{a_2'}$$

ist ganz und nicht durch p teilbar. Aus (6) folgt also

$$(7) \qquad v_p(a(x_1 + x_2)) = v' + \alpha_1 - \alpha_2.$$

Da nach der Wahl von $\mathfrak{B}^{(2)}$

$$(8) \qquad v' + \alpha_1 - \alpha_2 \not\equiv v' \pmod{\mathfrak{B}^{(2)}}$$

ist, folgt aus (8) und der Definition von $\mathfrak{B}$ die Relation (4). Entsprechend wird für $v'' < v'$ geschlossen.

Ist dagegen

$$v' = v'',$$

dann folgt

$$(9) \qquad a(x_1 + x_2) = \frac{a_1' p^{\alpha_1 - \alpha_2}(u' p^{v'} + u'' p^{v''})}{a_2'} = \frac{a_1'(u' + u'')}{a_2'} \cdot p^{v' + \alpha_1 - \alpha_2}.$$

Wegen (5) und der speziellen Wahl von $\mathfrak{B}^{(1)}$ ist

$$p \nmid (u' + u''),$$

und

$$\frac{a_1'(u' + u'')}{a_2'}$$

ist eine ganze, nicht durch p teilbare Zahl. Also folgt aus (9) wieder (7) und damit wieder die gewünschte Relation (4).

§ 7.

Zwei spezielle reguläre Systeme von linearen Gleichungen und Ungleichungen.

In diesem Paragraphen sollen zwei Folgerungen aus dem Hilfssatz I, S. 443 gezogen werden, welche zeigen, wie man aus regulären linearen Gleichungssystemen Systeme von Gleichungen und Ungleichungen bilden kann, die regulär sind.

Satz XI. *Das Gleichungssystem*

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

sei k-fach regulär, das Bedingungssystem

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 & (1 \leqq \mu \leqq m'), \\ \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu > 0 & (m' < \mu \leqq m) \end{cases}$$

sei einfach regulär. Dann ist (2) *auch k-fach regulär.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es natürliche Zahlen $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ mit

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu' = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m'),$$

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu' > 0 \qquad (m' < \mu \leqq m).$$

$\mathfrak{B}$ sei eine beliebige Verteilung auf k Klassen. Wendet man auf (1), $\mathfrak{B}$ und

$$M = \mathrm{Max}(|x_1'|, |x_2'|, \ldots, |x_n'|)$$

den Hilfssatz I an, dann ergibt sich die Existenz natürlicher Zahlen $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, d$ mit

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu^{(0)} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m),$$

$$x_\nu^{(0)} + \lambda d \equiv x_1^{(0)} \pmod{\mathfrak{B}} \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n, \qquad \lambda \text{ ganz}, \ |\lambda| \leqq M.$$

Dann folgt

$$\sum_\nu a_{\mu\nu}(x_\nu^{(0)} + x_\nu' d) = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m'),$$

$$\sum_\nu a_{\mu\nu}(x_\nu^{(0)} + x_\nu' d) > 0 \qquad (m' < \mu \leqq m),$$

$$x_1^{(0)} + x_\nu' d \equiv x_2^{(0)} + x_2' d \equiv \ldots \equiv x_n^{(0)} + x_n' d \pmod{\mathfrak{B}},$$

was die Behauptung beweist.

Zusatz. Natürlich können in (2) irgendwelche der Zeichen „$>$“ durch „$<$“ ersetzt werden, ohne daß die k-fache Regularität aufhört.

Satz XII. Voraussetzung. *Das Gleichungssystem*

$$(3)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m)$$

ist k-fach regulär, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist ein Polynom. Es gibt rationale Lösungen von (3) *mit* $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Behauptung. *Das Bedingungssystem*

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu = 0 & (1 \leqq \mu \leqq m), \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0 \end{cases}$$

ist k-fach regulär.

Vorbemerkung zum Beweis. Aus dem vorstehenden Satz folgt sofort der Satz I von van der Waerden. Denn das Gleichungssystem

$$x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \ldots = x_{l-1} - x_l$$

ist regulär, da es durch $x_0 = x_1 = \ldots = x_l = 1$ zu befriedigen ist. Wählt man für f die Funktion

$$x_0 - x_1,$$

dann folgt nach Satz XII die Regularität von

$$x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \ldots = x_{l-1} - x_l \neq 0,$$

was mit dem Satz I identisch ist. Auf Grund dieser Bemerkung rechtfertigt es sich, daß zum Beweis des vorstehenden, dem ersten Anschein nach nicht sehr tiefliegenden Satzes der Hilfssatz I und damit der Satz von van der Waerden benutzt wird.

Beweis von Satz XII. Da (3) k-fach regulär ist, hat (3) rationale Lösungssysteme. Betrachtet man eine maximale Anzahl von linear unabhängigen unter solchen Lösungssystemen, dann sind alle anderen rationalen Lösungssysteme aus diesen speziellen mit rationalen Koeffizienten linear kombinierbar, d. h. alle rationalen Lösungssysteme von (3) haben die Form

$$x_\nu = \sum_{\varrho=1}^{r} b_{\nu\varrho} t_\varrho \qquad (1 \leqq \nu \leqq n).$$

Dabei sind die $b_{\nu\varrho}$ rationale Konstanten und die t_ϱ rationale Parameter, die beliebige Werte annehmen können. Offenbar kann man die $b_{\nu\varrho}$ auch ganz wählen. Aus der Voraussetzung folgt, daß es rationale x_ν gibt mit (3) und

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0.$$

D. h. das Polynom

$$(5) \qquad F(t_1, t_2, \ldots, t_r) = f\left(\sum_\varrho b_{1\varrho} t_\varrho, \sum_\varrho b_{2\varrho} t_\varrho, \ldots, \sum_\varrho b_{n\varrho} t_\varrho\right)$$

verschwindet nicht identisch in den t_ϱ. Dann gibt es bekanntlich eine Konstante A mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Wahl von beliebigen Zahlen $t_\varrho^{(0)}$ und von $d \neq 0$ gibt es ganze rationale Zahlen g_ϱ mit

$$F(t_1^{(0)} + g_1 d,\ t_2^{(0)} + g_2 d,\ \ldots,\ t_r^{(0)} + g_r d) \neq 0,\ |g_\varrho| \leqq A \quad (1 \leqq \varrho \leqq r).$$

Jetzt sei $\mathfrak{B}$ eine beliebige Verteilung auf k Klassen. Nach Hilfssatz I gibt es zu jeder Zahl M natürliche Zahlen $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, d$ mit

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu^{(0)} = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m),$$

$$(6) \qquad x_\nu^{(0)} + \lambda d \equiv x_1^{(0)} \pmod{\mathfrak{B}} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n,\ \lambda \text{ ganz},\ |\lambda| \leqq M).$$

Es gibt $t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots, t_r^{(0)}$ mit

$$x_\nu^{(0)} = \sum_{\varrho=1}^{r} b_{\nu\varrho} t_\varrho^{(0)} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n).$$

Nach Definition von A gibt es ganze rationale Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_r$ mit

$$|g_\varrho| \leqq A \qquad (1 \leqq \varrho \leqq r),$$

$$F(t_1^{(0)} + g_1 d,\ t_2^{(0)} + g_2 d,\ \ldots,\ t_r^{(0)} + g_r d) \neq 0. \tag{7}$$

War nun die Zahl M so gewählt, daß

$$\sum_{\varrho=1}^{r} |b_{\nu\varrho}| \cdot A \leqq M \qquad (1 \leqq \nu \leqq n),$$

dann erfüllen die Zahlen

$$x_\nu' = x_\nu^{(0)} + d \sum_{\varrho} b_{\nu\varrho} g_\varrho \qquad (1 \leqq \nu \leqq n)$$

die Relationen

$$x_1' \equiv x_2' \equiv \ldots \equiv x_n' \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{B}), \tag{8}$$

$$\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu' = 0 \qquad (1 \leqq \mu \leqq m), \tag{9}$$

$$f(x_1', x_2', \ldots, x_n') \neq 0. \tag{10}$$

Denn es ist

$$x_\nu' = x_\nu^{(0)} + \lambda_\nu d \qquad (1 \leqq \nu \leqq n)$$

mit

$$|\lambda_\nu| = |\sum_{\varrho} b_{\nu\varrho} g_\varrho| \leqq \sum_{\varrho} |b_{\nu\varrho}| \cdot A \leqq M,$$

also ist (8) nach (6) richtig. (9) ist richtig wegen

$$x_\nu' = \sum_{\varrho} b_{\nu\varrho} (t_\varrho^{(0)} + g_\varrho d) \qquad (1 \leqq \nu \leqq n).$$

(10) ist nach (5) identisch mit (7). (8), (9) und (10) zeigen aber die Richtigkeit der Behauptung.

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt speziell: Ist

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{11}$$

ein k-fach reguläres lineares homogenes Gleichungssystem, aus dem keine Gleichung der Form

$$x_\alpha = x_\beta$$

für irgendwelche α, β mit $\alpha \neq \beta$ folgt, dann gibt es bei jeder Verteilung der natürlichen Zahlen auf k Klassen immer eine Lösung von (11), deren Zahlen alle *voneinander verschieden* sind und in derselben Klasse liegen. Man wähle nur für f das Polynom

$$f = \prod_{1 \leqq \alpha < \beta \leqq n} (x_\alpha - x_\beta).$$

§ 8.

Erweiterung der Menge der verteilten Zahlen.

Man kann sich die Frage vorlegen, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn man nicht Verteilungen der *natürlichen* Zahlen, sondern solche *aller von Null verschiedenen ganzen* Zahlen betrachtet. Man nenne ein Bedingungssystem *normal*, wenn es bei jeder Verteilung der Zahlen

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{1}$$

auf endlich viele Klassen stets durch Zahlen aus derselben Klasse lösbar ist. Offenbar sind alle regulären Bedingungssysteme erst recht normal. Untersucht man die linearen Gleichungen in bezug auf Normalität, dann zeigt es sich, daß außer den regulären Gleichungssystemen nur noch solche Gleichungssysteme $\mathfrak{S}$ normal sind, bei denen die Normalität trivialerweise dadurch zustande kommt, daß es eine ganze Zahl $g \neq 0$ mit

$$\mathfrak{S}(g, g, \ldots, g) = 0$$

gibt. Es gilt nämlich

Satz XIII. *Dann und nur dann ist das Gleichungssystem*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \tag{2}$$

normal, wenn mindestens eine der folgenden beiden Aussagen zutrifft:

1. *Es gibt eine ganze Zahl* $g \neq 0$ *mit*

$$\sum_{\nu} a_{\mu\nu} \cdot g = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

2. *Es ist* $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$, *und* (2) *ist regulär.*

Beweis. Daß die Richtigkeit einer der beiden obigen Aussagen Normalität von (2) nach sich zieht, ist klar. Jetzt sei umgekehrt angenommen, daß (2) normal ist. Dann folgt zunächst, daß entweder (2) oder das Gleichungssystem

$$-\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu = -a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m) \tag{3}$$

regulär ist. Denn wenn weder (2) noch (3) regulär wäre, dann gäbe es zwei Verteilungen $\mathfrak{V}^{(1)}$ und $\mathfrak{V}^{(2)}$ der natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen, so daß gilt: Es gibt keine Zahlen x_ν mit (2), die bei $\mathfrak{V}^{(1)}$ in derselben Klasse liegen. Es gibt keine Zahlen x_ν mit (3), die bei $\mathfrak{V}^{(2)}$ in derselben Klasse liegen. Dann definiere man eine Verteilung $\mathfrak{V}$ der Zahlen (1) durch

$$\begin{gathered} x \equiv y \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}), \\ \text{wenn } xy > 0,\ |x| \equiv |y| \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}^{(1)}),\ |x| \equiv |y| \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{V}^{(2)}). \end{gathered} \tag{4}$$

Da (2) normal ist, gibt es $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ mit

$$x_1' \equiv x_2' \equiv \ldots \equiv x_n' \,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{B}), \tag{5}$$

$$\sum_{\nu} a_{\mu\nu} x_\nu' = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{6}$$

Wäre $x_1' > 0$, dann folgte aus (5) und (4)

$$x_1' \equiv x_2' \equiv \ldots \equiv x_n' \,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{B}^{(1)}).$$

Das bildet mit (6) einen Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{B}^{(1)}$.

Wäre $x_1' < 0$, dann würde folgen

$$-x_1' \equiv -x_2' \equiv \ldots \equiv -x_n' \,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{B}^{(2)}),$$

$$\sum_{\nu} a_{\mu\nu} \cdot (-x_\nu') = -a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m).$$

Die beiden letzten Zeilen bilden einen Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{B}^{(2)}$. Da somit entweder (2) oder (3) regulär ist, folgt nach Satz VI die Existenz einer ganzen Zahl g mit

$$\sum_{\nu} a_{\mu\nu} \cdot g = a_\mu \qquad (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{7}$$

Ist $g \neq 0$, dann ist die erste der in der Behauptung vorkommenden Aussagen zutreffend. Ist $g = 0$, dann folgt aus (7)

$$a_\mu = 0 \quad \text{für alle } \mu.$$

Dann sind (2) und (3) identisch miteinander und sind beide regulär. Also ist Aussage 2 zutreffend.

Geht man noch einen Schritt weiter und verteilt sämtliche ganzen Zahlen *einschließlich* der Null, dann ergibt sich aus Satz XIII, wie man sofort sieht, daß es nur noch triviale Gleichungssysteme gibt, die bei allen diesen Verteilungen immer durch Zahlen aus derselben Klasse lösbar sind. Es gilt

Satz XIII′. *Dann und nur dann ist ein lineares Gleichungssystem*

$$\mathfrak{S}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

bei jeder Verteilung aller ganzen Zahlen auf endlich viele Klassen immer durch Zahlen aus derselben Klasse lösbar, wenn es eine ganze Zahl g gibt mit

$$\mathfrak{S}(g, g, \ldots, g) = 0.$$

Die Sätze dieses Paragraphen zeigen, daß für lineare Gleichungen die wirklich interessanten Verteilungen gerade die sind, die bisher fast ausschließlich untersucht wurden, nämlich die Verteilungen der natürlichen Zahlen, wenn man nicht kompliziertere und weniger natürlich erscheinende Mengen von Zahlen den Verteilungen zugrunde legen will.

II. Teil.

Allgemeinste Bedingungssysteme.

§ 1.

Einführende Begriffsbildungen, Verallgemeinerung des Gleichmäßigkeitssatzes.

Wie bereits am Ende von § 5 im Teil I erwähnt wurde, lassen die Sätze dieses Paragraphen weitgehende Verallgemeinerungen zu. Der wahre Grund für das Bestehen von Satz VIII und IX wird erst durch die hier folgenden Betrachtungen aufgedeckt werden. Die Kenntnis sämtlicher regulären linearen homogenen Gleichungssysteme wird in Wirklichkeit gar nicht benötigt, wenn man nachweisen will, daß es bei jeder Verteilung eine Klasse gibt, in der alle regulären linearen homogenen Gleichungssysteme gleichzeitig je eine Lösung haben. Es wird sich sogar zeigen, daß noch viele andere Mengen von Bedingungssystemen ganz allgemeiner Art diese Eigenschaft der „gleichzeitigen Lösbarkeit“ haben.

Im folgenden wird mit Bedingungssystemen $\mathfrak{S}$ allgemeinster Art operiert werden, die man sich einfach dadurch gegeben denkt, daß man von jeder Menge endlich vieler natürlicher Zahlen willkürlich festsetzt, ob sie $\mathfrak{S}$ genügen soll oder nicht. Es entsteht also ein System von endlichen Teilmengen der Menge $\mathfrak{Z}$ aller natürlichen Zahlen, das mir die Gesamtheit der „Lösungssysteme“ darstellt. Für Bedingungssystem führe ich jetzt die Bezeichnung *Komplex* ein. Man hat also folgende

Definition. *Unter einem Komplex verstehe man eine Menge, deren Elemente endliche Teilmengen der Menge $\mathfrak{Z}$ aller natürlichen Zahlen sind.*

Von den natürlichen Zahlen wird im folgenden keine andere Eigenschaft als die Abzählbarkeit benutzt, so daß man sie ebensogut durch die Elemente irgendeiner abstrakten abzählbaren Menge ersetzen könnte. Eine Verallgemeinerung gegenüber dem Bisherigen ist noch, daß die Elemente eines Komplexes *beliebig viele* Zahlen enthalten können. Man ist da an keine Höchstgrenze gebunden wie im Falle von Gleichungen oder Ungleichungen, wo die Zahl der Unbekannten doch fest ist. Ein Beispiel für einen Komplex ist

$$\mathfrak{C} = \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6, 7\}, \ldots .$$

Man wird nun konsequent definieren müssen:

Ein Komplex $\mathfrak{C}$ heißt k-fach regulär, wenn es bei jeder Zerlegung von $\mathfrak{Z}$ in k Teilmengen immer mindestens eine unter diesen Teilmengen gibt, in der ein Element von $\mathfrak{C}$ enthalten ist.

Regularität schlechthin bedeute k-fache Regularität für jedes k. Der Klarheit wegen bediene ich mich folgender Schreibweise: Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge, dann bedeute

$$B \prec \mathfrak{A},$$

daß B ein *Element* aus $\mathfrak{A}$ ist,

$$\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A},$$

daß $\mathfrak{B}$ eine *Teilmenge* von $\mathfrak{A}$ ist. Es ist bequem, noch folgende Schreibweise einzuführen: Ist $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{V}$ eine Verteilung, dann bedeute

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{V},$$

daß alle Zahlen von $\mathfrak{N}$ sich bei der Verteilung $\mathfrak{V}$ in derselben Klasse befinden. Die Definition regulärer Komplexe lautet dann z. B.:

$\mathfrak{C}$ heißt regulär, wenn zu jedem $\mathfrak{V}$ ein $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ mit

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{V}$$

existiert.

$\mathfrak{Z}_n$ sei die Menge

$$\mathfrak{Z}_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

$\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathfrak{V}'', \ldots$ sind wie bisher Bezeichnungen für Verteilungen der natürlichen Zahlen auf endlich viele Klassen.

Für den allgemeineren Begriff der Komplexe gilt noch unverändert der Gleichmäßigkeitssatz III. Man kann ihn sogar noch erweitern auf Verteilungen mit *abzählbar unendlich* vielen Klassen

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \ldots, \tag{1}$$

wenn man nur folgende in der Natur des Satzes liegende Einschränkung für diese Verteilungen macht: Jeder Zahl aus $\mathfrak{Z}$ werden ein für allemal auf beliebige Art endlich viele der Klassen (1) zugeordnet. Eine Verteilung besteht nun darin, daß jede Zahl aus $\mathfrak{Z}$ in eine der ihr zugeordneten Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ gelegt wird. Ordnet man speziell allen Zahlen *dieselben* Klassen zu, dann erhält man eine Verteilung der früheren Art auf *endlich viele* Klassen. Ein Beispiel für eine Menge derartiger Verteilungen ist: Man ordne der natürlichen Zahl n alle Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ mit $\nu \mid n$ zu. Verteilt man auf jede mögliche Weise alle natürlichen Zahlen auf die unendlich vielen Klassen $\mathfrak{K}_\nu$ irgendwie derart, daß der Index derjenigen Klasse, in der n liegt, immer ein Teiler von n ist, dann erhält man ein System von Verteilungen, für das der Gleichmäßigkeitssatz noch gilt.

Die Verallgemeinerung des Gleichmäßigkeitssatzes kann man nun so aussprechen:

Satz III′. Voraussetzung. $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ *sei eine Folge endlicher Teilmengen von* $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{C}$ *ein Komplex mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Zahlenfolge*

$$x_n \prec \mathfrak{m}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gibt es x und $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ mit

$$x_n = x \quad \textit{für alle} \quad n \prec \mathfrak{N}.$$

Behauptung. *Es gibt $N \prec \mathfrak{Z}$, so daß zu*

$$x_n \prec \mathfrak{m}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

schon immer x und $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ existiert mit

$$\mathfrak{N} \preccurlyeq \mathfrak{Z}_N, \quad x_n = x \quad \textit{für alle} \quad n \prec \mathfrak{N}.$$

Beweis. Der Beweis verläuft genau so wie der von Satz III, daher fasse ich mich kurz.

Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es zu jedem $N \prec \mathfrak{Z}$ eine Folge

$$x_n^{(N)} \prec \mathfrak{m}_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

so daß kein x und $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ existiert mit

$$\mathfrak{N} \preccurlyeq \mathfrak{Z}_N, \quad x_n^{(N)} = x \quad \text{für alle} \quad n \prec \mathfrak{N}.$$

Weil die Mengen $\mathfrak{m}_n$ endlich sind, gibt es Zahlen

$$x_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit der Eigenschaft: Je endlich viele der folgenden Gleichungen sind für unendlich viele N gleichzeitig richtig:

$$x_1^{(N)} = x_1, \quad x_2^{(N)} = x_2, \quad x_3^{(N)} = x_3, \ \ldots .$$

Wegen $x_n \prec \mathfrak{m}_n$ gibt es nach Voraussetzung x und $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ mit

$$x_n = x \quad \text{für alle} \quad n \prec \mathfrak{N}. \tag{2}$$

$\mathfrak{N}$ ist eine endliche Menge. Daher gibt es unendlich viele N mit

$$x_n^{(N)} = x_n \quad \text{für alle} \quad n \prec \mathfrak{N}. \tag{3}$$

Folglich gilt (3) auch für ein spezielles N mit

$$\mathfrak{N} \preccurlyeq \mathfrak{Z}_N. \tag{4}$$

Aus (3) und (2) folgt

$$x_n^{(N)} = x \quad \text{für alle} \quad n \prec \mathfrak{N},$$

was mit (4) zusammen einen Widerspruch zur Konstruktion der $x_n^{(N)}$ bildet. Der Satz ist also bewiesen.

Im folgenden wird dieser Satz nur im Falle $\mathfrak{m}_n = \{1, 2, \ldots, k\}$ (k = konst.) benutzt werden, wo er aussagt: *Ist $\mathfrak{C}$ k-fach regulär, dann gibt es $N \prec \mathfrak{Z}$, so daß zu $\mathfrak{B}$ mit k Klassen immer $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ existiert mit*

$$\mathfrak{N} \preccurlyeq \mathfrak{Z}_N, \quad \mathfrak{N} \prec \mathfrak{B}.$$

§ 2.

Koppelung von Bedingungssystemen.

Bei den erwähnten Verallgemeinerungen der Sätze VIII und IX kann man so allgemeine Verteilungen wie bei III′ nicht zulassen. Dafür kann man die bei VIII und IX benutzte Homogenität durch viel schwächere Voraussetzungen ersetzen. Das Ziel dieses Paragraphen ist, möglichst schwache hinreichende Bedingungen dafür zu finden, daß zwei reguläre Komplexe $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ die Eigenschaft haben, daß es bei jedem $\mathfrak{V}$ eine Klasse gibt, in der sowohl ein Element von $\mathfrak{C}_1$ als auch ein Element von $\mathfrak{C}_2$ ganz enthalten ist. Daß nicht für jedes Paar regulärer Komplexe immer eine solche Klasse existiert, zeigt schon das triviale Beispiel:

$\mathfrak{C}_1$ besteht nur aus der Menge $\{1\}$, $\mathfrak{C}_2$ nur aus $\{2\}$.

$$\mathfrak{V} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2, 3, 4, \ldots \end{matrix} \right\}.$$

Ist $f(x)$ eine in $\mathfrak{Z}$ erklärte Funktion,

$$\mathfrak{N} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \prec \mathfrak{Z},$$

dann sei

$$f(\mathfrak{N}) = \{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\}.$$

Im folgenden kommen ausschließlich Funktionen vor, die in $\mathfrak{Z}$ erklärt sind und nur Funktionswert aus $\mathfrak{Z}$ annehmen, was ich nicht mehr besonders hervorheben will.

Ist $\mathfrak{C}$ ein Komplex, dann sei

$$f(\mathfrak{C}) = \text{Gesamtheit aller } f(\mathfrak{N}) \text{ mit } \mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}.$$

Es wird sich zeigen, daß für die oben beschriebene „gleichzeitige Lösbarkeit“ von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ in derselben Klasse die Existenz irgendeiner Funktion $f(x, y)$ hinreicht, so daß

$$(1) \qquad f(\mathfrak{C}_1, y) \prec \mathfrak{C}_1, \quad f(x, \mathfrak{C}_2) \prec \mathfrak{C}_2 \quad \text{für alle} \quad x, y \prec \mathfrak{Z}$$

gilt. Man erkennt, daß im Falle homogener Bedingungssysteme der früheren Art diese Bedingung für die Funktion

$$f(x, y) = x \cdot y$$

erfüllt ist. Es gelten also die Sätze VIII und IX nicht nur für lineare Gleichungen, sondern z. B. auch für die Gesamtheit aller regulären homogenen Gleichungssysteme beliebigen Grades. In den folgenden Sätzen wird die einfache Bedingung (1) durch Abänderungen trivialerer Natur abgeschwächt werden. Zur bequemen Formulierung der Resultate führe ich folgende Bezeichnung ein:

$$(2) \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$$

bezeichne bei gegebenem $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ den Komplex, der aus der Gesamtheit aller Vereinigungsmengen je eines Elementes von $\mathfrak{C}_1$ mit je einem Element von $\mathfrak{C}_2$ besteht. Die Aussage, daß (2) regulär ist, bedeutet in der früheren Sprache: Bei jedem $\mathfrak{B}$ sind $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ in mindestens einer Klasse gleichzeitig „lösbar". Entsprechend wird

$$\mathfrak{C}_1 \dotplus \mathfrak{C}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{C}_r$$

für $r > 2$ definiert. Das Analogon zu der bei Satz IX vorkommenden Koppelung von Gleichungssystemen bezeichne man mit

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \tag{3}$$

und definiere es so: Eine Menge

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$$

ist dann und nur dann Element von (3), wenn folgendes der Fall ist: Die a_ν lassen sich, eventuell unter mehrfachem Aufschreiben derselben Zahl, so zu einer Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

anordnen, daß jede Spalte von $\mathfrak{A}$ ein Element von $\mathfrak{C}_1$, jede Zeile von $\mathfrak{A}$ ein Element von $\mathfrak{C}_2$ bildet. Entsprechend wird

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \ldots \times \mathfrak{C}_r \tag{4}$$

für $r > 2$ definiert: Dann und nur dann ist

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$$

ein Element des Komplexes (4), wenn man die a_ν so zu einer r-dimensionalen Matrix $(a_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_r})$ anordnen kann, daß alle Matrixelemente, für die die Indizes

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\varrho-1}, \nu_{\varrho+1}, \ldots, \nu_r$$

denselben Wert haben, ein Element von $\mathfrak{C}_\varrho$ bilden $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$. Die Vielfachheit der betreffenden Zahlen spielt dabei keine Rolle. Nun kann man die zu Satz VIII und IX analogen Sätze von dem jetzigen allgemeineren Standpunkt aus formulieren. Ich gehe schrittweise vor: Von den folgenden drei Sätzen enthält jeder etwas speziellere Voraussetzungen als der vorhergehende, dafür aber auch weitergehende Behauptungen. Meine Voraussetzungen bezeichne ich folgendermaßen:

a) $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_r$ sind beliebige Komplexe.

b) Zu jedem $n < \mathfrak{Z}$ gibt es eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, reguläre Komplexe $\mathfrak{C}_1', \mathfrak{C}_2', \ldots, \mathfrak{C}_{r-1}'$ und den k-fach regulären Komplex $\mathfrak{C}_r'$, so daß

gilt: Zu jeder Wahl von

$$1 \leqq a_1, a_2, \ldots, a_r \leqq n, \quad 1 \leqq \varrho \leqq r, \quad \mathfrak{N}'_\varrho \prec \mathfrak{C}'_\varrho$$

gibt es $\mathfrak{N}_\varrho \prec \mathfrak{C}_\varrho$ mit

$$\mathfrak{N}_\varrho \prec f(a_1, a_2, \ldots, a_{\varrho-1}, \mathfrak{N}'_\varrho, a_{\varrho+1}, \ldots, a_r).$$

c) Zu jedem $n \prec \mathfrak{Z}$ gibt es eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, reguläre Komplexe $\mathfrak{C}'_1, \ldots, \mathfrak{C}'_{r-1}$ und den k-fach regulären Komplex $\mathfrak{C}'$, so daß gilt: Zu jeder Wahl von

$$1 \leqq a_1, a_2, \ldots, a_r \leqq n, \quad 1 \leqq \varrho \leqq r, \quad \mathfrak{N}'_\varrho \prec \mathfrak{C}'_\varrho$$

gibt es $\mathfrak{N}_\varrho \prec \mathfrak{C}_\varrho$ mit

$$\mathfrak{N}_\varrho = f(a_1, a_2, \ldots, a_{\varrho-1}, \mathfrak{N}'_\varrho, a_{\varrho+1}, \ldots, a_r). \tag{5}$$

Jetzt lauten die Sätze:

Satz XIV(1). a) *und* b) *sei erfüllt. Dann ist*

$$\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \ldots + \mathfrak{C}_r$$

ein k-fach regulärer Komplex.

Satz XIV(2). a) *und* c) *sei erfüllt. Dann ist*

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \ldots \times \mathfrak{C}_r$$

ein k-fach regulärer Komplex.

Satz XIV(3). a) *und* c) *sei erfüllt. In jedem $\mathfrak{N}_\varrho \prec \mathfrak{C}_\varrho$ $(1 \leqq \varrho \leqq r)$ sei ferner ein Element ausgezeichnet, und zwar derart, daß mittels* (5) *das ausgezeichnete Element von $\mathfrak{N}'_\varrho$ in das ausgezeichnete Element von $\mathfrak{N}_\varrho$ übergeht. Dann gibt es bei jedem $\mathfrak{V}$ mit k Klassen Mengen $\mathfrak{N}_\varrho \prec \mathfrak{C}_\varrho$ $(1 \leqq \varrho \leqq r)$, welche alle in derselben Klasse liegen und dasselbe ausgezeichnete Element haben.*

Beweis von Satz XIV(1):

Lemma. *$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_N(x)$ seien beliebige Funktionen, $\mathfrak{C}$ ein k^N-fach regulärer Komplex, $\mathfrak{V}$ eine Verteilung auf k Klassen. Dann gibt es $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ mit*

$$f_\nu(\mathfrak{N}) \prec \mathfrak{V} \quad \textit{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq N, \tag{6}$$

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{Z}_{C(k, N, \mathfrak{C})}. \tag{7}$$

($C(k, N, \mathfrak{C})$ ist eine passend gewählte, nur von $k, N, \mathfrak{C}$ abhängende Konstante.)

Beweis des Lemmas. Es sei

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}[f_\nu(\xi)(1 \leqq \nu \leqq N)]. \tag{8}$$

$\mathfrak{V}'$ hat k^N Klassen. Also gibt es $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}$ mit

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{V}'. \tag{9}$$

Aus Satz III′ folgt noch, daß $\mathfrak{N}$ gemäß einer Relation (7) wählbar ist. Wegen (8) ist (9) identisch mit (6), womit das Lemma schon bewiesen ist.

Jetzt zum Beweis des Satzes: Man wähle die in der Voraussetzung b) vorkommende Zahl n so groß, daß alle im folgenden vorkommenden Zahlen unterhalb n wählbar sind. Dieses ist nach Satz III′ immer möglich, wie man sehen wird. Zu diesem festen n gehören nach Voraussetzung b) Komplexe $\mathfrak{C}_1', \ldots, \mathfrak{C}_r'$ und eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ mit den angegebenen Eigenschaften. $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$ seien zunächst noch beliebige natürliche Zahlen. Im folgenden interessiert mich die Abhängigkeit gewisser Schranken von diesen Zahlen. Die Abhängigkeit dieser Schranken von anderen Größen notiere ich nicht, da diese Größen konstant gehalten werden.

1. Man wende das Lemma an auf die n_1^{r-1} Funktionen

$$f(x, a_2, a_3, \ldots, a_r)$$

für alle konstanten a_ϱ mit

$$1 \leqq a_2, a_3, \ldots, a_r \leqq n_1,$$

auf den regulären Komplex $\mathfrak{C}_1'$ und die Verteilung $\mathfrak{B}$. Danach gibt es $\mathfrak{N}_1' \prec \mathfrak{C}_1'$ mit

$$(10) \quad f(\mathfrak{N}_1', a_2, a_3, \ldots, a_r) \prec \mathfrak{B} \quad \text{für alle} \quad 1 \leqq a_2, a_3, \ldots, a_r \leqq n_1,$$

$$\mathfrak{N}_1' \prec \mathfrak{Z}_{\sigma(n_1)}.$$

Man wähle ein festes $a_1' \prec \mathfrak{N}_1'$.

2. Die Anwendung des Lemmas auf die Funktionen

$$f(a_1', x, a_3, a_4, \ldots, a_r) \quad (1 \leqq a_3, a_4, \ldots, a_r \leqq n_2),$$

auf $\mathfrak{C}_2'$ und $\mathfrak{B}$ liefert die Existenz von $\mathfrak{N}_2' \prec \mathfrak{C}_2'$ mit

$$f(a_1', \mathfrak{N}_2', a_3, a_4, \ldots, a_r) \prec \mathfrak{B} \quad (1 \leqq a_3, a_4, \ldots, a_r \leqq n_2),$$

$$\mathfrak{N}_2' \prec \mathfrak{Z}_{\sigma(n_2)}.$$

Man wähle ein festes $a_2' \prec \mathfrak{N}_2'$ usw.

Der ϱ-te Schritt $(2 \leqq \varrho \leqq r-1)$ liefert

ϱ) Es gibt $\mathfrak{N}_\varrho' \prec \mathfrak{C}_\varrho'$ mit

$$(11) \quad f(a_1', a_2', \ldots, a_{\varrho-1}', \mathfrak{N}_\varrho', a_{\varrho+1}, \ldots, a_r) \prec \mathfrak{B} \quad (1 \leqq a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \ldots, a_r \leqq n_\varrho),$$

$$(12) \quad \mathfrak{N}_\varrho' \prec \mathfrak{Z}_{\sigma(n_\varrho)}.$$

Man wähle $a_\varrho' \prec \mathfrak{N}_\varrho'$ $(2 \leqq \varrho \leqq r-1)$.

r) Man wende das Lemma an auf die eine Funktion

$$f(a_1', a_2', \ldots, a_{r-1}', x),$$

$\mathfrak{C}_r'$ und $\mathfrak{B}$. Da hier $k^N = k$ ist, sind seine Voraussetzungen erfüllt. Denn $\mathfrak{C}_r'$ ist ja k-fach regulär. Es gibt also $\mathfrak{N}_r' \prec \mathfrak{C}_r'$ mit

$$f(a_1', a_2', \ldots, a_{r-1}', \mathfrak{N}_r') \prec \mathfrak{B}, \tag{13}$$

$$\mathfrak{N}_r' \prec \mathfrak{Z}_{C(1)}. \tag{14}$$

Man wähle eine Zahl $a_r' \prec \mathfrak{N}_r'$.

Durch passende Wahl der Zahlen n_ϱ will ich nun erreichen, daß in (10) und (11)

$$a_\sigma = a_\sigma'$$

zulässig ist für alle in Betracht kommenden σ. Dazu ist nach (12) und (14) hinreichend

$$C(n_\sigma) \leqq n_\varrho \quad \text{für alle } \varrho, \sigma \text{ mit } 1 \leqq \varrho < \sigma \leqq r. \tag{15}$$

Dabei ist $n_r = 1$ gesetzt. (15) ist leicht zu erfüllen, z. B. durch

$$n_r = 1, \quad n_{\varrho-1} = n_\varrho + C(n_\varrho) \quad \text{für } 2 \leqq \varrho \leqq r.$$

Denn bestimmt man die n_ϱ auf diese Weise, dann ist für $2 \leqq \sigma \leqq r$

$$C(n_\sigma) \leqq n_{\sigma-1} \leqq n_{\sigma-2} \leqq \cdots \leqq n_1.$$

Das ist dasselbe wie (15).

Bei dieser Wahl der n_ϱ folgt also aus (10), (11), (13)

$$f(a_1', a_2', \ldots, a_{\varrho-1}', \mathfrak{N}_\varrho', a_{\varrho+1}', \ldots, a_r') \prec \mathfrak{B} \quad \text{für } 1 \leqq \varrho \leqq r. \tag{16}$$

Nun gibt es nach Voraussetzung b) Mengen $\mathfrak{N}_\varrho \prec \mathfrak{C}_\varrho$ mit

$$\mathfrak{N}_\varrho \prec f(a_1', a_2', \ldots, a_{\varrho-1}', \mathfrak{N}_\varrho', a_{\varrho+1}', \ldots, a_r') \quad \text{für } 1 \leqq \varrho \leqq r. \tag{17}$$

Aus (17) und (16) folgt

$$\mathfrak{N}_\varrho \prec \mathfrak{B} \quad \text{für } 1 \leqq \varrho \leqq r.$$

$\mathfrak{N}_\varrho$ liegt nach (17) in derselben Klasse wie die Menge

$$f(a_1', a_2', \ldots, a_{\varrho-1}', \mathfrak{N}_\varrho', a_{\varrho+1}', \ldots, a_r'),$$

diese letztere wiederum in derselben Klasse wie die Zahl

$$f(a_1', a_2', \ldots, a_{\varrho-1}', a_\varrho', a_{\varrho+1}', \ldots, a_r'). \tag{18}$$

Diese Zahl ist für alle ϱ dieselbe, liegt also mit sämtlichen $\mathfrak{N}_\varrho$ in derselben Klasse. In dieser Klasse liegt daher ein Element von

$$\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \ldots + \mathfrak{C}_r,$$

nämlich die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_r$.

Beweis von XIV$^{(2)}$. Aus Voraussetzung c) folgt Voraussetzung b). Es gelten also alle Resultate des vorhergehenden Beweises. Wegen der schärferen Voraussetzung (5) kann man in (17) das Gleichheitszeichen

schreiben. Wenn man jedes a'_ϱ alle Elemente des zugehörigen $\mathfrak{N}'_\varrho$ durchlaufen läßt, dann durchläuft (18) alle Zahlen eines Elementes von

$$\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2 \times \ldots \times \mathfrak{C}_r, \tag{19}$$

und diese Zahlen liegen alle in derselben Klasse von $\mathfrak{B}$. Damit ist die k-fache Regularität von (19) bewiesen.

Beweis von XIV(3). Wählt man als a'_ϱ das ausgezeichnete Element von $\mathfrak{N}'_\varrho$, dann ist (18) auf Grund der Voraussetzung das ausgezeichnete Element aller $\mathfrak{N}'_\varrho$, womit der Beweis erbracht ist.

Als Verallgemeinerung von Satz VIII kann man folgenden Satz auffassen:

Satz VIII′. Voraussetzung. $\mathfrak{M}$ *sei eine Menge von regulären Komplexen,* $f(x, y)$ *sei eine Funktion mit folgender Eigenschaft: Wenn*

$$\mathfrak{C} \prec \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}, \quad a \prec \mathfrak{Z},$$

dann ist

$$f(\mathfrak{N}, a) \prec \mathfrak{C}, \quad f(a, \mathfrak{N}) \prec \mathfrak{C}.$$

Behauptung. *Bei jeder Verteilung* $\mathfrak{B}$ *gibt es mindestens eine Klasse* $\mathfrak{K}_0$, *so daß zu jedem* $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{M}$ *mindestens ein* $\mathfrak{N}$ *existiert mit*

$$\mathfrak{N} \prec \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{N} \prec \mathfrak{K}_0.$$

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \prec \mathfrak{M}.$$

Nach XIV(1) ist

$$\mathfrak{C}_{1,2} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$$

regulär. Wenn

$$\mathfrak{N}_{1,2} \prec \mathfrak{C}_{1,2}, \quad a \prec \mathfrak{Z},$$

dann ist

$$f(\mathfrak{N}_{1,2}, a) \prec \mathfrak{C}_{1,2}, \tag{20}$$

$$f(a, \mathfrak{N}_{1,2}) \prec \mathfrak{C}_{1,2}. \tag{21}$$

Denn

$$\mathfrak{N}_{1,2} = \text{Vereinigungsmenge von } \mathfrak{N}_1 \prec \mathfrak{C}_1 \text{ mit } \mathfrak{N}_2 \prec \mathfrak{C}_2.$$

Also ist

$$f(\mathfrak{N}_{1,2}, a) = \text{Vereinigungsmenge von } f(\mathfrak{N}_1, a) \text{ und } f(\mathfrak{N}_2, a).$$

Nach Voraussetzung ist aber

$$f(\mathfrak{N}_1, a) \prec \mathfrak{C}_1, \quad f(\mathfrak{N}_2, a) \prec \mathfrak{C}_2.$$

Also ist (20) richtig. Entsprechend wird (21) bewiesen. Ist

$$\mathfrak{C}_3 \prec \mathfrak{M},$$

dann ist daher auf $\mathfrak{C}_{1,2}$ und $\mathfrak{C}_3$ wieder Satz XIV(1) anwendbar, was Regularität von

$$\mathfrak{C}_{1,2} + \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3$$

liefert usw. Wenn allgemein

$$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_r \prec \mathfrak{M}, \tag{22}$$

dann ist

$$\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \ldots + \mathfrak{C}_r \tag{23}$$

regulär. Der weitere Beweis verläuft jetzt wörtlich so wie der Beweis von Satz VIII.

Offenbar kann man in Satz VIII′, ähnlich wie in den drei vorhergehenden Sätzen, die Voraussetzungen noch erheblich einschränken. Die Voraussetzungen brauchen ja nur zu ermöglichen, mit Hilfe von Satz XIV[1] aus (22) immer auf die Regularität von (23) zu schließen, dann gilt schon die Behauptung von Satz VIII′.

(Eingegangen am 15. Februar 1932.)

Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen.

Dritte Abhandlung.

Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der Erde.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

In zwei vor einigen Jahren erschienenen längeren Abhandlungen[1]) habe ich mich u. a. mit der Frage beschäftigt, ob es in der Nachbarschaft einer Gleichgewichtsfigur rotierender, homogener, gravitierender Flüssigkeit weitere Gleichgewichtsfiguren einer homogenen Flüssigkeit gibt, die zu einem wenig veränderten Werte der Winkelgeschwindigkeit gehören und eine lineare Reihe bilden. Den damaligen Untersuchungen lag eine Gleichgewichtsfigur zugrunde, die eventuell aus mehreren Einzelmassen, die keinen Punkt miteinander gemeinsam haben, bestehen kann und mindestens eine durch die Rotationsachse hindurchgehende Symmetrieebene hat[2]). Die Antwort lautet im allgemeinen bejahend. In der Nachbarschaft gewisser „singulärer" Gleichgewichtsfiguren können dabei freilich einem bestimmten Werte der Winkelgeschwindigkeit mehrere oder aber auch keine (reelle) Gleichgewichtsfiguren

---

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Erste Abhandlung. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze. Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 229–284; **3** (1919), S. 172–174; Zweite Abhandlung. Stabilitätsbetrachtungen, ebenda **7** (1920), S. 126–231. Für das Verständnis der folgenden Ausführungen ist die Kenntnis der beiden ersten Abhandlungen nicht erforderlich.

[2]) Wie man weiß, hat jede Gleichgewichtsfigur einer rotierenden, homogenen, gravitierenden Flüssigkeit eine auf der Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene. Vgl. L. Lichtenstein, Über eine Eigenschaft der Gleichgewichtsfiguren rotierender, homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften **48** (1918), S. 1120–1135, insb. S. 1120–1124.

entsprechen. Wie Herr E. Hölder seitdem gezeigt hat, gelten meine Entwicklungen ohne weiteres, auch wenn die fragliche Symmetrieebene fehlt[3]).

Die vorliegende Arbeit ist der Beantwortung derselben Frage für nichthomogene Gleichgewichtsfiguren gewidmet. Den Ausgangspunkt bildet eine bestimmte, gewissen später genauer präzisierten Voraussetzungen (vgl. S. 484 ff.) genügende homogene oder heterogene Gleichgewichtsfigur. Während bei den früheren Betrachtungen lediglich die Winkelgeschwindigkeit variiert wurde, *wird jetzt bei dem Übergang zu einer neuen Gleichgewichtsfigur auch die Flüssigkeitsdichte einer hinreichend kleinen Änderung unterworfen.* Die Erledigung des Problems hängt, wie in dem ersten Kapitel gezeigt wird, auch diesmal mit der Auflösung einer nichtlinearen Integro-Differentialgleichung zusammen, die in dem besonderen Falle einer homogenen Ausgangsfigur und unveränderter Dichte in die in den beiden ersten Abhandlungen behandelte Integro-Differentialgleichung übergeht. Trotzdem die neue Grundgleichung des Problems naturgemäß etwas komplizierter als die frühere erscheint und überdies mit eigentümlichen Singularitäten behaftet ist, so gelingt es doch, die Auflösung unter Zuhilfenahme gewisser neuer seitdem gewonnener methodischer Gedanken eher einfacher als ehemals zu gestalten. Die Behandlung der maßgebenden Integro-Differentialgleichungen sowie einiger damit zusammenhängenden linearen Integralgleichungen (§§ 2, 3, 4 III) dürfte ein selbständiges mathematisches Interesse beanspruchen.

Von besonderer Wichtigkeit ist ein ruhender nichthomogener Flüssigkeitskörper mit Kugelsymmetrie, d. h. ein Körper, der aus konzentrischen Kugelschichten konstanter Dichte besteht, als Ausgangsfigur. Es zeigt sich, daß für jeden hinreichend kleinen Wert der Winkelgeschwindigkeit in der Nachbarschaft dieser Konfiguration eine und nur eine Gleichgewichtsfigur nichthomogener gravitierender Flüssigkeit existiert, wobei angenommen wird, daß die Werte der Dichte und des Gesamtpotentials sich um vorgeschriebene, absolut hinreichend kleine Größen von den korrespondierenden Werten der Ausgangsfigur unterscheiden dürfen. Dies gilt alles, um es anschaulich, wenn auch zunächst wenig präzis auszusagen, auch wenn die Inhomogenität beliebig stark ist, — d. h. wenn die Dichte bei der Ausgangskonfiguration eine im wesentlichen beliebige Funktion des Abstandes von dem Symmetriezentrum darstellt. *Damit ist eine strenge Begründung der Clairautschen Theorie der Figur der Erde gewonnen.* Eine andere Möglichkeit bieten die Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide als Ausgangsfiguren. *Man gelangt*

---

[3]) Vgl. E. Hölder, Beiträge zur mathematischen Theorie der Gestalt des Erdmondes, Sächsische Berichte 78 (1926), S. 21–36; Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik, Math. Zeitschrift 31 (1929), S. 197–257. An der zuletzt genannten Stelle zeigt Herr Hölder, daß es tatsächlich Gleichgewichtsfiguren gibt, die keine Symmetrieebene durch die Rotationsachse haben.

hier zu schwach inhomogenen Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der Maclaurinschen und Jacobischen Ellipsoide.

Mit den beiden zuletzt charakterisierten Problemen hat sich bereits Liapounoff in einer Reihe umfangreicher Abhandlungen beschäftigt. Der Begründung der Clairautschen Theorie hat er die beiden Arbeiten, Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, (8) **14** (1903), S. 1—37; Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planètes, (8) **15** (1904), S. 1—66 gewidmet. Sie enthalten freilich nicht die Einzelheiten des Konvergenzbeweises. Liapounoff nimmt etwas spezieller an, daß die Dichte f in den korrespondierenden Punkten der ruhenden, kugelsymmetrischen Verteilung und der neuen Gleichgewichtsfigur denselben Wert hat. Es möge f zwischen einem Höchstwert f_{Max} und einem kleinsten Wert f_{Min} gelegen sein, und es sei $\langle f', f''\rangle$ irgendein in $\langle f_{\text{Min}}, f_{\text{Max}}\rangle$ enthaltenes Intervall. Liapounoff setzt voraus, daß das von der Flüssigkeit der Dichte f mit $f' \leqq f \leqq f''$ besetzte Volumen bei dem Übergang zu der neuen Flüssigkeitsverteilung allemal erhalten bleibt. Das oben an zweiter Stelle genannte Problem bildet den Gegenstand der beiden nach dem im Jahre 1918 erfolgten Tode Liapounoffs erschienenen großen Abhandlungen, Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation, Première Partie, Académie des Sciences de l'Union des Républiques Soviétiques Socialistes, Leningrad 1925, S. 1—224; Deuxième Partie, ebenda 1927, S. 225—441.

Die Arbeiten von Liapounoff sind rein analytischen Charakters. Wie in seinen der Theorie homogener Gleichgewichtsfiguren gewidmeten Arbeiten[4]) bedient sich Liapounoff der Entwicklungen nach Kugel- und Laméschen Funktionen und gewinnt weitgehende Entwicklungssätze durch meisterhaft durchgeführte, freilich sehr umständliche und unübersichtliche Rechnungen. Man gelangt auf einem viel kürzeren Wege zu wesentlich übersichtlicheren Entwicklungen, auch in dem allgemeineren Falle beliebiger Ausgangsfigur, wenn man, wie im folgenden geschieht, die Betrachtungen mehr geometrisch orientiert[5]).

---

[4]) Sie sind in meiner ersten Abhandlung in der Fußnote [10]) einzeln zitiert. Es sei in diesem Zusammenhang noch auf die Arbeiten von Herrn R. Wavre hingewiesen. (Vgl. namentlich R. Wavre, Figures planétaires et problème de Poincaré, Bulletin de la Société mathématique de France **57** (1929), S. 222—250, sowie das kürzlich erschienene Werk, Figures planétaires et géodésie, Paris 1932, VIII u. 194 S. 8°.) Herr Wavre bestimmt, ohne auf die Fragen der Konvergenz einzugehen, die zweite Näherung der Lösung und gelangt an Hand dieser zu Ergebnissen, die für die Astronomie von Interesse sein dürften.

[5]) Die wesentlichen Ergebnisse und Methoden dieser Abhandlung habe ich in meiner Vorlesung über „Kosmogonische Hypothesen", W.-S. 1928/29, vorgetragen.

Ich kann diese Einleitung nicht schließen, ohne Herrn E. Hölder, der mich bei den Korrekturarbeiten aufs wirksamste unterstützte, auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Herr Hölder hat im Anschluß an diese Untersuchungen gefunden, daß man sich (zum mindesten bei einer homogenen Gleichgewichtsfigur und bei der ruhenden, konzentrisch geschichteten und nach innen dichter werdenden Kugel als Ausgangsfigur) von den hier gemachten Symmetrievoraussetzungen frei machen kann. Vgl. darüber eine erste dieser Arbeit folgende Note.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 481

Erstes Kapitel. Existenzsätze 484

§ 1. Problemstellung 484

§ 2. Fortsetzung 489

§ 3. Die fundamentale Integro-Differentialgleichung 491

§ 4. Einige grundlegende Ungleichheiten 499

Zweites Kapitel. Nichthomogene Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der homogenen 507

§ 1. Der reguläre Fall. Grundgleichungen 507

§ 2. Sukzessive Näherungen 509

§ 3. Konvergenzbeweis 514

§ 4. Verzweigungsfall 520

Drittes Kapitel. Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen nichthomogenen Gleichgewichtsfigur. Figur der Erde 526

§ 1. Die fundamentale Integro-Differentialgleichung des Problems . . 526

§ 2. Untersuchung einer homogenen linearen Integralgleichung . . . 527

§ 3. Fortsetzung 536

§ 4. Auflösung einer linearen, inhomogenen Integralgleichung 549

§ 5. Sukzessive Approximationen 554

§ 6. Figur der Erde 559

Erstes Kapitel.

Existenzsätze.

§ 1.

Problemstellung.

Unseren Betrachtungen liegt eine mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \geqq 0$ rotierende Gleichgewichtsfigur T einer gravitierenden Flüssigkeit zugrunde, die folgende Eigenschaften hat[6]).

1. Das gesamte von der Flüssigkeit besetzte Gebiet ist von einer Jordanschen Fläche S vom Kugeltypus begrenzt[7]). Die Dichte f ist eine

[6]) Ist $\omega = 0$, so handelt es sich natürlich um eine ruhende Flüssigkeitsmasse.

[7]) Wir werden alsbald gewisse weitergehende Annahmen über den Stetigkeitscharakter der Fläche S machen.

stetige, allenfalls abteilungsweise stetige Ortsfunktion. Es können auch Homogenitätsgebiete vorkommen.

Das Potential der Einheitskraft, das mit U bezeichnet werden soll, hat nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung[8]).

2. Die Flächen konstanten Gesamtpotentials[9]), $U = \text{konst.}$, bilden eine Schar ineinandergeschachtelter Jordanscher Flächen vom Kugeltypus[10]). Sie konvergieren gegen einen Punkt, der auf der Umdrehungsachse liegt und O heißen möge. Wir wählen ihn zum Koordinatenursprung.

3. Die Schwerkraft verschwindet nur in O. Demnach ist

$$\text{(4)} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 > 0 \text{ für alle } (x, y, z) \text{ mit } x^2+y^2+z^2>0 \text{ in } T+S.$$

Wegen (4) sind Niveauflächen des Gesamtpotentials allemal Flächen mit

---

[8]) Wir denken uns in bekannter Weise die Lage der Flüssigkeitsteilchen auf ein mitrotierendes Achsenkreuz x-y-z bezogen, dessen z-Achse mit der Umdrehungsachse zusammenfällt. Das Potential der Einheitskraft setzt sich aus dem Potential der Gravitation und demjenigen der Zentrifugalkraft zusammen,

$$\text{(1)} \quad U(x,y,z) = \varkappa V(x,y,z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) = \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho}\, d\tau' + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

($\varkappa$ Gaußsche Gravitationskonstante),

$$\varrho^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2, \qquad d\tau' = dx'dy'dz'.$$

Das Newtonsche Potential $V(x, y, z)$ ist überall nebst seinen partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. Des weiteren ist beispielsweise für alle (x, y, z) im Innern und auf dem Rande von T, kürzer in $T+S$

$$\text{(2)} \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} V(x+h, y+k, z+l) - \frac{\partial}{\partial x} V(x,y,z) \right| \leqq A_0 \operatorname{Max}|f| \,(|h|+|k|+|l|)^\lambda, \quad 0<\lambda<1$$

(Höldersche Bedingung, $A_0 \operatorname{Max}|f|$ Hölderscher Koeffizient, λ der Höldersche Exponent). Übrigens kann hier dem Exponenten λ ein beliebiger Wert <1 erteilt werden; A_0 hängt für alle $T+S$ im Innern eines festen Kugelkörpers $\mathfrak{K}$ um den Koordinatenursprung nur von λ ab. Der Ungleichheit (2) kann eine weitere Ungleichheit von der Form

$$\text{(3)} \quad \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right| \leqq A_1 \operatorname{Max}|f|$$

an die Seite gestellt werden; A_1 ist für alle $T+S$ in $\mathfrak{K}$ konstant. Man vergleiche hierzu beispielsweise meinen Encyklopädieartikel II C 3, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung, wo sich auf S. 207 die Originalliteratur angegeben findet.

[9]) So genannt zur besseren Unterscheidung von dem Gravitationspotential $\varkappa V$.

[10]) Wir werden sogleich präzisere Angaben über den Stetigkeitscharakter der Niveauflächen machen.

stetiger Normale[11]). In der Tat läßt sich die Gleichung

$$U(x, y, z) = \text{konst.} \tag{5}$$

wegen (4), falls etwa $\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0$ ist, nach z auflösen, und die Funktion $z = z(x, y)$ hat stetige, übrigens wegen (2) der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung. Die Richtungskosinus der Normale genügen, als Ortsfunktionen auf der Fläche[12]), einer H-Bedingung[13]).

Nach Voraussetzung ist T eine Gleichgewichtsfigur. Da die wirkenden Kräfte von einem Potential herrühren, so müssen, wie sich zeigen läßt, die Flächen gleichen Potentials zugleich Flächen gleicher Dichte sein[14]). Ist, wie wir voraussetzen wollen, auf S durchweg $-\frac{\partial U}{\partial \nu} < 0$, so ist wegen (4) in $T + S$ überall, außer in dem Koordinatenursprung, $\frac{\partial U}{\partial \nu} < 0$. Die Schwerkraft fällt allemal in die Innennormale hinein. Es sei jetzt Γ irgendein alle Niveauflächen orthogonal treffendes Kurvenstück (eine Orthogonaltrajektorie der Schar der Niveauflächen): Γ geht von einem Punkte G auf S aus und mündet in O ein. Sei r der längs Γ gemessene Abstand einer Niveaufläche von O, l die Gesamtlänge von Γ. Beim Fortschreiten längs Γ von S nach O nimmt der Druck, wie aus (8) folgt, da doch $f > 0$ ist, monoton zu.

---

[11]) Die sich auf den Punkt O reduzierende „Niveaufläche" bleibt hierbei außer Betracht.

[12]) D. h. als Funktionen geeigneter Gaußscher Parameter auf der Fläche aufgefaßt.

[13]) In dem in der Fußnote[8]) genannten Encyklopädieartikel habe ich Flächen dieser Art als Flächen der Klasse Ah bezeichnet. (Vgl. a. a. O. S. 187, 196—197.)

[14]) Aus den Grundgleichungen der Hydrostatik

$$f\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad f\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}, \qquad f\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}, \tag{6}$$

in denen p den Druck bezeichnet, folgt zunächst in naheliegender Schreibweise, wenn L irgendeinen auf einer Niveaufläche S^* zwischen den Punkten P_1 und P_2 gelegenen Bogen mit stetiger Tangente bedeutet,

$$\int_L f\,dU = p_2 - p_1, \tag{7}$$

mithin wegen $dU = 0$ augenscheinlich $p_1 = p_2$. Flächen gleichen Potentials sind also auch Flächen gleichen Druckes, so daß man $p = \mathfrak{p}(U)$ setzen kann. Ist jetzt (ν) die Außennormale zu S^*, so gilt nach (6)

$$f\frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial p}{\partial \nu}, \tag{8}$$

mithin, da nach Voraussetzung überall in $T + S$ mit der einzigen Ausnahme des Koordinatensprunges $\frac{\partial U}{\partial \nu} \neq 0$ ist, $f = \frac{dp}{dU}$, darum $f = \mathfrak{f}(U)$, w. z. b. w.

4. Wir nehmen an, daß die Dichte f sich in $T+S$ nur längs einer endlichen Anzahl geschlossener Flächen (die notwendigerweise Niveauflächen von U sein müssen) sprungweise ändern kann, in jedem Stetigkeitsbereich, der Rand eingeschlossen, aber einer H-Bedingung genügt. Alsdann hat nach bekannten Sätzen V, mithin auch U, daselbst stetige, einer H-Bedingung (mit dem gleichen Exponenten) genügende Ableitungen zweiter Ordnung. Die Niveauflächen sind stetig gekrümmt. Präziser, die auf S. 486 eingeführte Funktion $z = z(x, y)$ und die hierzu analogen Funktionen haben stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung[15]).

Die soeben bezüglich f gemachten Annahmen sind dafür hinreichend, daß die Niveauflächen das soeben charakterisierte Verhalten haben, sie sind freilich keineswegs hierzu notwendig. In dem besonderen Falle eines ruhenden, aus konzentrischen Kugelschalen konstanter Dichte bestehenden Flüssigkeitskörpers sind die Niveauflächen sogar analytisch und regulär, — dabei könnte die Dichte, als Funktion der Entfernung von dem Kugelmittelpunkt aufgefaßt, schlechthin stetig oder abteilungsweise stetig angenommen werden. Als Ortsfunktion in $T+S$ würde f diesmal nicht notwendig eine H-Bedingung erfüllen. Wir werden übrigens meist annehmen, daß f in jedem der (endlich vielen) Stetigkeitsbereiche stetige Ableitungen erster Ordnung hat[16]), die in einer Umgebung des Koordinatenursprungs einer Hölderschen Bedingung mit dem Exponenten μ genügen (vgl. S. 526). Dann sind $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ in O gleich Null. Demnach konvergiert auch $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ für $\mathfrak{r} \to 0$ gegen Null, und dies hat wiederum zur Folge, daß $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ sich in der Umgebung des Koordinatenursprunges wie $\mathfrak{r}^{\mu}$ $(0 < \mu < 1)$ verhalten.

5. Die Konfiguration hat eine auf der Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene und $k \geqq 2$ den Winkel $\frac{\pi}{k}$ miteinander einschließende, durch die Rotationsachse hindurchgehende Symmetrieebenen. Offenbar ist der Koordinatenursprung O der Schnittpunkt aller dieser Ebenen; er ist zugleich der Schwerpunkt des Systems.

Nimmt die Dichte beim Fortschreiten längs einer bestimmten Orthogonaltrajektorie[17]) von S nach O hin monoton zu oder zum mindesten nicht ab, wobei auch Konstanzintervalle vorkommen dürfen, so ist eine

---

[15]) Nach der a. a. O. (vgl. loc. cit. [13])) eingeführten Nomenklatur sind die Niveauflächen Flächen der Klasse Bh.

[16]) Bei den Betrachtungen des § 3, III, bei denen es sich um eine spezielle lineare Integro-Differentialgleichung handelt, wird demgegenüber lediglich vorausgesetzt, daß f als Funktion von $\mathfrak{r}$ aufgefaßt, $f(\mathfrak{r})$ nicht zunehmend, dabei aber nicht notwendig stetig ist.

[17]) Und darum auch längs einer beliebigen Orthogonaltrajektorie.

auf der Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene stets vorhanden[18]). Man braucht in diesem Falle die Existenz der fraglichen Symmetrieebene nicht als eine besondere Voraussetzung einzuführen.

6. Die Orthogonaltrajektorien der Schar der Niveauflächen, die, wie schon einmal bemerkt, sämtlich in O münden, stellen, wie wir weiter annehmen wollen, Linienstücke dar, die mit Einschluß ihres Endpunktes O stetige und gleichmäßig beschränkte Krümmung besitzen. Diese Voraussetzung wird übrigens nur im Falle einer nichthomogenen Ausgangsfigur benutzt.

Es sei, wie vorhin, Γ eine bestimmte Orthogonaltrajektorie der Schar[19]), und es möge wiederum $\mathfrak{r}$ die Länge desjenigens Bogens von Γ bezeichnen, der zwischen dem Koordinatenursprung und dem Schnittpunkt von Γ mit einer bestimmten Niveaufläche enthalten ist. Da Γ jede Niveaufläche in einem einzigen Punkte trifft, so ist durch die Angabe von $\mathfrak{r}$ die fragliche Äquipotentialfläche eindeutig festgelegt. Wir nennen sie dementsprechend $S_\mathfrak{r}$. Augenscheinlich kann man die Dichte der Flüssigkeit, die ja auf $S_\mathfrak{r}$ überall den gleichen Wert hat, als Funktion von $\mathfrak{r}$ auffassen. Wir werden uns demgemäß gelegentlich der Bezeichnung $f = f(\mathfrak{r})$ bedienen. Ist, wie früher, l die Gesamtlänge von Γ, so könnte die Randfläche von T sinngemäß mit S_l bezeichnet werden. Der Einfachheit halber werden wir für S_l, wie bis jetzt, S schreiben. Es sei ξ, η ein System auf S erklärter Gaußscher Parameter der Fläche. Wir denken uns ξ, η so gewählt, daß die Koordinaten X, Y, Z der Punkte auf S, als Funktionen von ξ, η aufgefaßt,

$$X = X(\xi, \eta), \qquad Y = Y(\xi, \eta), \qquad Z = Z(\xi, \eta), \tag{9}$$

stetige Ableitungen erster und stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung haben. Man darf des weiteren, wie wir es tun wollen, annehmen, daß die drei Jacobischen Determinanten

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\xi, \eta)}, \qquad \frac{\partial(X, Z)}{\partial(\xi, \eta)}, \qquad \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(\xi, \eta)} \tag{10}$$

nicht gleichzeitig verschwinden[20]). Durch das Bündel der Orthogonaltrajektorien wird $S_\mathfrak{r}$ $(0 < \mathfrak{r} \leqq l)$ auf S umkehrbar eindeutig und stetig bezogen. Augenscheinlich kann man ξ, η auch als Gaußsche Parameter auf

[18]) Vgl. L. Lichtenstein, Über eine Eigenschaft der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, Math. Zeitschrift 28 (1928), S. 635–640.

[19]) Beispielsweise der zwischen O und S enthaltene Teil der positiven z-Achse.

[20]) Bekanntlich läßt sich S mit einer endlichen Anzahl von Flächenstücken dachziegelartig überdecken, so daß in jedem einzelnen dieser Stücke ξ, η entweder gleich X, Y oder Y, Z oder aber Z, X gesetzt werden kann. Es können natürlich auch alle drei Möglichkeiten gleichzeitig zutreffen.

S_τ betrachten und für die Koordinaten x, y, z der Punkte auf S_τ demgemäß schreiben:

$$x = x(\xi, \eta, \tau), \quad y = y(\xi, \eta, \tau), \quad z = z(\xi, \eta, \tau). \tag{11}$$

Es sei P_1 ein beliebiger Punkt in der Nachbarschaft von S_τ, und es möge P den Fußpunkt des von P_1 auf S_τ gefällten Lotes bezeichnen[21]). Der Abstand PP_1, positiv in der Richtung der Außennormale (ν) zu S_τ in P gerechnet, heiße ζ; wir können ξ, η, ζ, als krummlinige Koordinaten von P_1 auffassen. Es seien a, b, c die Richtungskosinus der Außennormale (ν). Als Funktionen der Koordinaten x, y, z des Punktes P aufgefaßt, sind a, b, c, wie man leicht zeigen kann, in $T + S$, außer im Punkte O, dem Koordinatenursprunge, stetig und haben daselbst stetige oder zum mindesten abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial a}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial c}{\partial z}$.[22]) In der Umgebung von O sind a, b, c, wie weiter angenommen werden soll, noch beschränkt, während die vorhin genannten partiellen Ableitungen sich daselbst wie r^{-1} verhalten[23]). Für die kartesischen Koordinaten x_1, y_1, z_1 des Punktes P_1 erhalten wir die Ausdrücke

$$x_1 = x + a\zeta, \quad y_1 = y + b\zeta, \quad z_1 = z + c\zeta. \tag{12}$$

§ 2.

Fortsetzung.

Nach allen diesen Vorbereitungen gehen wir nunmehr zu unserem eigentlichen Problem über. *Es handelt sich also um die Bestimmung einer Gleichgewichtsfigur* $T_1 + S_1$, *die*, um es kurz auszudrücken, *was ihre Stetigkeits- und Symmetrieeigenschaften betrifft, im wesentlichen wie* $T + S$ *beschaffen ist, in einer Umgebung erster Ordnung von* $T + S$ *liegt und zu einem von* ω *nur wenig verschiedenen Werte* ω_1 *der Winkelgeschwindigkeit gehört.* Wir denken uns $T_1 + S_1$ auf $T + S$ in einer später noch genauer anzugebenden Weise derart topologisch abgebildet, daß Niveauflächen des Gesamtpotentials, S_τ und $S_{\tau 1}$, einander umkehrbar eindeutig und stetig entsprechen, ein Punkt P auf S_τ allemal auf den Schnittpunkt P_1 der Normale (ν) zu S_τ in P mit $S_{\tau 1}$, insbesondere der Koordinatenursprung

---

[21]) Sollten von P_1 mehrere Lote auf S_τ gefällt werden können, so soll P derjenige Fußpunkt heißen, dem der Kleinstwert des Abstandes PP_1 entspricht. Ist die Umgebung von S_τ, in der P_1 liegt, hinreichend nahe, so ist nunmehr P vollkommen bestimmt.

[22]) Als mögliche Unstetigkeitsflächen kommen die Flächen, an denen sich f sprungweise ändert, in Frage.

[23]) Wir lassen es dahingestellt sein, wie weit die verschiedenen vorhin eingeführten Voraussetzungen voneinander unabhängig sind. Vgl. auch Fußnote [59]).

auf sich selbst abgebildet wird. Die Symmetrieebenen von $T+S$ sollen zugleich Symmetrieebenen der Konfiguration T_1+S_1 bilden.

Im Sinne der Ausführungen am Schluß des § 1 kann die Abbildung des Bereiches $T+S$ auf den Bereich T_1+S_1 als bekannt gelten, sobald ζ, der Abstand korrespondierender Punkte P und P_1, als Ortsfunktion in $T+S$ bestimmt ist. Wir schreiben

$$\zeta = \zeta(x, y, z) \tag{13}$$

und machen bezüglich $\zeta(x, y, z)$ folgende spezielle Annahmen. Die Funktion $\zeta(x, y, z)$ ist in $T+S$ stetig, verschwindet im Koordinatenursprunge

$$\zeta(0, 0, 0) = 0, \tag{14}$$

nimmt in den in bezug auf die $k+1$ Symmetrieebenen symmetrisch liegenden Punkten die gleichen Werte an und hat beschränkte und, außer möglicherweise in dem Koordinatenursprunge und auf den Unstetigkeitsflächen von f, wo sie sich sprungweise ändern können, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Schließlich ist, unter ε_0 einen hinreichend kleinen positiven Wert verstanden, in $T+S$

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right| \leqq \varepsilon_0. \tag{15}$$

Aus (14) und (15) folgt, wie man fast unmittelbar sieht[24]),

$$|\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon_0 r \quad (r^2 = x^2+y^2+z^2), \quad \text{somit auch} \quad |\zeta| \leqq \alpha_1 \varepsilon_0, \tag{16}$$

wo α_1 eine Konstante bezeichnet, wie später $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Für (16) könnte man natürlich ebensogut auch $|\zeta| \leqq \alpha_2 \varepsilon_0 r$ schreiben.

Das Bild S_{r1} von S_r in T_1+S_1 ist nach Voraussetzung eine Niveaufläche des Gesamtpotentials der gesuchten neuen Flüssigkeitsverteilung. Demnach hat auf S_{r1} die Flüssigkeitsdichte überall den gleichen Wert. Wir bezeichnen die Dichte in T_1, als Ortsfunktion in T aufgefaßt, mit $f(\tau)+\alpha\chi(\tau)$, unter α einen dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Wert, unter $\chi(\tau)$ eine stetige, allenfalls abteilungsweise stetige Funktion, die in jedem Stetigkeitsbereiche einer H-Bedingung genügt, verstanden. Für $f(\tau)+\alpha\chi(\tau)$ können wir auch

$$f(\mathfrak{r})+\alpha\chi(\mathfrak{r}) \tag{17}$$

schreiben.

Durch die Ungleichheiten (15) und (16) ist zum Ausdruck gebracht worden, daß die Konfiguration T_1+S_1 in der Nachbarschaft erster Ordnung von $T+S$ liegen soll.

---

[24]) Man beachte, daß, unter (l) eine beliebige Richtung verstanden, $\left|\frac{\partial\zeta}{\partial l}\right| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon_0$ gilt.

Nach Voraussetzung sind $S_\mathfrak{r}$ Flächen gleichen Gesamtpotentials. Demnach ist in P auf $S_\mathfrak{r}$

$$(18) \qquad U = \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho} d\tau' + \frac{\omega^2}{2} R^2 = C = C(\mathfrak{r}), \qquad R^2 = x^2 + y^2.$$ [25])

Wie durch die Bezeichnung $C = C(\mathfrak{r})$ angedeutet wird, hängt der auf $S_\mathfrak{r}$ konstante Wert des Gesamtpotentials U seinerseits von $\mathfrak{r}$ ab. In dem Punkte P_1 auf der Niveaufläche $S_{\mathfrak{r}1}$ der neuen Konfiguration gilt entsprechend

$$(19) \qquad U_1 = \varkappa \int_{T_1} (f' + \alpha\chi') \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' + \frac{\omega_1^2}{2} R_1^2 = C_1 = C_1(\mathfrak{r})$$ [26])

mit

$$\varrho_1^2 = (x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2 + (z_1 - z_1')^2, \qquad R_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \qquad d\tau_1' = dx_1' dy_1' dz_1',$$

wofür man in bekannter Weise mit Rücksicht auf (12) auch

$$(21) \qquad \varkappa \int_T (f' + \alpha\chi') \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial(x' - a'\zeta',\ y' + b'\zeta',\ z' + c'\zeta')}{\partial(x', y', z')} d\tau' + \frac{\omega_1^2}{2} R_1^2 = C_1$$

schreiben kann[27]). Aus (18) und (19) folgt

$$(22) \qquad \varkappa \int_{T_1} f' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho} d\tau' + \alpha\varkappa \int_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' + \frac{\omega_1^2}{2} R_1^2 - \frac{\omega^2}{2} R^2$$
$$= C_1 - C = \varkappa\varepsilon = \varkappa\varepsilon(\mathfrak{r}).$$

§3.

Die fundamentale Integro-Differentialgleichung.

Wir setzen

$$(23) \qquad \mathfrak{W} = \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho} d\tau', \qquad \mathfrak{W}_1 = \varkappa \int_{T_1} f' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1'$$

und beweisen, daß der Ausdruck $\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}$ *sich für alle den Ungleichheiten* (15) *und* (16) *genügenden, wie auf S.* 490 *angegeben beschaffenen Funktionen* ζ *in eine unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe*

$$(24) \qquad \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W} = \mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \dots$$

entwickeln läßt, die folgende Eigenschaften hat.

---

[25]) In (18) bezeichnet f' den zu dem Punkte $\tau' = (x', y', z')$ gehörigen Wert der Dichte der Ausgangsverteilung.

[26]) In (19) bezeichnen f' und χ' die zu τ' gehörigen Werte der Dichte und der Ortsfunktion $\chi(\tau)$.

[27]) Die in (21) auftretende Jacobische Determinante ist in $T + S$ beschränkt und, außer höchstens in dem Koordinatenursprunge und auf den Sprungflächen von f, stetig.

1. *Es ist*

$$\mathfrak{W}^{(n)} = \int_T \frac{1}{\varrho^n} \mathfrak{R}^{(n)} d\tau', \tag{25}$$

unter $\mathfrak{R}^{(n)}$ *eine Form n-ten Grades der Variablen* ζ, ζ', $\frac{\partial \zeta'}{\partial x'}$, $\frac{\partial \zeta'}{\partial y'}$, $\frac{\partial \zeta'}{\partial z'}$ *verstanden*[28]).

2. *Es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \mathfrak{W}^{(n)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \mathfrak{W}^{(n)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \mathfrak{W}^{(n)}}{\partial z} \tag{26}$$

Auch diese unendlichen Reihen konvergieren unbedingt und gleichmäßig[29]).

Die Reihen (24) und (26) konvergieren, wie gleichzeitig gezeigt werden wird, auch wenn man unter ζ eine *komplexe*, den auf S. 490 angegebenen Stetigkeits- und Symmetriebedingungen genügende Funktion versteht. Als *Definition* von $\mathfrak{W}_1$ ist diesmal die Formel

$$\mathfrak{W}_1 = \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial(x' + a'\zeta',\ y' + b'\zeta',\ z' + c'\zeta')}{\partial(x', y', z')} d\tau' \tag{27}$$

anzusehen.

Beweis. Neben den beiden Flächenscharen S_τ und $S_{\tau 1}$ betrachten wir die noch von einem weiteren Parameter t $(0 \leqq t \leqq 1)$ abhängige, also zweiparametrige Flächenschar $S_{\tau t}$, die sich symbolisch in der Form $S_\tau + t(S_{\tau 1} - S_\tau)$ darstellen läßt. Dem Punkte P auf S_τ entspricht dabei auf $S_{\tau t}$ der Punkt P_t mit den Koordinaten

$$x + at\zeta, \quad y + bt\zeta, \quad z + ct\zeta. \tag{28}$$

Durch die Zuordnung $P \to P_t$ wird der Bereich $T + S$ umkehrbar eindeutig und stetig auf einen Bereich $T_t + S_t$ abgebildet, S_t ist das Bild der Randfläche S von T. Die Schar $S_{\tau t}$ hat, wie man sich unmittelbar überzeugt, die gleichen topologischen, Stetigkeits- und Symmetrieeigenschaften wie die Schar S_τ. Insbesondere ist das Bild des Punktes O dieser Punkt selbst.

Wir denken uns jetzt den Körper $T_t + S_t$ mit Masse der Dichte f' in P_t' erfüllt und bezeichnen das Gravitationspotential der neuen Konfiguration im Punkte P_t mit $\mathfrak{W}_t$. Es ist demnach

$$\mathfrak{W}_t = \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho_t} \frac{\partial(x' + a't\zeta',\ y' + b't\zeta',\ z' + c't\zeta')}{\partial(x', y', z')} d\tau', \tag{29}$$

$$\varrho_t^2 = [x' - x + t(a'\zeta' - a\zeta)]^2 + [y' - y + t(b'\zeta' - b\zeta)]^2 + [z' - z + t(c'\zeta' - c\zeta)]^2. \tag{30}$$

---

[28]) Die Variablen $\frac{\partial \zeta'}{\partial x'}$, $\frac{\partial \zeta'}{\partial y'}$, $\frac{\partial \zeta'}{\partial z'}$ gehen in $\mathfrak{R}^{(n)}$ übrigens nur linear ein.

[29]) Präziser: die Reihen $\sum \mathfrak{W}^{(n)}|$, $\sum \left|\frac{\partial \mathfrak{W}^{(n)}}{\partial x}\right|$, $\sum \left|\frac{\partial \mathfrak{W}^{(n)}}{\partial y}\right|$, $\sum \left|\frac{\partial \mathfrak{W}^{(n)}}{\partial z}\right|$ konvergieren gleichmäßig.

Wie man leicht verifiziert, ist

$$\frac{\partial(x'+a't\zeta',\, y'+b't\zeta',\, z'+c't\zeta')}{\partial(x', y', z')} = 1 + t\left\{\frac{\partial}{\partial x'}(a'\zeta') + \frac{\partial}{\partial y'}(b'\zeta') + \frac{\partial}{\partial z'}(c'\zeta')\right\}$$
$$+ t^2\left\{\frac{\partial(a'\zeta', b'\zeta')}{\partial(x', y')} + \frac{\partial(a'\zeta', c'\zeta')}{\partial(x', z')} + \frac{\partial(b'\zeta', c'\zeta')}{\partial(y', z')}\right\} + t^3\frac{\partial(a'\zeta', b'\zeta', c'\zeta')}{\partial(x', y', z')},$$

$$\varrho_t^2 = \varrho^2 + 2t\{(x'-x)(a'\zeta'-a\zeta) + (y'-y)(b'\zeta'-b\zeta) + (z'-z)(c'\zeta'-c\zeta)\}$$
$$+ t^2\{(a'\zeta'-a\zeta)^2 + (b'\zeta'-b\zeta)^2 + (c'\zeta'-c\zeta)^2\},$$

$$(32)\qquad \frac{\varrho_t^2}{\varrho^2} = 1 + 2t\left\{\frac{x'-x}{\varrho}\cdot\frac{a'\zeta'-a\zeta}{\varrho} + \ldots\right\} + t^2\left\{\left(\frac{a'\zeta'-a\zeta}{\varrho}\right)^2 + \ldots\right\},$$

oder auch

$$(32')\qquad \frac{\varrho_t^2}{\varrho^2} = 1 + 2t\left\{\frac{x'-x}{\varrho}\cdot\frac{(a'-a)\zeta' + a(\zeta'-\zeta)}{\varrho} + \ldots\right\}$$
$$+ t^2\left\{\left(\frac{(a'-a)\zeta' + a(\zeta'-\zeta)}{\varrho}\right)^2 + \ldots\right\} = 1 + k(t).$$

Es seien: t^* eine Zahl >1 und k^* ein positiver echter Bruch. Wie wir sogleich zeigen werden, ist für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen reellen oder komplexen Werte von ζ, $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial z}$, etwa

$$(33)\qquad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right| \leqq \varepsilon < \varepsilon_0,$$

mithin wegen $\zeta(0,0,0) = 0$ auch $|\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon r$ und alle reellen oder komplexen t in dem Bereiche $|t| \leqq t^*$

$$(34)\qquad |k(t)| \leqq k^*.$$

Der Quotient $\left|\frac{\varrho_t}{\varrho}\right|$ ist also von Null verschieden.

Betrachten wir beispielsweise den zweiten Summanden in (32) rechter Hand. Es gilt augenscheinlich $\left|\frac{x'-x}{\varrho}\right| \leqq 1$ und, wenn, wie wir zunächst annehmen wollen, $r^2 = x^2+y^2+z^2 > 0$, $r'^2 = x'^2+y'^2+z'^2 > 0$ ist und die Verbindungsstrecke $P(x,y,z) \to P'(x',y',z')$ den Koordinatenursprung nicht enthält,

$$\frac{a'\zeta'-a\zeta}{\varrho} = D(\widetilde{a\zeta}) = \tilde{a}D\tilde{\zeta} + \tilde{\zeta}D\tilde{a},$$

unter $D(\widetilde{a\zeta})$ die Ableitung in der Richtung PP' in einem passend gewählten Punkte $\tilde{P}$ der Verbindungsstrecke $\overline{PP'}$ verstanden. Ist $\tilde{r}$ der Abstand des Punktes $\tilde{P}$ von O, so gilt wegen (33), da a, b, c beschränkt sind, $\frac{\partial a}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial c}{\partial z}$ hingegen sich in O wie r^{-1} verhalten,

$$|\tilde{a}| \leqq \alpha_3, \quad |D\tilde{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon, \quad |\tilde{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon\tilde{r}, \quad |D\tilde{a}| \leqq \alpha_4\tilde{r}^{-1},$$

mithin

$$|D(\widetilde{a\zeta})| \leqq \alpha_3 \varepsilon.$$

Liegt P in O, so gilt einfacher

$$\left|\frac{a'\zeta' - a\zeta}{\varrho}\right| = \left|\frac{a'\zeta'}{r'}\right| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon\alpha_3.$$

Fällt P' in O hinein, so ist analog

$$\left|\frac{a'\zeta' - a\zeta}{\varrho}\right| = \left|\frac{a\zeta}{r}\right| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon\alpha_3.$$

Geht der Vektor PP' durch O hindurch, so ist diesmal wegen $\varrho > r$, $\varrho > r'$ gewiß

$$\left|\frac{a'\zeta' - a\zeta}{\varrho}\right| < \left|\frac{a'\zeta'}{r'}\right| + \left|\frac{a\zeta}{r}\right| < 2\sqrt{3}\,\varepsilon\alpha_3.$$

Der Fall $P = P' = O$ kann als ein Grenzfall außer Betracht bleiben.

Augenscheinlich erfüllen die übrigen in (32) als Faktoren von $2t$ bzw. t^2 auftretenden Terme ganz analoge Ungleichheiten. Unsere Behauptung ist, wie man leicht sieht, hiermit bewiesen.

Der Integralausdruck $\mathfrak{W}_t$ ist eine in dem Gebiete $|t| < t^*$ analytische und reguläre Funktion von t. Dies erkennt man wohl am einfachsten wie folgt. Man setze

$$\mathfrak{W}_t = \varkappa \int_T = \varkappa \int_{T-\bar{T}} + \varkappa \int_{\bar{T}},$$

unter $\bar{T}$ den in dem Kugelkörper $(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 \leqq \bar{D}^2$ enthaltenen Teil von T verstanden. Das Integral $\int_{T-\bar{T}}$ ist, wie man unmittelbar sieht, eine in $|t| < t^*$ analytische und reguläre Funktion von t. Berücksichtigt man, daß $\int_T$ für alle (x, y, z) in $T + S$, alle wie vorhin angegeben beschaffenen reellen oder komplexen ζ und alle t in $|t| \leqq t^*$ für $\bar{D} \to 0$ gleichmäßig verschwindet, daß mithin gleichmäßig

$$\int_T = \lim_{\bar{D}\to 0} \int_{T-\bar{T}}$$

gilt, so erhält man in der Tat unsere Behauptung.

Nach bekannten Sätzen ist für $|t| < t^*$ und für alle n $(\geqq 0)$

$$(35)\quad \frac{\partial^n \mathfrak{W}_t}{\partial t^n} = \lim_{\bar{D}\to 0} \varkappa \int_{T-\bar{T}} f' \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left\{\frac{1}{\varrho_t}\frac{\partial(x'+a't\zeta',\ y'+b't\zeta',\ z'+c't\zeta')}{\partial(x', y', z')}\right\} d\tau'$$

$$= \varkappa \int_T f' \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left\{\frac{1}{\varrho_t}\frac{\partial(x'+a't\zeta',\ y'+b't\zeta',\ z'+c't\zeta')}{\partial(x', y', z')}\right\} d\tau'.$$

Der Taylor-Cauchysche Entwicklungssatz liefert wegen $[\mathfrak{W}_t]_{t=0} = \mathfrak{W}$ mit Rücksicht auf (35)

$$\mathfrak{W}_t = \mathfrak{W} + \mathfrak{W}^{(1)} t + \mathfrak{W}^{(2)} t^2 + \ldots + \mathfrak{W}^{(n)} t^n + \ldots, \tag{36}$$

$$\mathfrak{W}^{(n)} = \frac{1}{n!} \varkappa \int_T f' \left\{ \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{1}{\varrho_t} \frac{\partial (x' + a' t\zeta',\ y' + b' t\zeta',\ z' + c' t\zeta')}{\partial (x', y', z')} \right] \right\}_{t=0} d\tau', \tag{37}$$

und für $t = 1$, da $[\mathfrak{W}_t]_{t=1} = \mathfrak{W}_1$ ist, wie behauptet,

$$\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W} = \mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots . \tag{38}$$

Man verifiziert leicht, daß $\mathfrak{W}^{(n)}$ tatsächlich die auf S. 492 angegebene Form hat.

Wir wollen jetzt die in (37) angedeuteten Rechnungen für $n = 1$ tatsächlich durchführen. Wegen (31) ist zunächst

$$\mathfrak{W}^{(1)} = \varkappa \int_T f' \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\varrho_t} \frac{\partial (x' + a' t\zeta',\ y' + b' t\zeta',\ z' + c' t\zeta')}{\partial (x', y', z')} \right] \right\}_{t=0} d\tau' \tag{39}$$

$$= \varkappa \int_T f' \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\varrho_t} \right\}_{t=0} d\tau' + \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}(a'\zeta') + \frac{\partial}{\partial y'}(b'\zeta') + \frac{\partial}{\partial z'}(c'\zeta') \right\} d\tau'.$$ [30])

Des weiteren ist, wie man leicht sieht, wegen (32)

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varrho_t} \right) \right\}_{t=0} = -\left[\frac{\frac{1}{2} \frac{\partial \varrho_t^2}{\partial t}}{\varrho_t^3} \right]_{t=0} = -\frac{1}{\varrho^3} \Big\{ (x' - x)(a'\zeta' - a\zeta) + (y' - y)(b'\zeta' - b\zeta) + (z' - z)(c'\zeta' - c\zeta) \Big\} = -\zeta' \frac{\cos\theta}{\varrho^2} + \zeta \frac{\cos\varphi}{\varrho^2}. \tag{40}$$

In (40) bezeichnet θ den von dem Vektor PP' mit der Außennormale (ν') zu $S_{\tau'}$ in P' eingeschlossenen Winkel (Fig. 1), φ ist der Winkel, welchen der gleiche Vektor mit der Außennormale zu S_τ in P einschließt[31]). Aus (39) und (40) folgt, wenn, wie wir jetzt annehmen wollen, f stetig ist und stetige oder zum mindesten abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung[32]) hat, nach einer teilweisen Integration[33]) in bekannter Weise

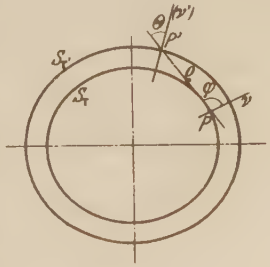


Fig. 1.

---

[30]) Man beachte, daß ϱ_t für $t = 0$ in ϱ übergeht.

[31]) Die Niveaufläche durch P', die zu dem Werte τ' des Parameters gehören mag, ist im Text demgemäß mit $S_{\tau'}$ bezeichnet worden. Natürlich kann auch $S_{\tau'}$ mit S_τ identisch sein.

[32]) Die etwaigen Sprungflächen sind, wie man sich leicht überzeugt, allemal Niveauflächen des Gesamtpotentials.

[33]) Es handelt sich um eine Anwendung der Gaußschen Formel. Man beachte, daß $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$ ist.

$$(40') \quad \mathfrak{W}^{(1)} = \varkappa\zeta \int_T f' \frac{\cos\varphi}{\varrho^2} d\tau' - \varkappa \int_T f'\zeta' \frac{\cos\theta}{\varrho^2} d\tau' + \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}(a'\zeta') + \frac{\partial}{\partial y'}(b'\zeta') \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z'}(c'\zeta') \right\} d\tau' = \zeta \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \nu} - \varkappa \int_T f'\zeta' \frac{\cos\theta}{\varrho^2} d\tau' + \varkappa \int_S f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' - \varkappa \int_T \zeta' \frac{\partial}{\partial \nu'}\left(f' \frac{1}{\varrho}\right) d$$

$$= \zeta \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \nu} - \varkappa \int_T f'\zeta' \frac{\cos\theta}{\varrho^2} d\tau' + \varkappa \int_S f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' - \varkappa \int_T \zeta' f' \frac{\partial}{\partial \nu'}\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\tau' - \varkappa \int_T \zeta' \frac{\partial f'}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho} d$$

und, da $\frac{\partial}{\partial \nu'}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = -\frac{1}{\varrho^2}\cos\theta$ ist, alles in allem

$$(41) \qquad \mathfrak{W}^{(1)} = \zeta \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \nu} + \varkappa \int_S f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' - \varkappa \int_T \zeta' \frac{\partial f'}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho} d\tau'.$$

Vorhin ist f stetig vorausgesetzt worden. Es möge nunmehr demgegenüber f auf einer bestimmten Niveaufläche $\mathfrak{S}$ eine sprungweise Unstetigkeit erleiden und im übrigen in jedem Stetigkeitsbereiche, der Rand allemal eingeschlossen, stetige Ableitungen erster Ordnung haben. Jetzt finden wir, wie man leicht bestätigt,

$$(42) \quad \mathfrak{W}^{(1)} = \zeta \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \nu} - \varkappa \int_T \zeta' \frac{\partial f'}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho} d\tau' + \varkappa \int_S f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' - \varkappa \int_{\mathfrak{S}} [f'] \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma',$$

unter $[f']$ den Sprungwert der Dichte auf $\mathfrak{S}$ verstanden, in naheliegender Schreibweise $[f'] = f(\mathfrak{x}' + 0) - f(\mathfrak{x}' - 0)$. Übrigens könnte man in den über S und $\mathfrak{S}$ erstreckten Integralen f', das ja dort konstant ist, vor das Zeichen des Integrals setzen. Eine ganz analoge Formel erhält man, wenn f auf einer endlichen Anzahl von Niveauflächen einen Sprung erleidet; unter $\mathfrak{S}$ ist diesmal die Gesamtheit der Unstetigkeitsflächen zu verstehen.

Wir setzen zur Vereinfachung

$$(43) \qquad \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\varkappa} = \lambda \ ^{34})$$

und finden

$$(44) \quad \frac{\omega_1^2}{2} R_1^2 - \frac{\omega^2}{2} R^2 = \frac{\omega_1^2}{2}(R_1^2 - R^2) + \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2} R^2 = \varkappa\lambda R^2 + \frac{\omega_1^2}{2}\{(x + a\zeta)^2$$

$$+ (y + b\zeta)^2 - x^2 - y^2\} = \varkappa\lambda R^2 + \frac{\omega_1^2}{2}\zeta^2(a^2 + b^2) + (\omega^2 + 2\varkappa\lambda)\zeta(ax + by).$$

Aus (22), (23), (24), (41) und (44) folgt jetzt

$$(45) \quad \zeta \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \nu} + \varkappa \int_S f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' - \varkappa \int_T \zeta' \frac{\partial f'}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho} d\tau' = \varkappa s - \mathfrak{W}^{(2)} - \mathfrak{W}^{(3)} - \ldots$$

$$- \varkappa\alpha \int_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \varkappa\lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2}\zeta^2(a^2 + b^2) - (\omega^2 + 2\varkappa\lambda)\zeta(ax + by).$$

---

[34]) Wir bezeichnen gelegentlich mit λ Höldersche Exponenten (vgl. beispielsweise die Fußnote [1]). Die Gefahr einer Verwechslung liegt nirgends vor.

Der Ausdruck $\omega^2(ax+by)$ ist augenscheinlich gleich $\omega^2 R$ multipliziert mit dem Kosinus desjenigen Winkels, den (ν) mit dem Lot von (x, y, z) auf die z-Achse, nach (x, y, z) hin gerichtet, einschließt. Wir schreiben

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \nu} + \omega^2(ax+by) = \varkappa\psi.$$

Offenbar ist $\varkappa\psi$ die Komponente der Resultierenden der Gravitations- und Zentrifugalkräfte[35]), d. h. der Schwerkraft, in der Richtung von (ν), und da die Schwerkraft gerade in (ν) hineinfällt, so ist $\varkappa\psi$ eben mit der Schwerkraft identisch. Nach Voraussetzung ist in $T+S$, außer in dem Koordinatenursprunge, $\psi < 0$. Wir nehmen an, daß in der Umgebung des Anfangspunktes ψ wie r oder, was dasselbe bedeutet, wie r verschwindet.

Die Gleichung (45) erhält jetzt nach Division mit $\varkappa$ die Gestalt

$$(46)\quad \psi\zeta + \int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' - \int_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial \nu'}\frac{1}{\varrho}d\tau' = s - \alpha\int_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}d\tau_1' - \lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots).$$

Ist f' abteilungsweise stetig, so tritt links noch der Summand $-\int_\Sigma [f']\frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma'$ hinzu, so daß wir finden:

$$(47)\quad \psi\zeta + \int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' - \int_\Sigma [f']\frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' - \int_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial \nu'}\frac{1}{\varrho}d\tau' = s - \alpha\int_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}d\tau_1' - \lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots).$$

Dies ist die fundamentale Integro-Differentialgleichung, die den weiteren Betrachtungen zugrunde gelegt werden soll.

Ist die Dichte in T konstant, handelt es sich also insbesondere um die Bestimmung *schwach inhomogener Gleichgewichtsverteilungen in der Nachbarschaft einer gegebenen homogenen Gleichgewichtsfigur*, so ist $\frac{\partial f'}{\partial \nu'} = 0$, $[f'] = 0$, und wir erhalten

$$(48)\quad \psi\zeta + \int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = s - \alpha\int_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}d\tau_1' - \lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots).$$

Ist auch noch $\chi \equiv 0$, so finden wir noch einfacher

$$(49)\quad \psi\zeta + \int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = s - \lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots).$$

---

[35]) Genauer, der auf die Masseneinheit in (x, y, z) wirkenden Gravitations- und Zentrifugalkräfte.

Augenscheinlich handelt es sich diesmal um die Bestimmung einer zu dem Werte ω_1 der Winkelgeschwindigkeit gehörigen homogenen Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft einer gegebenen, ebenfalls homogenen Gleichgewichtsfigur von gleicher Dichte. Wie man sich leicht überzeugt, ist die Grundgleichung (49) bis auf einige Änderungen der Bezeichnung[36]) mit der in der ersten Abhandlung dieser Reihe aufgestellten Integro-Differentialgleichung identisch. Sie ist dort auf einem etwas anderen Wege abgeleitet worden und gilt allgemeiner, auch wenn die Niveauflächen des Gesamtpotentials, die a. a. O. gar nicht herangezogen werden, möglicherweise die besonderen, im vorstehenden angeführten Voraussetzungen nicht erfüllen.

Die Beziehungen (48) und (49) gelten für alle τ in $T+S$. Rechterhand bezeichnet s eine (stetige) Funktion von τ. Handelt es sich um eine homogene Flüssigkeit, so genügt es, sich, wie in den beiden ersten Abhandlungen dieser Serie, auf die Betrachtung der Punkte auf S zu beschränken und ζ als eine Ortsfunktion auf S aufzufassen.

Wir kehren jetzt zu der allgemeinen Gleichung (47) zurück und setzen diesmal speziell voraus, die Dichte nehme von außen nach innen *monoton* zu oder zum mindesten nicht ab, so daß auch Konstanzgebiete vorkommen können. Es sei f_m der kleinste, f_M der größte Wert der Dichte. Es gilt $f_m \leqq f \leqq f_M$, und es kann f in dem Intervalle $\langle f_m, f_M \rangle$ auch eine endliche Anzahl Sprungstellen haben. Für (47) kann man im vorliegenden Falle, wie man leicht sieht, schreiben:

$$(50)\quad \psi\zeta + \int_0^{f_M} df' \int_{S_{\tau'}} \zeta' \frac{1}{\varrho}\, d\sigma' = s - \alpha \int_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1}\, d\tau_1' - \lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots).$$

Das Integral linkerhand ist ein Integral im Sinne von Stieltjes. Die Sprungstellen der Dichte, zu denen auch die freie Oberfläche der Ausgangsfigur S gehört[37]), liefern, wie leicht ersichtlich, die über S und $\mathfrak{S}$ erstreckten Integralausdrücke in (47) links. Es ist nicht schwer, zu zeigen, indem man die bekannten Eigenschaften der Stieltjesschen Integrale heranzieht, daß die Formel (50) gilt, auch wenn f, als Funktion von τ aufgefaßt, in den Stetigkeitsintervallen eine Ableitung gar nicht besitzt, ja sogar eine beliebige in dem Intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ erklärte nicht wachsende Funktion von τ darstellt[38]).

---

[36]) So bezeichnen jetzt ψ, λ, s beispielsweise das, was a. a. O. $f\psi$, $f\lambda$, fs bezeichneten.

[37]) Jenseits von $T+S$ ist die Dichte f gleich Null.

[38]) Es genügt, um dies zu zeigen, die in (40′) auszuführende teilweise Integration aufmerksam zu verfolgen.

Aber auch wenn man bezüglich f die eingangs eingeführten Voraussetzungen macht, so daß f nicht notwendig mehr von außen nach innen hin zunimmt (nicht abnimmt), kann man, wenn man f als Funktion von $\mathfrak{r}$ auffaßt, $f = f(\mathfrak{r})$, (47) in der Form

$$(51)\quad \psi\zeta - \int_0^\infty df(\mathfrak{r}') \int_{S_{\mathfrak{r}'}} \zeta' \frac{1}{\varrho}\, do' = s - \alpha \int_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1}\, d\tau_1' - \lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2)$$
$$- 2\lambda\zeta(ax+by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots)$$

schreiben[39]).

§ 4.

Einige grundlegende Ungleichheiten.

Es sei wie vorhin ζ eine in $T+S$ erklärte stetige, im Koordinatenursprung O verschwindende Ortsfunktion, die in den in bezug auf die Symmetrieebenen des Systems symmetrisch gelegenen Punkten die gleichen Werte annimmt, beschränkte und, außer höchstens in O und auf $\mathfrak{S}$, wo sie sich sprungweise ändern können, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \frac{\partial\zeta}{\partial z}$ hat und die Beziehungen

$$(52)\quad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right| \leqq \Omega$$

erfüllt, unter Ω eine beliebige Zahl $\leqq \frac{\varepsilon}{2}$ verstanden. Wie man fast unmittelbar sieht, ist, wenn mit $D\zeta$ die Ableitung von ζ in einer beliebigen Richtung bezeichnet wird,

$$(53)\quad |D\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\Omega,$$

darum

$$(54)\quad |\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\Omega r.$$

Wir bezeichnen die Werte, welche die Funktionen $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}, \mathfrak{W}^{(n)}$ im Koordinatenursprunge annehmen, mit ${}_0\mathfrak{W}_1, {}_0\mathfrak{W}, {}_0\mathfrak{W}^{(n)}$ und setzen

$$(55)\quad \Psi = (\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W} - \mathfrak{W}^{(1)}) - ({}_0\mathfrak{W}_1 - {}_0\mathfrak{W} - {}_0\mathfrak{W}^{(1)})$$
$$= \mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - {}_0\mathfrak{W}^{(3)} - \ldots.$$

---

[39]) Das Intervall $\langle 0, \infty\rangle$ könnte man übrigens durch $\langle 0, l_*\rangle$ ($l_* > l$ beliebig) ersetzen. Das Intervall $\langle 0, l_*\rangle$ zerfällt diesmal, woran wir noch einmal erinnern, in eine endliche Anzahl Teile, so daß in jedem dieser Teilintervalle f und $\frac{df}{d\tau}$ sich stetig verhalten. Wir werden später bezüglich $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ weitere ergänzende Annahmen machen (vgl. S. 526).

Augenscheinlich ist Ψ im Punkte O gleich Null. Wie wir jetzt zeigen wollen, genügt Ψ Ungleichheiten von der Form

$$\left|\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right| \leqq \alpha_6 r \Omega^2, \qquad \Psi \leqq \alpha_7 r^2 \Omega^2. \tag{56}$$

Übrigens kann, was für das folgende wesentlich ist, ζ auch *komplexe* Werte annehmen.

Betrachten wir den Ausdruck, den man erhält, wenn man in (29) $\frac{u}{\Omega}$ statt t einführt, und den wir jetzt mit $\mathfrak{W}_u$ bezeichnen wollen. Er existiert gewiß für alle u mit $|u| \leqq \varepsilon$, da wegen (52)

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\zeta}{\Omega}\right)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\zeta}{\Omega}\right)\right|, \left|\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\zeta}{\Omega}\right)\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für } |u| \leqq \varepsilon \tag{57}$$

gilt[40]). Wir nehmen einstweilen sowohl ζ als auch u reell an. Alsdann kann in naheliegender Schreibweise

$$\mathfrak{W}_u = \varkappa \int_{T_u} f'_u \frac{1}{\varrho_u} d\tau'_u \tag{58}$$

gesetzt werden, und es gilt für alle (x_u, y_u, z_u) in $T_u + S_u$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x_u} &= \varkappa \int_{T_u} f'_u \frac{\partial}{\partial x_u}\left(\frac{1}{\varrho_u}\right) d\tau'_u = \varkappa \int_T f' \frac{\partial}{\partial x_u}\left(\frac{1}{\varrho_u}\right) \frac{\partial(x'_u, y'_u, z'_u)}{\partial(x', y', z')} d\tau', \ldots, \\ \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial z_u} &= \varkappa \int_{T_u} f'_u \frac{\partial}{\partial z_u}\left(\frac{1}{\varrho_u}\right) d\tau'_u, \end{aligned} \tag{60}$$

[41])

mithin für alle (x, y, z) in $T + S$ mit $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ [42])

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x} = \frac{\partial x_u}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x_u} + \frac{\partial y_u}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial y_u} + \frac{\partial z_u}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial z_u}, \ldots. \tag{61}$$

Aus Gründen der Symmetrie haben die Ausdrücke (60) im Punkte O den Wert 0.[43]) Augenscheinlich konvergieren auch $\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial z}$ für $r \to 0$ gegen Null, sind demnach in $T + S$, außer höchstens auf $\mathfrak{S}$, wo sie sich sprungweise ändern können, stetig.

---

[40]) Er existiert sogar für alle $|u| < \varepsilon t^*$ $(t^* > 1)$. Man vergleiche hierzu die Ausführungen auf S. 493.

[41]) Dabei ist

$$x_u = x + a u \frac{\zeta}{\Omega}, \qquad y_u = y + b u \frac{\zeta}{\Omega}, \qquad z_u = z + c u \frac{\zeta}{\Omega}. \tag{59}$$

Ferner bezeichnet f'_u den zu (x'_u, y'_u, z'_u) gehörigen Wert der Dichte in T_u, $f'_u = f'$. Offenbar ist $T_u + S_u$ für $u = \Omega$ mit $T_1 + S_1$ identisch.

[42]) Man beachte, daß $\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ im Punkte O nicht zu existieren brauchen. Sie sind freilich beschränkt.

[43]) Die drei partiellen Ableitungen (60) sind in $T_u + S_u$ stetig.

Wir haben soeben u und ζ als reell vorausgesetzt. Für komplexe u und ζ soll per definitionem

$$(62)\quad \mathfrak{W}_u = \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho_u} \frac{\partial(x_u', y_u', z_u')}{\partial(x', y', z')} d\tau', \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x_u} = \varkappa \int_T f' \frac{\partial}{\partial x_u}\left(\frac{1}{\varrho_u}\right) \frac{\partial(x_u', y_u', z_u')}{\partial(x', y', z')} d\tau', \ldots$$

gesetzt werden.

Es sei L irgendein den Koordinatenursprung mit dem Punkte (x, y, z) verbindendes Kurvenstück mit stetiger Tangente in $T + S$.[44]) Es ist

$$(63)\quad \mathfrak{W}_u - {}_0\mathfrak{W}_u = \int_L \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial z} dz.$$

In der Tat gilt zunächst diese Beziehung ganz gewiß, wenn ζ und u reell sind. Es sei jetzt $\zeta = \zeta_1 + i\,\zeta_2$ gesetzt, und es möge $u = u_1$ immer noch reell bleiben. Jetzt ist beispielsweise

$$(64)\quad x_u = x + \frac{a}{\Omega}(\zeta_1 + i\,\zeta_2) u_1 = x + \frac{a}{\Omega}(\zeta_1 u_1 + i\,\zeta_2 u_1).$$

Wir schreiben

$$(65)\quad \tilde{x}_u = x + \frac{a}{\Omega}(\zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2), \quad \tilde{y}_u = y + \frac{b}{\Omega}(\zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2), \quad \tilde{z}_u = z + \frac{c}{\Omega}(\zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2)$$

(u_2 reell oder komplex),

und bezeichnen mit $\tilde{\mathfrak{W}}_u$, $\frac{\partial \tilde{\mathfrak{W}}_u}{\partial x}$, ... das, was man erhält, wenn man in (58) und (61) x_u, y_u, z_u durch $\tilde{x}_u, \tilde{y}_u, \tilde{z}_u$ ersetzt. Für $u_2 = u_1 i$ geht offenbar $\tilde{\mathfrak{W}}_u, \ldots$ in $\mathfrak{W}_u, \ldots$ über. Für alle $|u_1| \leqq \varepsilon$ und alle $|u_2| < \varepsilon(t^* - 1)$ sind $\tilde{\mathfrak{W}}_u, \frac{\partial \tilde{\mathfrak{W}}_u}{\partial x}, \ldots$ bei festgehaltenem u_1 analytische und reguläre Funktionen von u_2.[45]). Die Beziehungen (63), (61), (62) gelten für reelle u_2 mit $|u_2| < \varepsilon(t^* - 1)$, sie gelten also auch für komplexe u_2, insbesondere für $u_2 = i\,u_1$. Damit ist unsere Behauptung (63) für beliebige den Beziehungen (54) genügende komplexe ζ und für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen reellen u bewiesen[46]). Sie gilt offenbar, da auf den beiden Seiten von (63) analytische und reguläre Funktionen von u stehen, für alle komplexen u mit $|u| \leqq \varepsilon$.

---

[44]) Wir nehmen an, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, daß die Länge von L gewiß $\leqq \alpha_s r$ ist.

[45]) Man beachte, daß wegen $|\zeta_1| \leqq \Omega$, $|\zeta_2| \leqq \Omega$

$$\frac{1}{\Omega}|\zeta_1 u_1 + \zeta_2 u_2| < \varepsilon t^*$$

gilt.

[46]) Man beachte, daß im Augenblick wegen $u_2 = u_1 i$ auch $|u_1| < \varepsilon(t^* - 1)$ vorausgesetzt werden muß.

Es sei Γ der Kreis vom Radius ε in der Ebene der komplexen Veränderlichen u. Nach dem Cauchyschen Integralsatze ist für alle $|u| < \varepsilon$ und alle (x, y, z) in $T + S$ z. B.

$$(66) \qquad \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x}\right)_{u=\theta} \frac{d\theta}{\theta - u}, \qquad \theta = \varepsilon e^{\vartheta i}, \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi,$$

mithin

$$(67) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u^2} \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x} = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x}\right)_{u=\theta} \frac{d\theta}{(\theta - u)^3}.$$

Auf Γ ist für alle (x, y, z) in $T + S$ und alle den vorhin (S 490) präzisierten Voraussetzungen genügenden ζ, wie alsbald gezeigt werden wird,

$$(68) \qquad \left| \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x}\right)_{u=\theta} \right| \leqq \alpha_4 r.$$

Aus (67) folgt darum für alle u mit $|u| \leqq \Omega \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ wegen $\left|\frac{1}{\theta - u}\right| \leqq \frac{2}{\varepsilon}$ die Ungleichheit

$$(69) \qquad \left| \frac{\partial^2}{\partial u^2} \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x} \right| < \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi\varepsilon\alpha_9 r \frac{8}{\varepsilon^3} = \alpha_{10} r \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist ferner

$$(70) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{W}^{(1)}}{\partial x} = \int_0^\Omega d\bar{u} \int_0^{\bar{u}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{u}^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{\bar{u}}}{\partial x}\right) d\bar{u}.$$

In der Tat ist

$$\int_0^\Omega d\bar{u} \int_0^u \frac{\partial^2}{\partial \bar{u}^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{\bar{u}}}{\partial x}\right) d\bar{u} = \int_0^\Omega d\bar{u} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \mathfrak{W}_{\bar{u}}}{\partial x} - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \mathfrak{W}_{\bar{u}}}{\partial x}\right)_{\bar{u}=0} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{\bar{u}}}{\partial x}\right)_{\bar{u}=\Omega} - \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{\bar{u}}}{\partial x}\right)_{\bar{u}=0} - \Omega \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \mathfrak{W}_{\bar{u}}}{\partial x}\right)_{\bar{u}=0} = \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{W}^{(1)}}{\partial x},$$

da

$$\Omega \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \mathfrak{W}_{\bar{u}}}{\partial x}\right)_{\bar{u}=0} = \Omega \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathfrak{W}_t}{\partial x}\right)_{t=0} = \frac{\partial \mathfrak{W}^{(1)}}{\partial x}$$

gilt. Aus (69) und (70) folgt unmittelbar, wie behauptet.

$$(71) \qquad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right| \leqq \alpha_{10} \frac{1}{\varepsilon^2} \Omega^2 r = \alpha_{11} r \Omega^2.$$

Analoge Ungleichheiten gelten für $\left|\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right|$ und $\left|\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right|$. Augenscheinlich folgt aus (71) jetzt, da Ψ wegen (55) im Koordinatenursprung verschwindet,

$$(72) \qquad |\Psi| \leqq \alpha_7 r^2 \Omega^2.$$

Nun aber die Beziehung (68) Sie ist bewiesen, wie wir gleich sehen werden, sobald gezeigt ist, daß $\mathfrak{W}_u$ für alle (x, y, z) in einem Kugelkörper $K + C$ von hinreichend kleinem Radius um den Punkt O als Mittelpunkt und alle u auf Γ stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung in bezug auf die Ortsvariablen x_u, y_u, z_u hat.

Nach Voraussetzung ist f in $T+S$ abteilungsweise stetig und hat in jedem Stetigkeitsbereiche stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Die Unstetigkeitsflächen $\mathfrak{S}$ sind, wie wiederholt bemerkt, jedenfalls Niveauflächen des Gesamtpotentials. Für (60) können wir, wenn wir zunächst ζ und u reell annehmen, nach einer teilweisen Integration in bekannter Weise schreiben:

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x_u} = \varkappa \int_{T_u} \frac{\partial f'_u}{\partial x'_u} \frac{1}{\varrho_u} d\tau'_u + \varkappa \int_{\mathfrak{S}_u + S_u} [f'_u] \frac{1}{\varrho_u} \cos(\nu', x)\, d\sigma'_u,$$

$$(73)\quad d\tau'_u = \frac{\partial(x'_u, y'_u, z'_u)}{\partial(x', y', z')} dx'dy'dz', \qquad \frac{\partial f'_u}{\partial x'_u} = \frac{\partial f'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x'_u} + \frac{\partial f'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x'_u} + \frac{\partial f'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x'_u},$$

$$d\sigma'_u = d\xi' d\eta' \sqrt{A'^2_u + B'^2_u + C'^2_u},$$

$$A'_u = \frac{\partial(y'_u, z'_u)}{\partial(\xi', \eta')}, \qquad B'_u = \frac{\partial(z'_u, x'_u)}{\partial(\xi', \eta')}, \qquad C'_u = \frac{\partial(x'_u, y'_u)}{\partial(\xi', \eta')}.$$ [47])

Die Funktion $\mathfrak{W}_u$ hat offenbar für alle (x_u, y_u, z_u) in dem Bildbereiche $K_u + C_u$ von $K + C$ stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung, und es gilt beispielsweise

$$(74)\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_u}{\partial x_u^2} = \varkappa \int_{T_u} \frac{\partial f'_u}{\partial x'_u} \frac{\partial}{\partial x_u}\left(\frac{1}{\varrho_u}\right) d\tau'_u + \varkappa \int_{\mathfrak{S}_u + S_u} [f'_u] \frac{\partial}{\partial x_u}\left(\frac{1}{\varrho_u}\right) \cos(\nu', x)\, d\sigma'_u.$$

Ferner ist, da in O aus Gründen der Symmetrie $\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x_u}$ verschwindet,

$$(75)\quad \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x_u} = \int_L \Big[\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_u}{\partial x_u^2}\Big(\frac{\partial x_u}{\partial x}dx + \frac{\partial x_u}{\partial y}dy + \frac{\partial x_u}{\partial z}dz\Big)$$

$$+ \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_u}{\partial x_u \partial y_u}\Big(\frac{\partial y_u}{\partial x}dx + \frac{\partial y_u}{\partial y}dy + \frac{\partial y_u}{\partial z}dz\Big) + \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_u}{\partial x_u \partial z_u}\Big(\frac{\partial z_u}{\partial x}dx + \frac{\partial z_u}{\partial y}dy + \frac{\partial z_u}{\partial z}dz\Big)\Big].$$

Diese Formel gilt zunächst, wie gesagt, für reelle ζ und u. Wie auf S. 501 überzeugt man sich indessen, daß sie auch für komplexe ζ und u ihre Gültigkeit behält. Unter $\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_u}{\partial x_u^2}$ beispielsweise ist dabei rein formal der auf der rechten Seite der Gleichung (74) befindliche Ausdruck zu verstehen. Wie man sich leicht überzeugt, ist für alle den Ungleichheiten (53) und (54) genügenden ζ, alle u auf Γ und alle (x, y, z) in $K + C$

$$(76)\quad \Big|\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_u}{\partial x_u^2}\Big|, \Big|\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_u}{\partial x_u \partial y_u}\Big|, \Big|\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_u}{\partial x_u \partial z_u}\Big| \leqq \alpha_{11}$$

und darum wegen (75)

$$(77)\quad \Big|\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial x_u}\Big| \leqq \alpha_{12} r.$$

---

[47]) Man vergleiche die analogen Betrachtungen der ersten Abhandlung, Math. Zeitschrift 1 (1918), S. 229–284, insb. S. 242.

Analoge Ungleichheiten gelten für $\left|\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial y_u}\right|$ und $\left|\frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial z_u}\right|$. Der Übergang zu (68) bietet nicht die geringsten Schwierigkeiten dar.

Wir nehmen von nun an $\Omega \leqq \frac{\varepsilon}{4}$ an und bezeichnen mit $\dot{\zeta}$ eine beliebige andere wie ζ beschaffene Ortsfunktion in $T+S$. Auch $\dot{\zeta}$ nimmt demnach in zwei in bezug auf die $k+1$ Symmetrieebenen symmetrisch gelegenen Punkten dieselben Werte an, verschwindet in O und erfüllt die Beziehungen

$$\left|\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \Omega, \qquad |\dot{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,\Omega r. \tag{78}$$

Es sei ferner

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\zeta-\dot{\zeta})\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y}(\zeta-\dot{\zeta})\right|, \left|\frac{\partial}{\partial z}(\zeta-\dot{\zeta})\right| \leqq \sigma, \quad |\zeta-\dot{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,\sigma r, \quad \sigma \leqq \tfrac{1}{2}\Omega. \tag{79}$$

Bezeichnet man den zu Ψ analogen, auf $\dot{\zeta}$ bezüglichen Ausdruck mit $\dot{\Psi}$,

$$\dot{\Psi} = (\dot{\mathfrak{W}}_1 - \dot{\mathfrak{W}} - \dot{\mathfrak{W}}^{(1)}) - ({}_0\dot{\mathfrak{W}}_1 - {}_0\dot{\mathfrak{W}} - {}_0\dot{\mathfrak{W}}^{(1)}), \tag{80}$$

so gelten, wie wir jetzt zeigen wollen, die Ungleichheiten

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\Psi-\dot{\Psi})\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y}(\Psi-\dot{\Psi})\right|, \left|\frac{\partial}{\partial z}(\Psi-\dot{\Psi})\right| \leqq \alpha_{13}\, r\, \Omega\, \sigma, \tag{81}$$

$$|\Psi-\dot{\Psi}| \leqq \alpha_{13}\sqrt{3}\, r^2\, \Omega\, \sigma.$$

Wir führen zu dem Zwecke, unter v zunächst einen reellen Wert $\leqq \Omega$ verstanden, durch die Transformation $(x, y, z) \to (x_v, y_v, z_v)$,

$$x_v = x + a\left(\dot{\zeta} + \frac{v}{\sigma}(\zeta-\dot{\zeta})\right), \qquad y_v = y + b\left(\dot{\zeta} + \frac{v}{\sigma}(\zeta-\dot{\zeta})\right),$$
$$z_v = z + c\left(\dot{\zeta} + \frac{v}{\sigma}(\zeta-\dot{\zeta})\right), \tag{82}$$

einen Bereich $T_v + S_v$ ein, den wir uns mit Masse der Dichte f im Punkte (x_v, y_v, z_v) belegt denken. Für $v=0$ ist $T_v + S_v$ mit $T+S$, für $v=\sigma$ mit $T_1 + S_1$ identisch. Die Ausdrücke Ψ_v, Ψ und $\dot{\Psi}$ haben, wie wir wissen, auch für komplexe $\zeta, \dot{\zeta}$ und v eine bestimmte Bedeutung. Da für $|v| \leqq \Omega$ augenscheinlich

$$\left|\dot{\zeta} + \frac{v}{\sigma}(\zeta-\dot{\zeta})\right| \leqq 2\Omega \leqq \frac{\varepsilon}{2} \tag{83}$$

gilt, so genügt Ψ_v Beziehungen, die man erhält, wenn man in (56) Ω durch 2Ω ersetzt[48]). Es ist also in allen Punkten eines Kreises Γ_0 vom

[48]) Man beachte, daß $2\Omega \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ ist, während die Anwendbarkeit der Ungleichheiten (56) an die Bedingung $\Omega \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ geknüpft war. Der Wert 2Ω spielt eben jetzt die gleiche Rolle wie a. a. O. die Größe Ω.

Radius Ω um den Koordinatenursprung in der Ebene der komplexen Variablen v, d. h. für alle $v = v = \Omega e^{i\vartheta}$, $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$,

$$\left|\frac{\partial \Psi_v}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \Psi_v}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \Psi_v}{\partial z}\right| \leqq \alpha_{14} r \Omega^2, \quad |\Psi_v| \leqq \alpha_{14} \sqrt{3}\, r^2 \Omega^2. \tag{84}$$

Der Cauchysche Integralsatz liefert des weiteren für alle $|v| \leqq \mathcal{O} \leqq \frac{\Omega}{2}$ z. B.

$$\frac{\partial \Psi_v}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Psi_v}{\partial x} \frac{dv}{v - v}, \qquad v = \Omega e^{i\vartheta}, \tag{85}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Psi_v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Psi_v}{\partial x} \frac{dv}{(v - v)^2}. \tag{86}$$

Wegen $|v - v| \geqq \frac{\Omega}{2}$ ist

$$\left|\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Psi_v}{\partial x}\right)\right| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \Omega \alpha_{14} r \Omega^2 \frac{4}{\Omega^2} = 4 \alpha_{14} r \Omega,$$

mithin, wie in (81) angegeben wurde,

$$\left|\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial x}\right| = \left|\int_0^{\mathcal{O}} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Psi_v}{\partial x}\right) dv\right| \leqq \alpha_{13} r \Omega \mathcal{O}. \tag{87}$$

Analoge Ungleichheiten ergeben sich für $\left|\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial y}\right|$ sowie $\left|\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial z}\right|$. Die Beziehung $|\Psi - \dot{\Psi}| \leqq \alpha_{13} \sqrt{3}\, r^3 \Omega \mathcal{O}$ (vgl. S. 504) ist ihre unmittelbare Folge[49]).

Wir kehren für einen Augenblick zu den Betrachtungen auf S. 499ff. noch einmal zurück, um einige weitere, später wiederholt benutzte Ungleichheitsbeziehungen abzuleiten. Wie man leicht erkennt, ist

$$\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots = \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W} - \mathfrak{W}^{(1)} = \int_0^{\Omega} d\bar{u} \int_0^{\bar{u}} \frac{\partial^2 \mathfrak{W}_{\bar{u}}}{\partial \bar{u}^2} d\bar{u}, \tag{88}$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_{\bar{u}}}{\partial \bar{u}^2} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \mathfrak{W}_\theta \frac{d\theta}{(\theta - \bar{u})^3}, \qquad \theta = \varepsilon e^{\vartheta i}, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi. \tag{89}$$

Auf Γ ist für alle (x, y, z) in $T + S$ und alle den auf S. 490 präzisierten Voraussetzungen genügenden ζ

$$|\mathfrak{W}_\theta| \leqq \alpha_{15}.$$

Aus (89) folgt darum für alle $\bar{u}$ mit $|\bar{u}| \leqq \Omega \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ wegen $\left|\frac{1}{\theta - \bar{u}}\right| \leqq \frac{2}{\varepsilon}$

$$\left|\frac{\partial^2 \mathfrak{W}_{\bar{u}}}{\partial \bar{u}^2}\right| \leqq \frac{1}{\pi} 2\pi \varepsilon \cdot \alpha_{15} \frac{8}{\varepsilon^3} = \alpha_{16} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2},$$

---

[49]) Die spezielle vorhin eingeführte Voraussetzung $\mathcal{O} \leqq \frac{1}{2} \Omega$ läßt sich übrigens leicht aufheben (allgemein gilt natürlich $\mathcal{O} \leqq 2\Omega$); doch ist dies für das Folgende nicht wesentlich.

mithin

$$(90)\quad |\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots| = |\mathfrak{W}_1-\mathfrak{W}-\mathfrak{W}^{(1)}| \leqq \alpha_{16}\frac{1}{\varepsilon^3}\Omega^2 = \alpha_{17}\Omega^2.$$

Es sei in diesem Zusammenhang daran erinnert, daß nach (56)

$$(90')\qquad \left|\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{W}^{(2)}+\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots\right|, \ldots \leqq \alpha_6\Omega^2 r$$

gilt. Eine sinngemäße Modifikation der Betrachtungen auf S. 504–505 ergibt die weitere Ungleichheit

$$(91)\qquad |(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots)-(\dot{\mathfrak{W}}^{(2)}+\dot{\mathfrak{W}}^{(3)}+\ldots)| \leqq \alpha_{18}\Omega\mathcal{O},$$

der nach (87) die Beziehungen

$$(91')\quad \left|\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial x}\right| = \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{W}^{(2)}+\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x}\dot{\mathfrak{W}}^{(2)}+\frac{\partial}{\partial x}\dot{\mathfrak{W}}^{(3)}+\ldots\right)\right|, \ldots \leqq \alpha_{18}\Omega$$

gegenüberstehen.

Betrachten wir der Vollständigkeit halber die Ausdrücke

$$(92)\quad \mathfrak{W}_1 = \int_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}d\tau_1' \text{ und } \dot{\mathfrak{W}}_1 = \int_{\dot{T}_1}\chi'\frac{1}{\dot{\varrho}_1}d\dot{\tau}_1' \quad (\dot{\varrho}^2 = (\dot{x}'-\dot{x})^2+(\dot{y}'-\dot{y})^2+(\dot{z}'-\dot{z})^2).$$

Wie man leicht feststellt, ist das Newtonsche Potential $\mathfrak{W}_1$, als Funktion von x, y, z aufgefaßt, in $T+S$ nebst seinen partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. Ferner gilt in $T+S$

$$(93)\qquad |\mathfrak{W}_1| \leqq \alpha_{19}, \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{W}_1\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{W}_1\right|, \left|\frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{W}_1\right| \leqq \alpha_{20} r,$$

somit

$$(93')\qquad \left|\int_{T_1}\chi'\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{{}_0\varrho_1}\right)d\tau_1'\right| \leqq \sqrt{3}\,\alpha_{20}r^2, \quad {}_0\varrho_1^2 = x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2.$$

Des weiteren ist

$$(94)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{W}_1-\dot{\mathfrak{W}}_1)\right|, \ldots \leqq \alpha_{21} r\mathcal{O},$$
$$|\mathfrak{W}_1-\dot{\mathfrak{W}}_1| \leqq \alpha_{22}\mathcal{O}.$$

Bei den vorstehenden Betrachtungen spielt das Cauchysche Integral eine wesentliche Rolle. Ich habe mich dieses Hilfsmittels seit 1925 in meinen Arbeiten zur Hydrodynamik und zur Figur der Himmelskörper vielfach bedient[50]).

---

[50]) Vgl. auch meine Monographie, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen, Berlin 1931, S. 117–118 sowie S. 122–127.

Zweites Kapitel.

Nichthomogene Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft von homogenen.

§ 1.

Der reguläre Fall. Grundgleichungen.

Der Übersichtlichkeit halber wollen wir der Untersuchung der allgemeinen Integro-Differentialgleichung (47) I eine Behandlung des wichtigen Spezialfalles einer homogenen Gleichgewichtsfigur als Ausgangsfigur vorausschicken und nehmen demgemäß f konstant, mithin $\frac{\partial f}{\partial \nu} \equiv 0$ an. Die Gleichung (47) I erhält jetzt, wenn wir der Deutlichkeit halber $\psi(\tau), \zeta(\tau)$ statt ψ, ζ schreiben, die Gestalt (vgl. die Formel (48) I)

$$(1)\quad \psi(\tau)\zeta(\tau) + \int_S f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = s(\tau) - \alpha \int_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\lambda\zeta(ax + by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots).$$ [51]

Sie gilt für alle τ in $T + S$. Rechter Hand ist $s(\tau)$ eine zunächst noch beliebige stetige Funktion von τ. Im Einklang mit den auf S. 499 eingeführten Bezeichnungen möge von nun an ${}_0\varrho_1$ den Abstand des Punktes P_1' in $T_1 + S_1$ vom Koordinatenursprung O, ${}_0s, {}_0\psi, {}_0\zeta$ die Werte von s, ψ, ζ in O bedeuten. Für $\tau \to O$ folgt nunmehr aus (1), da ${}_0\psi = {}_0\zeta = 0$ ist,

$$(2)\quad \int_S f' \frac{1}{{}_0\varrho} \zeta' d\sigma' = {}_0s - \alpha \int_{T_1} \chi' \frac{1}{{}_0\varrho_1} d\tau_1' - \frac{1}{\varkappa}({}_0\mathfrak{W}^{(2)} + {}_0\mathfrak{W}^{(3)} + \ldots),$$

darum

$$(3)\quad \psi(\tau)\zeta(\tau) + \int_S f' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) \zeta' d\sigma' = s(\tau) - {}_0s - \alpha \int_{T_1} \chi' \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\right) d\tau_1' - \lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\lambda\zeta(ax + by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - {}_0\mathfrak{W}^{(3)} - \ldots).$$

Läßt man τ gegen σ auf S konvergieren, so gibt (1)

$$(4)\quad \psi(\sigma)\zeta(\sigma) + \int_S f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' = s(1) - \alpha \int_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\lambda\zeta(aX + bY) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots).$$

Es ist zu beachten, daß hier linker und rechter Hand überall der Aufpunkt der Punkt $\sigma = (X, Y, Z)$ auf S ist.

---

[51]) Vgl. die Fußnote [36]).

In den beiden ersten Abhandlungen dieser Reihe hatten wir wiederholt Gelegenheit, uns mit der homogenen Integralgleichung

$$\psi(\sigma)\zeta(\sigma)+\int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma'=0 \tag{5}$$

zu beschäftigen[52]). Wie a. a. O. festgestellt worden ist, hat (5) stets die triviale Nullösung

$$u_1=c\left(-\int_S\frac{1}{f}\psi c^2 d\sigma\right)^{-\frac{1}{2}},\qquad \int_S\frac{1}{f}\psi u_1^2 d\sigma=-1. \tag{6}$$

Ist T kein Rotationskörper um die z-Achse, so hat (5) eine weitere triviale Nullösung

$$u_2=R\cos\mathfrak{p}\left(-\int_S\frac{1}{f}\psi R^2\cos^2\mathfrak{p}\,d\sigma\right)^{-\frac{1}{2}},\qquad \int_S\frac{1}{f}\psi u_2^2 d\sigma=-1. \tag{7}$$

[53]) [54])

Ist T ein Rotationskörper, so wird im folgenden $u_2\equiv 0$ gesetzt.

Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst einmal an, daß (5) keine weiteren Nullösungen hat (der reguläre Fall), und setzen

$$f'\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{f}\psi\psi'(u_1u_1'+u_2u_2')+f'N(\sigma,\sigma'), \tag{8}$$

in naheliegender ausführlicher Schreibweise

$$f(\sigma')\frac{1}{\varrho(\sigma,\sigma')}=\frac{1}{f(\sigma)}\psi(\sigma)\psi(\sigma')(u_1(\sigma)u_1(\sigma')+u_2(\sigma)u_2(\sigma'))+f(\sigma')N(\sigma,\sigma').$$ [55])

Nach bekannten Sätzen hat die Integralgleichung

$$\psi(\sigma)\zeta(\sigma)+\int_S f'N\zeta' d\sigma'=0 \tag{9}$$

keine Nullösungen mehr. Führt man die Beziehung (8) in (4) ein und beachtet, daß aus Gründen der Symmetrie

$$\int_S\psi' u_1'\zeta' d\sigma'=0,\qquad \int_S\psi' u_2'\zeta' d\sigma'=0 \tag{10}$$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned}\psi(\sigma)\zeta(\sigma)+\int_S f'N(\sigma,\sigma')\zeta' d\sigma' &= s(\mathfrak{l})-\alpha\int_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}d\tau_1'-\lambda R^2-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2)\\ &\quad -2\lambda\zeta(aX+bY)-\frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots).\end{aligned} \tag{11}$$

---

[52]) Wir gebrauchen der Übersichtlichkeit halber diesmal, wo es sich um Ortsfunktionen auf S handelt, ausdrücklich die Bezeichnung $\psi(\sigma)$, $\zeta(\sigma)$.

[53]) Vgl. etwa die in der Fußnote [1]) an zweiter Stelle genannte Arbeit, S. 147–149.

[54]) Lassen wir vorübergehend T um die z-Achse rotieren. In (6) bezeichnet R den Radius des von σ beschriebenen Kreises, $\mathfrak{p}$ den von der Bahntangente mit (ν) eingeschlossenen Winkel.

[55]) Man beachte, daß $f(\sigma')=f(\sigma)$ konstant ist. In (8) hat N dieselbe Bedeutung wie die in den beiden ersten Abhandlungen ebenso bezeichnete Größe.

Es sei

$$s(\mathfrak{r}) = {}_0s + h\,\mathfrak{r}^2 f(\mathfrak{r})$$

gesetzt, unter $f(\mathfrak{r})$ eine vorgegebene, nebst ihrer Ableitung stetige Funktion von $\mathfrak{r}$ mit $f(1) \neq 0$, unter ${}_0s$ einen zunächst noch nicht bekannten Wert, unter h einen zu bestimmenden Koeffizienten verstanden. Die Gleichung (3) nimmt damit die Form

$$(12)\qquad \psi(\tau)\zeta(\tau) = -\int_S f'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right)\zeta'\,d\sigma' + h\,\mathfrak{r}^2 f(\mathfrak{r}) - \alpha\int_{T_1}\chi'\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\right)d\tau_1'$$

$$-\lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - {}_0\mathfrak{W}^{(3)} - \ldots)$$

an.

§ 2.

Sukzessive Näherungen.

Das System (11) und (12) wird durch sukzessive Approximationen gelöst. Wir beginnen mit der ersten Näherung $\overset{1}{\zeta}(\tau)$. Die Werte $\overset{1}{\zeta}(\sigma)$ auf S bestimmen sich aus der Gleichung

$$(13)\quad \psi(\sigma)\overset{1}{\zeta}(\sigma) + \int_S f' N(\sigma,\sigma')\overset{1}{\zeta}(\sigma')\,d\sigma' = s(1) - \alpha\int_T \chi'\frac{1}{\varrho(\sigma,\tau')}d\tau' - \lambda R^2$$

zu

$$(14)\qquad \overset{1}{\zeta}(\sigma) = \frac{s(1)}{\psi(\sigma)} - \lambda\frac{R^2}{\psi(\sigma)} - \frac{\alpha}{\psi(\sigma)}\int_T \chi'\frac{1}{\varrho(\sigma,\tau')}d\tau'$$

$$-\int_S H(\sigma,\sigma')\left[\frac{s(1)}{\psi(\sigma')} - \frac{\alpha}{\psi(\sigma')}\int_T \chi''\frac{1}{\varrho(\sigma',\tau'')}d\tau'' - \lambda\frac{R'^2}{\psi(\sigma')}\right]d\sigma',$$

unter $H(\sigma,\sigma')$ den zu $\frac{1}{\psi}f'N(\sigma,\sigma')$ gehörenden lösenden Kern verstanden. Wie sich unschwer zeigen läßt, ist $\overset{1}{\zeta}(\sigma)$ auf S in bezug auf die Symmetrieebenen von T symmetrisch[56]).

Nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie erfüllt der Integralausdruck

$$\int_S f' N(\sigma,\sigma')\overset{1}{\zeta}{}'\,d\sigma' = \int_S f'\frac{1}{\varrho}\overset{1}{\zeta}{}'\,d\sigma'$$ [57])

eine H-Bedingung mit einem beliebigen Exponenten $\mu < 1$. Da $\psi(\sigma)$ und R^2 auf S stetige Ableitungen erster Ordnung haben, so erfüllt

$$(15)\quad \overset{1}{\zeta}(\sigma) = \frac{1}{\psi(\sigma)}(s(1) - \lambda R^2) - \frac{\alpha}{\psi(\sigma)}\int_T \chi'\frac{1}{\varrho(\sigma,\tau')}d\tau' - \frac{1}{\psi(\sigma)}\int_S f'\frac{1}{\varrho}\overset{1}{\zeta}{}'\,d\sigma'$$

---

[56]) Man vergleiche die in der Fußnote [1]) an zweiter Stelle genannte Abhandlung, wo sich auf S. 164–165 ähnliche Betrachtungen finden.

[57]) Man beachte, daß $\int_S \psi' u_1' \overset{1}{\zeta}{}'\,d\sigma' = \int_S \psi' u_2' \overset{1}{\zeta}{}'\,d\sigma' = 0$ ist.

gewiß ebenfalls eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ. Jetzt hat aber $\int_S f' \frac{1}{\varrho} \overset{1}{\zeta}' d\sigma'$ auf S gewiß stetige Ableitungen erster Ordnung, und aus (15) folgt endgültig, daß auch $\overset{1}{\zeta}(\sigma)$ auf S stetige Ableitungen erster Ordnung hat[58]).

Wir setzen nunmehr

$$(16) \qquad {}_0\overset{1}{\delta} = \int_S f' \frac{1}{{}_0\varrho} \overset{1}{\zeta}' d\sigma' + \alpha \int_T \chi' \frac{1}{{}_0\varrho} d\tau', \qquad \overset{1}{h} = \frac{\delta(1) - {}_0\overset{1}{\delta}}{1^2 \mathfrak{f}(1)}$$

und bestimmen $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ in T durch

$$(17) \quad \psi(\tau)\overset{1}{\zeta}(\tau) = -\int_S f' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) \overset{1}{\zeta}' d\sigma' + \overset{1}{h} \mathfrak{r}^2 \mathfrak{f}(\mathfrak{r}) - \alpha \int_T \chi' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\tau' - \lambda R$$

Augenscheinlich ist $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ in T in bezug auf die Symmetrieebenen von T symmetrisch. Die rechte Seite der Gleichung (17) stellt eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Ortsfunktion in $T+S$ dar. Man überzeugt sich ohne Mühe, daß diese partiellen Ableitungen in O wie r verschwinden, demnach die betrachtete Funktion selbst, die ja in O verschwindet, sich in der Umgebung dieses Punktes wie r^2 verhält. Nach Voraussetzung verschwindet $\psi(\tau)$ in O wie $\mathfrak{r}$ oder, was dasselbe ist, wie r;[59]) darum hat $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ in T beschränkte, höchstens mit Ausnahme des Koordinatenursprungs stetige Ableitungen erster Ordnung und verschwindet für $r \to 0$. Man überzeugt sich jetzt leicht an Hand der Beziehung (16), daß auf S die beiden Formeln (13) und (17) zu den gleichen Werten $\overset{1}{\zeta}(\sigma)$ führen[57]), darum $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ in $T+S$ beschränkte und, außer höchstens in O, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat.

Es sei $\overset{1}{T}$ das durch die Transformation $(x, y, z) \to (x+a\overset{1}{\zeta},\ y+b\overset{1}{\zeta},\ z+c\overset{1}{\zeta})$ vermittelte Bild von T. Wir bezeichnen mit $\overset{1}{\varrho}$, ${}_0\overset{1}{\varrho}$, $\overset{1}{\mathfrak{W}}^{(2)}$, $\overset{1}{\mathfrak{W}}^{(3)}$, ..., ${}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}^{(2)}$, ${}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}^{(3)}$, ... das, was man erhält, wenn man in ϱ_1, ${}_0\varrho_1$, $\mathfrak{W}^{(2)}$, $\mathfrak{W}^{(3)}$, ..., ${}_0\mathfrak{W}^{(2)}$, ${}_0\mathfrak{W}^{(3)}$, ... ζ durch $\overset{1}{\zeta}$ ersetzt, und bestimmen die zweite Annäherung $\overset{2}{\zeta}(\sigma)$ auf S aus der Gleichung

---

[58]) Man vergleiche etwa meine in der Fußnote [1]) an zweiter Stelle genannte Arbeit, S. 159–160, wo es sich um analoge Betrachtungen handelt.

[59]) Präziser: $\left|\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|$ hat in der Umgebung des Koordinatenursprunges eine von Null verschiedene untere Grenze.

$$(18)\quad \psi(\sigma)\overset{2}{\zeta}(\sigma)+\int_S f' N(\sigma,\sigma')\overset{2}{\zeta}' d\sigma' = s(1)-\alpha\int_T \chi'\frac{1}{\overset{1}{\varrho}}d\overset{1}{\tau}' - \lambda R^2$$

$$-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(\overset{1}{\zeta})^2(a^2+b^2)-2\lambda\overset{1}{\zeta}(aX+bY)-\frac{1}{\varkappa}(\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)}+\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)}+\ldots)$$

$$= s(1)-\alpha\int_T \chi'\frac{1}{\overset{1}{\varrho}}d\overset{1}{\tau}' - \lambda R^2 + \Pi\{\lambda,\overset{1}{\zeta}\}$$

zu

$$(19)\quad \overset{2}{\zeta}(\sigma)=\frac{1}{\psi(\sigma)}s(1)-\frac{\alpha}{\psi(\sigma)}\int_T \chi'\frac{1}{\overset{1}{\varrho}}d\overset{1}{\tau}' - \frac{\lambda}{\psi(\sigma)}R^2+\frac{1}{\psi(\sigma)}\Pi\{\lambda,\overset{1}{\zeta}\}$$

$$-\int_S H(\sigma,\sigma')\frac{1}{\psi(\sigma')}\Big[s(1)-\alpha\int_T \chi''\frac{1}{\overset{1}{\varrho}(\sigma',\overset{1}{\tau}'')}d\overset{1}{\tau}'' - \lambda R'^2+\Pi'\{\lambda,\overset{1}{\zeta}'\}\Big]d\sigma'.$$

Wir setzen nunmehr

$$(20)\quad {}_0\overset{2}{s}=\int_S f'\frac{1}{{}_0\varrho}\overset{2}{\zeta}'d\sigma'+\alpha\int_T \chi'\frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}}d\overset{1}{\tau}'+\frac{1}{\varkappa}({}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)}+{}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)}+\ldots),\quad \overset{2}{h}=\frac{s(1)-{}_0\overset{2}{s}}{\mathfrak{f}^2\mathfrak{f}(1)}$$

und bestimmen $\overset{2}{\zeta}(\tau)$ in T aus

$$\psi(\tau)\overset{2}{\zeta}(\tau)=-\int_S f'\Big(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\overset{2}{\zeta}'d\sigma'+\overset{2}{h}\mathfrak{r}^2\mathfrak{f}(\mathfrak{r})-\alpha\int_T \chi'\Big(\frac{1}{\overset{1}{\varrho}}-\frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}}\Big)d\overset{1}{\tau}'$$

$$R^2-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(\overset{1}{\zeta})^2(a^2+b^2)-2\lambda\overset{1}{\zeta}(ax+by)-\frac{1}{\varkappa}(\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)}+\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)}+\ldots-{}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)}-{}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)}-\ldots$$

$$-\int_S f'\Big(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\overset{2}{\zeta}'d\sigma'+\overset{2}{h}\mathfrak{r}^2\mathfrak{f}(\mathfrak{r})-\alpha\int_T \chi'\Big(\frac{1}{\overset{1}{\varrho}}-\frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}}\Big)d\overset{1}{\tau}'-\lambda R^2+\Pi\{\lambda,\overset{1}{\zeta}\}-{}_0\Pi\{\lambda,\overset{1}{\zeta}\}.$$ [60]

Wie man sich ohne Mühe überzeugt, ist $\overset{2}{\zeta}(\sigma)$ auf S,[61] darum auch $\overset{2}{\zeta}(\tau)$ in T in bezug auf die Symmetrieebenen von T symmetrisch. Wegen (20) führen die Beziehungen (18) und (21) zu den gleichen Werten $\overset{2}{\zeta}(\sigma)$.[62] Wie auf S. 510 kann man leicht zeigen, daß $\overset{2}{\zeta}(\tau)$ in $T+S$ beschränkte und, außer höchstens in O, stetige Ableitungen erster Ordnung hat.

Die Funktion

$$-\int_S f'\Big(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\overset{2}{\zeta}'d\sigma'+\overset{2}{h}\mathfrak{r}^2\mathfrak{f}(\mathfrak{r})-\lambda R^2-\alpha\int_T \chi'\Big(\frac{1}{\overset{1}{\varrho}}-\frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}}\Big)d\overset{1}{\tau}'+\Pi\{\lambda,\overset{1}{\zeta}\}-{}_0\Pi\{\lambda,\overset{1}{\zeta}\}$$

---

[60]) Wir bezeichnen zur Abkürzung mit ${}_0\Pi\{\lambda,\overset{1}{\zeta}\}$ den Wert von $\Pi\{\lambda,\overset{1}{\zeta}\}$ im Koordinatenursprunge.

[61]) Vgl. etwa die zweite Abhandlung dieser Reihe, S. 164–165, wo es sich um analoge Betrachtungen handelt.

[62]) Man berücksichtige, daß $\int_S \psi'\overset{2}{\zeta}'u_1'd\sigma'=\int_S \psi'\overset{2}{\zeta}'u_2'd\sigma'=0$ gilt.

stellt eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Ortsfunktion in $T+S$ dar. Diese partiellen Ableitungen verschwinden in O wie r, demnach verhält sich die betrachtete Funktion selbst in der Umgebung des Koordinatenursprunges wie r^2. Daß die ersten drei Summanden in (22) diese Eigenschaft haben, liegt auf der Hand. Das Volumpotential $\int\limits_{\overset{1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{1}{\varrho}} d\overset{1}{\tau}'$ hat, als Funktion von $\overset{1}{x}, \overset{1}{y}, \overset{1}{z}$ $(\overset{1}{x} = x + a\overset{1}{\zeta},\ \overset{1}{y} = y + b\overset{1}{\zeta},$ $\overset{1}{z} = z + c\overset{1}{\zeta})$ aufgefaßt, gewiß stetige Ableitungen zweiter Ordnung in $\overset{1}{K} + \overset{1}{C}$ (dem Bilde von $K + C$ [63])). Aus Gründen der Symmetrie ist in O:

$$\frac{\partial}{\partial \overset{1}{x}} \int\limits_{\overset{1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{1}{\varrho}} d\overset{1}{\tau}' = \frac{\partial}{\partial \overset{1}{y}} \int\limits_{\overset{1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{1}{\varrho}} d\overset{1}{\tau}' = \frac{\partial}{\partial \overset{1}{z}} \int\limits_{\overset{1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{1}{\varrho}} d\overset{1}{\tau}' = 0:$$

demnach ist in $\overset{1}{K} + \overset{1}{C}$ beispielsweise

$$\frac{\partial}{\partial \overset{1}{x}} \int\limits_{\overset{1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{1}{\varrho}} d\overset{1}{\tau}' = O(\overset{1}{r}), \qquad \overset{1}{r}{}^2 = (\overset{1}{x})^2 + (\overset{1}{y})^2 + (\overset{1}{z})^2.$$

Hieraus und aus den analogen Beziehungen für $\frac{\partial}{\partial \overset{1}{y}} \int\limits_{\overset{1}{T}}$, $\frac{\partial}{\partial \overset{1}{z}} \int\limits_{\overset{1}{T}}$ folgt leicht

$$(23)\quad \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\overset{1}{T}} \chi' \left(\frac{1}{\overset{1}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}}\right) d\overset{1}{\tau}',\quad \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{\overset{1}{T}} \chi' \left(\frac{1}{\overset{1}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}}\right) d\overset{1}{\tau}',\quad \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{\overset{1}{T}} \chi' \left(\frac{1}{\overset{1}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}}\right) d\overset{1}{\tau}' = O(r$$

Die Beziehung

$$\int\limits_{\overset{1}{T}} \chi' \left(\frac{1}{\overset{1}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}}\right) d\overset{1}{\tau}' = O(r^2)$$

ist eine unmittelbare Folge von (23).

Betrachten wir schließlich den Ausdruck

$$\Pi\{\lambda, \overset{1}{\zeta}\} - {}_0\Pi\{\lambda, \overset{1}{\zeta}\} = -\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}(\overset{1}{\zeta})^2(a^2 + b^2) - 2\lambda\overset{1}{\zeta}(ax + by)$$
$$- \frac{1}{\varkappa}(\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + \overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \ldots) + \frac{1}{\varkappa}({}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + {}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \ldots).$$

Daß die beiden ersten Summanden rechts das in Frage kommende Verhalten haben, liegt auf der Hand; was aber die Differenz

$$(\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + \overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \ldots) - ({}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + {}_0\overset{1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \ldots)$$

---

[63]) Es sei daran erinnert, daß $K + C$ einen Kugelkörper um O als Mittelpunkt bezeichnet und daß χ in $K + C$ gewiß einer H-Bedingung genügt. Offenbar erfüllt χ, als Funktion von $\overset{1}{x}, \overset{1}{y}, \overset{1}{z}$ aufgefaßt, in $\overset{1}{K} + \overset{1}{C}$ ebenfalls eine H-Bedingung.

betrifft, so folgt dies aus den Betrachtungen des vorhergehenden Kapitels (vgl. die Gleichungen (55) I und (56) I). Damit ist unsere Behauptung betreffend den Ausdruck (22) bewiesen. Kehrt man jetzt zu der Formel (21) zurück, so findet man sogleich, daß $\overset{2}{\zeta}(\tau)$ sich in $T+S$ stetig verhält, in O verschwindet und beschränkte, höchstens mit Ausnahme des Koordinatenursprunges stetige Ableitungen erster Ordnung hat.

Wir gehen nunmehr zu der dritten Näherung $\overset{3}{\zeta}$ über. Ihr Wert auf S bestimmt sich in naheliegender Schreibweise aus

$$\psi(\sigma)\overset{3}{\zeta}(\sigma)+\int_S f' N(\sigma,\sigma')\overset{3}{\zeta}' d\sigma' = s(1)-\alpha\int_{\overset{2}{T}}\chi'\frac{1}{\overset{2}{\varrho}}d\overset{2}{\tau}'-\lambda R^2+\Pi\{\lambda,\overset{2}{\zeta}\} \tag{24}$$

zu

$$\overset{3}{\zeta}(\sigma)=\frac{1}{\psi(\sigma)}\Big[s(1)-\alpha\int_{\overset{2}{T}}\chi'\frac{1}{\overset{2}{\varrho}}d\overset{2}{\tau}'-\lambda R^2+\Pi\{\lambda,\overset{2}{\zeta}\}\Big] \tag{25}$$

$$-\int_S H(\sigma,\sigma')\frac{1}{\psi(\sigma')}\Big[s(1)-\alpha\int_{\overset{2}{T}}\chi''\frac{1}{\overset{2}{\varrho}(\sigma',\overset{2}{\tau}'')}d\overset{2}{\tau}''-\lambda R'^2+\Pi'\{\lambda,\overset{2}{\zeta}'\}\Big]d\sigma'.$$

Wir setzen

$${}_0\overset{3}{s}=\int_S f'\frac{1}{{}_0\overset{2}{\varrho}}\overset{3}{\zeta}'d\sigma'+\alpha\int_{\overset{2}{T}}\chi'\frac{1}{{}_0\overset{2}{\varrho}}d\overset{2}{\tau}'+\frac{1}{\varkappa}({}_0\overset{2}{\mathfrak{W}}{}^{(2)}+{}_0\overset{2}{\mathfrak{W}}{}^{(3)}+\ldots),\quad \overset{3}{h}=\frac{s(1)-{}_0\overset{3}{s}}{\mathfrak{r}^2 f(1)} \tag{26}$$

und bestimmen $\overset{3}{\zeta}(\tau)$ in T aus

$$\psi(\tau)\overset{3}{\zeta}(\tau)=-\int_S f'\Big(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\overset{3}{\zeta}'d\sigma'+\overset{3}{h}\mathfrak{r}^2 f(\mathfrak{r})-\alpha\int_{\overset{2}{T}}\chi'\Big(\frac{1}{\overset{2}{\varrho}}-\frac{1}{{}_0\overset{2}{\varrho}}\Big)d\overset{2}{\tau}' \tag{27}$$

$$-\lambda R^2+\Pi\{\lambda,\overset{2}{\zeta}\}-{}_0\Pi\{\lambda,\overset{2}{\zeta}\}.$$

Eine sinngemäße Wiederholung der auf S. 511 durchgeführten Betrachtungen lehrt, daß $\overset{3}{\zeta}(\tau)$ sich ganz ähnlich wie $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ und $\overset{2}{\zeta}(\tau)$ verhält.

Man geht so weiter und findet für die n-te Näherung $\overset{n}{\zeta}(\tau)$ die Formeln

$$\psi(\sigma)\overset{n}{\zeta}(\sigma)+\int_S f' N(\sigma,\sigma')\overset{n}{\zeta}'d\sigma' = s(1)-\alpha\int_{\overset{n-1}{T}}\chi'\frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}}d\overset{n-1}{\tau}'-\lambda R^2+\Pi\{\lambda,\overset{n-1}{\zeta}\}, \tag{28}$$

$$\overset{n}{\zeta}(\sigma)=\frac{1}{\psi(\sigma)}\Big[s(1)-\alpha\int_{\overset{n-1}{T}}\chi'\frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}}d\overset{n-1}{\tau}'-\lambda R^2+\Pi\{\lambda,\overset{n-1}{\zeta}\}\Big] \tag{29}$$

$$-\int_S H(\sigma,\sigma')\frac{1}{\psi(\sigma')}\Big[s(1)-\alpha\int_{\overset{n-1}{T}}\chi''\frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}(\sigma',\overset{n-1}{\tau}'')}d\overset{n-1}{\tau}''-\lambda R'^2+\Pi'\{\lambda,\overset{n-1}{\zeta}'\}\Big]d\sigma',$$

$$(30)\quad {}_0^n s = \int_S f' \frac{1}{{}_0\varrho}\, {}^n\zeta'\, d\sigma' + \alpha \int_{{}^{n-1}T^1} \chi' \frac{1}{{}^{n-1}_0\varrho}\, d\,{}^{n-1}\tau' + \frac{1}{\varkappa}\left({}_0^{n-1}\mathfrak{W}^{(2)} + {}_0^{n-1}\mathfrak{W}^{(3)} + \ldots\right),\quad {}^n h = \frac{s(\mathrm{I}) - }{\mathfrak{r}^2 \mathfrak{f}(\mathfrak{r})}$$

$$(31)\quad \psi(\tau)\,{}^n\zeta(\tau) = -\int_S f'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right){}^n\zeta'\, d\sigma' + {}^n h\, \mathfrak{r}^2 \mathfrak{f}(\mathfrak{r}) - \alpha \int_{{}^{n-1}T^1} \chi' \left(\frac{1}{{}^{n-1}\varrho} - \frac{1}{{}^{n-1}_0\varrho}\right) d\,{}^{n-1}\tau'$$
$$- \lambda R^2 + \Pi\{\lambda, {}^{n-1}\zeta\} - {}_0\Pi\{\lambda, {}^{n-1}\zeta\}.$$

§ 3.

Konvergenzbeweis.

Der Iterationsprozeß kann, wenn man $|\alpha|$, $|\lambda|$ und $|s(\mathrm{I})|$ hinreichend klein annimmt, beliebig fortgesetzt werden. Die Näherungsfunktionen ${}^n\zeta(\tau)$ konvergieren gleichmäßig gegen eine in $T+S$ stetige, in O verschwindende Funktion $\zeta(\tau)$, die in $T+S$ beschränkte und, höchstens mit Ausnahme des Koordinatenursprunges, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat und die Integro-Differentialgleichung (12) befriedigt.

Dies alles wollen wir jetzt zeigen.

Es sei

$$(32)\quad \bar{\Omega} = \text{ob. Grenze}\left\{\left|\frac{\partial\, {}^{n-1}\zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\, {}^{n-1}\zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\, {}^{n-1}\zeta}{\partial z}\right|\right\} \text{ in } T+S,\quad \bar{\Omega}_1 = \mathrm{Max}\{|s(\mathrm{I})|, |\alpha|,$$

Da ${}^{n-1}\zeta$ in O verschwindet, so ist gewiß

$$(33)\qquad |{}^{n-1}\zeta| \leqq \sqrt{3}\, r\, \bar{\Omega}.$$

Den Ergebnissen auf S. 506 zufolge ist, sofern $\bar{\Omega} \leqq \frac{\varepsilon}{4}$ angenommen wird (vgl. (93) I), für alle τ in $T+S$

$$(34)\quad \left|\int_{{}^{n-1}T^1} \chi' \frac{1}{{}^{n-1}\varrho}\, d\,{}^{n-1}\tau'\right| \leqq \alpha_{23};\quad \left|\frac{\partial}{\partial x}\int_{{}^{n-1}T^1} \chi' \frac{1}{{}^{n-1}\varrho}\, d\,{}^{n-1}\tau'\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y}\int_{{}^{n-1}T^1} \chi' \frac{1}{{}^{n-1}\varrho}\, d\,{}^{n-1}\tau'\right|, \left|\frac{\partial}{\partial z}\int_{{}^{n-1}T^1} \chi' \frac{1}{{}^{n-1}\varrho}\, d\,{}^{n-1}\tau'\right| \leqq$$

somit speziell auf S

$$(35)\quad \left|\int_{{}^{n-1}T^1} \chi' \frac{1}{{}^{n-1}\varrho}\, d\,{}^{n-1}\tau'\right| \leqq \alpha_{23},\quad \left|\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{{}^{n-1}T^1} \chi' \frac{1}{{}^{n-1}\varrho}\, d\,{}^{n-1}\tau'\right|, \left|\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{{}^{n-1}T^1} \chi' \frac{1}{{}^{n-1}\varrho}\, d\,{}^{n-1}\tau'\right| \leqq \alpha_{25}.$$

Es gilt weiter (vgl. (90) I und (90′) I) für alle τ in $T+S$

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\left|{}^{n-1}\mathfrak{W}^{(2)} + {}^{n-1}\mathfrak{W}^{(3)} + \ldots\right| \leqq \alpha_{17}\, \bar{\Omega}^2, \\ &\left|\frac{\partial}{\partial x}\,{}^{n-1}\mathfrak{W}^{(2)} + \frac{\partial}{\partial x}\,{}^{n-1}\mathfrak{W}^{(3)} + \ldots\right|, \ldots \leqq \alpha_6\, r\, \bar{\Omega}^2; \end{aligned}$$

sodann

$$(37)\quad \begin{gathered} ({}^{n-1}\zeta)^2(a^2+b^2) \leqq \alpha_{26}\bar{\Omega}^2 r^2, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(({}^{n-1}\zeta)^2(a^2+b^2)\right)\right|, \ \ldots \leqq \alpha_{27}\bar{\Omega}^2 r,{}^{64}) \\ \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\,{}^{n-1}\zeta(ax+by)\right)\right|, \ \ldots \leqq \alpha_{28}\bar{\Omega}\bar{\Omega}_1 r, \quad |\lambda\,{}^{n-1}\zeta(ax+by)| \leqq \alpha_{29} r^2 \bar{\Omega}\bar{\Omega}_1, \end{gathered}$$

darum zunächst auf S

$$(38)\quad |\Pi\{\lambda, {}^{n-1}\zeta\}|, \ \left|\frac{\partial}{\partial\xi}\Pi\{\lambda, {}^{n-1}\zeta\}\right|, \ \left|\frac{\partial}{\partial\eta}\Pi\{\lambda, {}^{n-1}\zeta\}\right| \leqq \bar{\Omega}(\alpha_{30}\bar{\Omega} + \alpha_{31}\bar{\Omega}_1).$$

Bezeichnet man vorübergehend den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (28) mit ${}^{n-1}\Pi$, so gilt

$$(39)\quad |{}^{n-1}\Pi|, \ \left|\frac{\partial}{\partial\xi}{}^{n-1}\Pi\right|, \ \left|\frac{\partial}{\partial\eta}{}^{n-1}\Pi\right| \leqq \alpha_{32}\bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}(\alpha_{30}\bar{\Omega} + \alpha_{31}\bar{\Omega}_1).$$

Aus (29) folgt jetzt vor allem

$$(40)\quad |{}^{n}\zeta| \leqq \alpha_{33}\bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}(\alpha_{34}\bar{\Omega} + \alpha_{35}\bar{\Omega}_1) \text{ auf } S.$$

Dem auf S. 509 benutzten potentialtheoretischen Hilfssatze zufolge erfüllt

$$(41)\quad \int_S f' N(\sigma, \sigma')\,{}^{n}\zeta'\,d\sigma' = \int_S f'\,\frac{1}{\varrho}\,{}^{n}\zeta'\,d\sigma'$$

auf S eine H-Bedingung mit einem beliebigen Exponenten $\mu < 1$. Für den zugehörigen Hölderschen Koeffizienten erhält man dabei eine Schranke von der Form $(\alpha_{36}\bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}(\alpha_{37}\bar{\Omega} + \alpha_{38}\bar{\Omega}_1))$, wo $\alpha_{36}, \alpha_{37}, \alpha_{38}$ bestimmte Werte haben, sofern, wie wir es annehmen wollen, $\mu < 1$ festgehalten wird. Nach (28) hat ${}^{n}\zeta$ die gleiche Eigenschaft. Nunmehr hat aber der Ausdruck (41) stetige Ableitungen erster Ordnung, so daß nach (28) $\frac{\partial\,{}^{n}\zeta}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\,{}^{n}\zeta}{\partial\eta}$ existieren und sich stetig verhalten. Wir finden so für alle σ auf S

$$(42)\quad \left|\frac{\partial\,{}^{n}\zeta}{\partial\xi}\right|, \ \left|\frac{\partial\,{}^{n}\zeta}{\partial\eta}\right| \leqq \alpha_{39}\bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}(\alpha_{40}\bar{\Omega} + \alpha_{41}\bar{\Omega}_1).$$

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und betrachten die Gleichungen (30) und (31). Wegen (32) und (40) ist zunächst (vgl. S. 506)

$$(43)\quad |{}_{0}{}^{n}s| \leqq \alpha_{42}\bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}(\alpha_{43}\bar{\Omega} + \alpha_{44}\bar{\Omega}_1), \quad |{}^{n}h| \leqq \alpha_{45}\bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}(\alpha_{46}\Omega + \alpha_{47}\Omega_1).$$

Es gilt weiter für alle τ in $T+S$

$$(44)\quad \left|\frac{\partial}{\partial x}\int_S f'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_{0}\varrho}\right){}^{n}\zeta'\,d\sigma'\right|, \ \ldots \leqq r(\alpha_{48}\bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}(\alpha_{49}\bar{\Omega} + \alpha_{50}\bar{\Omega}_1))$$

---

64) Man beachte, daß $\frac{\partial a}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial c}{\partial z}$ sich wie $O(r^{-1})$ verhalten (s. S. 489).

und, da $\int\limits_S f'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\right)\overset{n}{\zeta}'\,d\sigma'$ in O verschwindet,

$$(45)\qquad \left|\int\limits_S f'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\right)\overset{n}{\zeta}'\,d\sigma'\right| \leqq \sqrt{3}\,r^2(\alpha_{48}\,\overline{\Omega}_1+\overline{\Omega}\,(\alpha_{49}\,\overline{\Omega}+\alpha_{50}\,\overline{\Omega}_1)).^{65})$$

Den Entwicklungen in § 4 I zufolge ist (vgl. (93) I und (93′) I)

$$(46)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\overset{n-1}{T}} \chi'\left(\frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}}-\frac{1}{{}_0\overset{n-1}{\varrho}}\right)d\overset{n-1}{\tau'}\right|,\ \ldots \leqq \alpha_{20}\,r,\quad \left|\int\limits_{\overset{n-1}{T}} \chi'\left(\frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}}-\frac{1}{{}_0\overset{n-1}{\varrho}}\right)d\overset{n-1}{\tau'}\right| \leqq \sqrt{3}\,\alpha_{20}\,r^2$$

und

$$(47)\qquad \begin{gathered}\left|\frac{\partial}{\partial x}\Pi\{\lambda,\overset{n-1}{\zeta}\}\right|,\ \ldots \leqq r\,\overline{\Omega}\,(\alpha_{51}\,\overline{\Omega}+\alpha_{52}\,\overline{\Omega}_1),\\ |\Pi\{\lambda,\overset{n-1}{\zeta}\}-{}_0\Pi\{\lambda,\overset{n-1}{\zeta}\}| \leqq \sqrt{3}\,r^2\,\overline{\Omega}\,(\alpha_{51}\,\overline{\Omega}+\alpha_{52}\,\overline{\Omega}_1).\end{gathered}$$

Aus (31), (44), (45), (43), (46) und (47) folgt schließlich

$$(48)\qquad \left|\frac{\partial\overset{n}{\zeta}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial\overset{n}{\zeta}}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial\overset{n}{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \alpha_{53}\,\overline{\Omega}_1+\overline{\Omega}\,(\alpha_{54}\,\overline{\Omega}+\alpha_{55}\,\overline{\Omega}_1),^{66})$$

und, da $\overset{n}{\zeta}$ in O verschwindet,

$$(49)\qquad |\overset{n}{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,r\,(\alpha_{53}\,\overline{\Omega}_1+\overline{\Omega}\,(\alpha_{54}\,\overline{\Omega}+\alpha_{55}\,\overline{\Omega}_1)).$$

Betrachten wir jetzt die quadratische Gleichung

$$(50)\qquad \pi = \alpha_{53}\,\overline{\Omega}_1+\pi(\alpha_{54}\,\pi+\alpha_{55}\,\overline{\Omega}_1).$$

Ihre beiden Wurzeln sind, wenn $\overline{\Omega}_1$ hinreichend klein ist, reell und positiv, — die kleinere, sie heiße π_*, konvergiert mit $\overline{\Omega}_1$ zugleich gegen Null. Etwa für $|\overline{\Omega}_1| \leqq d_1$ ist darum gewiß $\pi_* \leqq \frac{\varepsilon}{4}$. Wir denken uns α_{53} überdies so groß gewählt, daß

$$(51)\qquad \text{ob. Grenze}\left\{\left|\frac{\partial\overset{1}{\zeta}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial\overset{1}{\zeta}}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial\overset{1}{\zeta}}{\partial z}\right|\right\} \leqq \alpha_{53}\,\overline{\Omega}_1 \leqq \pi_*$$

gilt[67]). Den soeben gewonnenen Ergebnissen (vgl. (32) und (48)) zufolge gilt

$$\text{ob. Grenze}\left\{\left|\frac{\partial\overset{2}{\zeta}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial\overset{2}{\zeta}}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial\overset{2}{\zeta}}{\partial z}\right|\right\} \leqq \alpha_{53}\,\overline{\Omega}_1+\pi_*(\alpha_{54}\,\pi_*+\alpha_{55}\,\overline{\Omega}_1) = \pi_*.$$

---

[65]) Man beachte, daß $\int\limits_S f'\,\frac{1}{\varrho}\,\overset{n}{\zeta}'\,d\sigma'$ sich in $T+S$ nebst seinen partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig verhält und in T stetige Ableitungen zweiter (wie übrigens auch aller höheren) Ordnungen hat. In O sind aus Gründen der Symmetrie die Ableitungen erster Ordnung gleich Null.

[66]) Man beachte, daß ψ sich in der Umgebung des Ursprunges wie r verhält (vgl. die Fußnote [59])).

[67]) Aus unseren früheren auf $\overset{1}{\zeta}$ bezüglichen Betrachtungen (vgl. S. 509–510) folgt, daß dies gewiß möglich ist.

Ebenso finden wir

$$\text{ob. Grenze}\left\{\left|\frac{\partial \overset{3}{\xi}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{3}{\xi}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{3}{\xi}}{\partial z}\right|\right\} \leqq \alpha_{53}\bar{\Omega}_1 + \pi_*(\alpha_{54}\pi_* + \alpha_{55}\bar{\Omega}_1) = \pi_*, \ldots,$$

allgemein für alle n

$$\text{ob. Grenze}\left\{\left|\frac{\partial \overset{n}{\xi}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\xi}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\xi}}{\partial z}\right|\right\} \leqq \pi_*.$$

Damit ist also wegen $\pi_* \leqq \frac{\varepsilon}{4}$ gezeigt, daß, sofern $\text{Max}\{s(1), |\alpha|, |\lambda|\} \leqq d_1$ angenommen wird, die sukzessiven Näherungen beliebig fortgesetzt werden können und für alle n

$$\left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \pi_* \leqq \frac{\varepsilon}{4} \tag{52}$$

gilt.

Nun aber der Konvergenzbeweis.

Es sei zur Abkürzung $\overset{n+1}{\zeta} - \overset{n}{\zeta} = \overset{n}{\delta}$ $(n \geqq 1)$ gesetzt. Aus (28), (30), (31) und den hierzu analogen auf die $(n+1)$-te Annäherung bezüglichen Gleichungen folgt

$$\psi(\sigma)\overset{n}{\delta}(\sigma) + \int_S f' N(\sigma, \sigma')\overset{n}{\delta}' d\sigma' \tag{53}$$

$$= -\alpha\Big[\int_{\overset{n}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{n}{\varrho}} d\overset{n}{\tau}' - \int_{\overset{n-1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}} d\overset{n-1}{\tau}'\Big] + (\Pi\{\lambda, \overset{n}{\zeta}\} - \Pi\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\}) \quad (n > 1),$$

$$\overset{n+1}{{}_0\delta} - \overset{n}{{}_0\delta} = \int_S f' \frac{1}{{}_0\varrho} \overset{n}{\delta}' d\sigma' + \alpha\Big[\int_{\overset{n}{T}} \chi' \frac{1}{{}_0\overset{n}{\varrho}} d\overset{n}{\tau}' - \int_{\overset{n-1}{T}} \chi' \frac{1}{{}_0\overset{n-1}{\varrho}} d\overset{n-1}{\tau}'\Big] \tag{54}$$

$$+ \frac{1}{\varkappa}({}_0\overset{n}{\mathfrak{W}}^{(2)} + {}_0\overset{n}{\mathfrak{W}}^{(3)} + \ldots) - \frac{1}{\varkappa}({}_0\overset{n-1}{\mathfrak{W}}^{(2)} + {}_0\overset{n-1}{\mathfrak{W}}^{(3)} + \ldots),$$

$$\overset{n+1}{h} - \overset{n}{h} = -\frac{\overset{n+1}{{}_0\delta} - \overset{n}{{}_0\delta}}{\mathfrak{r}^2 f(\mathfrak{r})} \tag{55}$$

und schließlich

$$\psi(\tau)\overset{n}{\delta}(\tau) = -\int_S f'\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\overset{n}{\delta}' d\sigma' + (\overset{n+1}{h} - \overset{n}{h})\mathfrak{r}^2 f(\mathfrak{r}) - \alpha\Big(\int_{\overset{n}{T}} \chi'\Big(\frac{1}{\overset{n}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{n}{\varrho}}\Big) d\overset{n}{\tau}' \tag{56}$$

$$- \int_{\overset{n-1}{T}} \chi'\Big(\frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{n-1}{\varrho}}\Big) d\overset{n-1}{\tau}'\Big) + [\Pi\{\lambda, \overset{n}{\zeta}\} - {}_0\Pi\{\lambda, \overset{n}{\zeta}\}] - [\Pi\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\} - {}_0\Pi\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\}].$$

Es möge jetzt für alle τ in $T + S$

$$\left|\frac{\partial \overset{n-1}{\delta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n-1}{\delta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n-1}{\delta}}{\partial z}\right| \leqq \bar{\bar{\sigma}} \tag{57}$$

sein. Da $\overset{n-1}{\delta}$ in O verschwindet, so gilt augenscheinlich für alle τ in $T+S$

$$|\overset{n-1}{\delta}| \leqq \sqrt{3}\, r\, \bar{\sigma}. \tag{58}$$

Durch eine sinngemäße Wiederholung der auf S. 514—515 durchgeführten Betrachtungen erhält man, wie sogleich gezeigt werden soll, ausgehend von den Gleichungen (53) bis (56), gestützt auf die Ergebnisse des § 4 I, nacheinander die Ungleichheiten

$$\left|\overset{n}{\delta}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial \eta}\right| \leqq (\alpha_{56}\pi_* + \alpha_{57} d_1)\,\bar{\sigma} \text{ auf } S, \tag{59}$$

$$|\overset{n+1}{0}\overset{n}{s} - \overset{n}{0}\overset{n}{s}| \leqq (\alpha_{58}\pi_* + \alpha_{59} d_1)\,\bar{\sigma}, \quad |\overset{n+1}{h} - \overset{n}{h}| \leqq (\alpha_{60}\pi_* + \alpha_{61} d_1)\,\bar{\sigma} \tag{60}$$

und schließlich

$$\left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial z}\right| \leqq (\alpha_{62}\pi_* + \alpha_{63} d_1)\,\bar{\sigma} \text{ in } T+S. \tag{61}$$

Wir begnügen uns mit einer Ableitung der Beziehungen (59). Den Entwicklungen auf S. 506 gemäß ist für alle (x, y, z) in $T+S$ (vgl. (94) I)

$$\left|\int_{\overset{n}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{n}{\varrho}}\, d\overset{n}{\tau}' - \int_{\overset{n-1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}}\, d\overset{n-1}{\tau}'\right| \leqq \alpha_{64}\bar{\sigma}; \quad \left|\frac{\partial}{\partial x}\int_{\overset{n}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{n}{\varrho}}\, d\overset{n}{\tau}' - \frac{\partial}{\partial x}\int_{\overset{n-1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}}\, d\overset{n-1}{\tau}'\right|, \ldots \leqq \alpha \tag{62}$$

Den Ergebnissen des § 4 I zufolge ist weiter, wie man leicht sieht,

$$\begin{aligned} &|\Pi\{\lambda, \overset{n}{\zeta}\} - \Pi\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\}| \leqq (\alpha_{66}\pi_* + \alpha_{67}\bar{\Omega}_1)\,\bar{\sigma}, \\ &\left|\frac{\partial}{\partial x}\Pi\{\lambda, \overset{n}{\zeta}\} - \frac{\partial}{\partial x}\Pi\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\}\right|, \ldots \leqq (\alpha_{68}\pi_* + \alpha_{69}\bar{\Omega}_1)\, r\,\bar{\sigma}. \end{aligned} \tag{63}$$

Wird die rechte Seite der Gleichung (53) vorübergehend mit $\Theta\{\overset{n-1}{\zeta}, \overset{n}{\zeta}\}$ bezeichnet, so gilt für alle σ auf S

$$|\Theta|, \left|\frac{\partial}{\partial \xi}\Theta\right|, \left|\frac{\partial}{\partial \eta}\Theta\right| \leqq (\alpha_{70}\pi_* + \alpha_{71}\bar{\Omega}_1)\,\bar{\sigma}. \tag{64}$$

Die lineare Integralgleichung (53) liefert für $\overset{n}{\delta}(\sigma)$ den Ausdruck

$$\overset{n}{\delta}(\sigma) = \frac{1}{\psi(\sigma)}\Theta\{\overset{n-1}{\zeta}, \overset{n}{\zeta}\} - \int_S H(\sigma, \sigma')\frac{1}{\psi(\sigma')}\Theta'\{\overset{n-1}{\zeta'}, \overset{n}{\zeta'}\}\, d\sigma' \tag{65}$$

und somit fast unmittelbar

$$|\overset{n}{\delta}(\sigma)| \leqq (\alpha_{72}\pi_* + \alpha_{73}\bar{\Omega}_1)\,\bar{\sigma} \tag{66}$$

Eine Wiederholung gewisser vor kurzem angestellter Entwicklungen (vgl. S. 515) liefert alsdann

$$\left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial \eta}\right| \leqq (\alpha_{74}\pi_* + \alpha_{75}\bar{\Omega}_1)\,\bar{\sigma}. \tag{67}$$

Damit sind, wenn noch

$$\operatorname{Max}(\alpha_{72}, \alpha_{74}) = \alpha_{56},$$
$$\operatorname{Max}(\alpha_{73}, \alpha_{75}) = \alpha_{57}$$

gesetzt wird, die Ungleichheiten (59) bewiesen.

Wie vorhin bemerkt, konvergiert π_* mit d_1 zugleich gegen Null. Wir können darum d_1 so klein wählen, daß $\alpha_{62}\pi_* + \alpha_{63}d_1 \leqq q < 1$ gilt, somit

$$(68) \qquad \left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial z}\right| \leqq q\bar{\sigma}, \quad \text{mithin} \quad |\overset{n}{\delta}| \leqq \sqrt{3}\, r q \bar{\sigma}$$

wird. Die unendlichen Reihen

$$\overset{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty}(\overset{n+1}{\zeta} - \overset{n}{\zeta}) = \overset{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty}\overset{n}{\delta}, \qquad \frac{\partial \overset{1}{\zeta}}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(\overset{n+1}{\zeta} - \overset{n}{\zeta}), \ldots$$

konvergieren für alle τ in $T + S$ wie die geometrische Reihe mit dem Quotienten $q < 1$.

Es sei

$$(69) \qquad \zeta = \overset{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty}(\overset{n+1}{\zeta} - \overset{n}{\zeta}) = \lim_{n\to\infty}\overset{n}{\zeta}.$$

Die Funktion ζ ist in $T + S$ stetig, verschwindet in O und hat in $T + S$ beschränkte und höchstens mit Ausnahme des Koordinatenursprunges stetige partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial z}$. Augenscheinlich hat ζ wie alle Näherungen $\overset{n}{\zeta}$ die Symmetrieebenen von T zu Symmetrieebenen, so daß gewiß

$$(70) \qquad \int_S \psi' u_1' \zeta' d\sigma' = \int_S \psi' u_2' \zeta' d\sigma' = 0, \qquad \int_S f' N(\sigma, \sigma')\zeta' d\sigma' = \int_S f' \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma'$$

gilt. Führt man jetzt in (28), (30) und (31) den Grenzübergang $n \to \infty$ aus, so findet man

$$(71) \qquad \psi(\sigma)\zeta(\sigma) + \int_S f' N(\sigma, \sigma')\zeta' d\sigma' = s(1) - \alpha\int_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}d\tau_1' - \lambda R^2 + \Pi\{\lambda, \zeta\},$$

$$(72) \qquad \lim_{n\to\infty}{}_0\overset{n}{s} = {}_0s = \int_S f'\frac{1}{{}_0\varrho}\zeta' d\sigma' + \alpha\int_{T_1}\chi'\frac{1}{{}_0\varrho_1}d\tau_1' + \frac{1}{\varkappa}({}_0\mathfrak{W}^{(2)} + {}_0\mathfrak{W}^{(3)} + \ldots),$$
$$\lim_{n\to\infty}\overset{n}{h} = h = \frac{s(1) - {}_0s}{1^2 f(1)},$$

$$(73) \qquad \psi(\tau)\zeta(\tau) = -\int_S f'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right)\zeta' d\sigma' + h\tau^2 f(\tau) - \alpha\int_{T_1}\chi'\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\right)d\tau_1'$$
$$- \lambda R^2 + \Pi\{\lambda, \zeta\} - {}_0\Pi\{\lambda, \zeta\}.$$

Wegen (72) kann (73) in der Form

$$\psi(\tau)\zeta(\tau)+\int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = s(\tau)-\alpha\int_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}d\tau_1' - \lambda R^2 + \Pi\{\lambda,\zeta\}, \tag{74}$$

$$s(\tau) = {}_0s + h\,\tau^2\,\mathfrak{f}(\tau)$$

geschrieben werden. Dies ist aber die nichtlineare Integro-Differentialgleichung, die den Ausgangspunkt der Entwicklungen dieses Kapitels bildete.

Es läßt sich, wenn d_1 hinreichend klein angenommen wird, ohne ernstliche Schwierigkeiten beweisen, daß die vorhin gewonnene Lösung ζ die einzige ihrer Art ist[68]). Es sei $\hat{\zeta}$ eine andere Lösung, und es möge auch

$$\left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\hat{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \pi_* \leqq \frac{\varepsilon}{4},$$

darum auch

$$|\hat{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,\pi_* r$$

gelten. Es läßt sich zeigen, daß $\overset{n}{\zeta}(\tau) - \overset{n}{\hat{\zeta}}(\tau)$ für $n\to\infty$ in $T+S$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.

§ 4.

Verzweigungsfall.

Im vorstehenden ist angenommen worden, daß die lineare homogene Integralgleichung (5) keine Lösungen außer den trivialen Nullösungen $u_1(\sigma)$ und $u_2(\sigma)$ hat (der reguläre Fall). Wir nehmen jetzt speziell $k=2$ an, denken uns das Achsenkreuz so orientiert, daß jedenfalls alle drei Koordinatenebenen zu Symmetrieebenen von T werden und setzen voraus, daß Nullösungen der Gleichung (5) existieren, die von u_1 und u_2 linear unabhängig sind (der Verzweigungsfall). In der zweiten Abhandlung dieser Reihe ist (S. 147—149) gezeigt worden, daß es gewiß Systeme linear unabhängiger Lösungen, wir bezeichnen irgendeins mit $u_1, u_2, \ldots, u_m$, gibt, die wie folgt beschaffen sind. Sie enthalten die beiden vorhin betrachteten trivialen Nullösungen u_1 und u_2, erfüllen die Orthogonalisierungs- und Normierungsbedingungen

$$\int_S \frac{1}{f}\psi\,u_k\,u_l\,d\sigma = 0 \quad (k\neq l), \qquad \int_S \frac{1}{f}\psi\,u_k^2\,d\sigma = -1 \tag{75}$$

und ändern sich beim Übergang von σ zu den in bezug auf die Koordinatenebenen symmetrisch gelegenen Punkten nicht oder aber wechseln das Vorzeichen. Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden zunächst an, es gebe nur eine von u_1 und u_2 verschiedene Nullösung u_3, und es

[68]) Es sei daran erinnert, daß wir der gesuchten Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft der Ausgangsfigur bestimmte Symmetrieeigenschaften auferlegt hatten.

möge, unter σ_* den zu σ in bezug auf irgendeine der Symmetrieebenen spiegelbildlich gelegenen Punkt verstanden, allemal

$$u_3(\sigma) = u_3(\sigma_*) \tag{76}$$

sein. Wie in der zweiten Abhandlung dieser Reihe gezeigt worden ist (vgl. a. a. O. S. 173), gilt stets

$$\int_S u_3\, d\sigma = 0. \tag{76'}$$

Nach bekannten Sätzen hat die Integralgleichung

$$\psi(\sigma)\zeta(\sigma) + \int_S f' \mathfrak{N} \zeta'\, d\sigma' = 0 \tag{77}$$

mit

$$f' \mathfrak{N}(\sigma, \sigma') = f' \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{f} \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3') \tag{78}$$

keine Nullösungen mehr. Wir schreiben die Beziehung (4) in der Form

$$\psi(\sigma)\zeta(\sigma) + \int_S f' \mathfrak{N}(\sigma, \sigma')\zeta'\, d\sigma' = \frac{1}{f} \psi u_3 r_3 + s(\mathfrak{l}) - \alpha \int_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1' - \lambda R^2 \tag{79}$$
$$- \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\lambda\zeta(aX + bY) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots),$$

$$r_3 = -\int_S \psi' u_3' \zeta'\, d\sigma', \tag{80}$$

und setzen wie auf S. 509, unter ${}_0s$ und h zwei noch zu bestimmende, absolut hinreichend kleine Werte verstanden,

$$s(\mathfrak{r}) = {}_0s + h\mathfrak{r}^2 \mathfrak{f}(\mathfrak{r}), \quad {}_0s = \int_S f' \frac{1}{{}_0\varrho} \zeta'\, d\sigma' + \alpha \int_{T_1} \chi' \frac{1}{{}_0\varrho_1} d\tau_1' + \frac{1}{\varkappa}({}_0\mathfrak{W}^{(2)} + {}_0\mathfrak{W}^{(3)} + \ldots), \tag{81}$$

$$\psi(\tau)\zeta(\tau) = -\int_S f' \Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\zeta'\, d\sigma' + h\mathfrak{r}^2 \mathfrak{f}(\mathfrak{r}) - \alpha \int_{T_1} \chi' \Big(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\Big) d\tau_1' \tag{82}$$
$$- \lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa} \zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\lambda\zeta(ax + by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - {}_0\mathfrak{W}^{(3)} - \ldots).$$

Durch Überlegungen, die den auf S. 509ff. durchgeführten ganz parallel verlaufen, kann man beweisen, daß die Integro-Differentialgleichungen (79) und (82) für alle hinreichend kleinen Werte von $|s(\mathfrak{l})|$, $|\alpha|$, $|\lambda|$ und $|r_3|$ eine und nur eine auf S bzw. in $T + S$ stetige, in O verschwindende Lösung $\zeta(\sigma)$, $\zeta(\tau)$ besitzen, die daselbst beschränkte und, höchstens mit Ausnahme des Ursprunges, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Auf S stimmt $\zeta(\tau)$ mit $\zeta(\sigma)$ überein, wofern r_3 der sogleich zu besprechenden Verzweigungsgleichung (80) genügt. Die Lösung ist in bezug auf die Symme-

trieebenen von T symmetrisch und erfüllt beiläufig die Ungleichheitsbeziehungen

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{4}, \qquad |\zeta| \leqq \sqrt{3}\, r \frac{\varepsilon}{4}. \tag{83}$$

Die einzelnen Näherungen $\overset{n}{\zeta}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sind, wie man sich ohne Mühe überzeugt, in einem Bereiche

$$|s(1)|, |\alpha|, |\lambda|, |r_3| \leqq d_0 \tag{84}$$

analytische und reguläre Funktionen von $s(1)$, α, λ und r_3. Also hat auch $\zeta = \lim \overset{n}{\zeta}$, da der Grenzübergang für alle (84) erfüllenden Werte der Parameter gleichmäßig ist, im Innern des Bereiches (84) die gleiche Eigenschaft[69]). Es gilt demnach

$$\zeta(\tau) = \sum a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} \lambda^{\nu_1} s^{\nu_2}(1)\, \alpha^{\nu_3} r_3^{\nu_4}. \tag{85}$$

Aus der Cauchyschen Integraldarstellung folgt, daß die Funktionen $a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ von x, y, z in $T + S$ stetig sind und beschränkte, höchstens mit Ausnahme des Koordinatenursprunges stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Die unendliche Reihe (85) kann gliedweise differentiiert werden. Es seien in der Tat $\Gamma_\lambda, \Gamma_s, \Gamma_\alpha, \Gamma_{r_3}$ Kreise vom Halbmesser d_0 um den Koordinatenursprung in den Ebenen der komplexen Veränderlichen λ, $s(1)$, α und r_3. Für alle $|s(1)|, |\alpha|, |\lambda|, |r_3| < d_0$ ist, wenn wir einmal ausführlicher $\zeta(x, y, z; \lambda, s, \alpha, r_3)$ für ζ schreiben,

$$\zeta(x,y,z;\lambda,s,\alpha,r_3) = \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{\Gamma_\lambda} \cdots \int_{\Gamma_{r_3}} \frac{\zeta(x,y,z;\tilde{\lambda},\tilde{s},\tilde{\alpha},\tilde{r}_3)}{(\tilde{\lambda}-\lambda)(\tilde{s}-s)(\tilde{\alpha}-\alpha)(\tilde{r}_3-r_3)} d\tilde{\lambda}\, d\tilde{s}\, d\tilde{\alpha}\, d\tilde{r}_3.$$

Hieraus folgt z. B.

$$\frac{\partial}{\partial x}\zeta(x,y,z;\lambda,s,\alpha,r_3) = \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{\Gamma_\lambda} \cdots \int_{\Gamma_{r_3}} \frac{\frac{\partial}{\partial x}\zeta(x,y,z;\tilde{\lambda},\tilde{s},\tilde{\alpha},\tilde{r}_3)}{(\tilde{\lambda}-\lambda)(\tilde{s}-s)(\tilde{\alpha}-\alpha)(\tilde{r}_3-r_3)} d\tilde{\lambda}\, d\tilde{s}\, d\tilde{\alpha}\, d\tilde{r}_3.$$

Also ist $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ und ebenso $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial z}$ eine analytische Funktion von $\lambda, s(1), \alpha, r_3$. Hieraus folgt fast unmittelbar, daß die Reihe (85) gliedweise differentiierbar ist. Die einzelnen Koeffizienten $a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ bestimmen sich durch Einsetzen in (79) bis (82) in folgender Weise.

Sind etwa alle Koeffizienten $a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ mit $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 \leqq n$ schon festgestellt, so findet man nach Einsetzen von (85) in (79) zur Bestimmung

[69]) Vgl. die in der Fußnote [1]) an zweiter Stelle genannte Abhandlung S. 161—162. Dort finden sich die analogen Betrachtungen für homogene Gleichgewichtsfiguren ins einzelne durchgeführt.

der Werte der Koeffizienten $a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ mit $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=n+1$ auf S Integralgleichungen von der Form

$$\psi\, a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}+\int_S f'\,\mathfrak{N}\,a'_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\,d\sigma'=A_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4},$$

unter $A_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ gewisse, explizit angebbare Polynome in den vorhin bereits ermittelten $a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ verstanden. Die Beziehung

$${}_0s=\int_S f'\frac{1}{{}_0\varrho}\zeta'\,d\sigma'+\alpha\int_{T_1}\chi'\frac{1}{{}_0\varrho_1}\,d\tau_1'+\frac{1}{\varkappa}({}_0\mathfrak{W}^{(2)}+{}_0\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots)$$

liefert jetzt alle Glieder der Entwicklung von ${}_0s$ vom Grade $\leqq n+1$. Aus

$$h=\frac{s(1)-{}_0s}{1^2\,\mathfrak{f}(1)},\qquad s(\mathfrak{r})={}_0s+h\,\mathfrak{r}^2\,\mathfrak{f}(\mathfrak{r}) \tag{86}$$

findet man die entsprechenden Glieder von h und $s(\mathfrak{r})$. Die Ausgangsgleichung

$$\psi(\tau)\,\zeta(\tau)=-\int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'+s(\mathfrak{r})-\alpha\int_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}\,d\tau_1'-\lambda R^2-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2)$$
$$-2\lambda\zeta(a\,x+b\,y)-\frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots) \tag{87}$$

ergibt schließlich die Werte der Koeffizienten $a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ mit $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=n+1$ in $T+S$.

Die Glieder ersten Grades der Entwicklung von ζ haben, wie aus (79) unmittelbar hervorgeht, auf S den Wert

$$\frac{1}{f}u_3\,r_3+\frac{s(1)}{\psi(\sigma)}-\frac{\alpha}{\psi(\sigma)}\int_T\chi'\frac{1}{\varrho}\,d\tau'-\frac{\lambda R^2}{\psi(\sigma)}$$
$$-\int_S\mathfrak{H}(\sigma,\sigma')\left[\frac{s(1)}{\psi(\sigma')}-\frac{\alpha}{\psi(\sigma')}\int_T\chi''\frac{1}{\varrho(\sigma',\tau'')}\,d\tau''-\frac{\lambda R'^2}{\psi(\sigma')}\right]d\sigma', \tag{88}$$

unter $\mathfrak{H}(\sigma,\sigma')$ den zu $\frac{f(\sigma')}{\psi(\sigma)}\mathfrak{N}(\sigma,\sigma')$ gehörigen lösenden Kern verstanden[69a]). Die Glieder ersten Grades von ${}_0s$ bestimmen sich, wie man leicht sieht, durch Einsetzen des vorstehenden Ausdruckes für ζ in $\int_S f'\frac{1}{{}_0\varrho}\zeta'\,d\sigma'+\alpha\int_T\chi'\frac{1}{{}_0\varrho}\,d\tau'$. Die zugehörigen Ausdrücke von h und $s(\mathfrak{r})$ finden sich aus (86). Führt man schließlich die gefundenen Ausdrücke für ζ und $s(\mathfrak{r})$ in

$$-\frac{1}{\psi(\tau)}\int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'+\frac{1}{\psi(\tau)}s(\mathfrak{r})-\frac{\alpha}{\psi(\tau)}\int_T\chi'\frac{1}{\varrho}\,d\tau'-\frac{\lambda}{\psi(\tau)}R^2$$

ein, so findet man die Glieder ersten Grades von ζ in $T+S$.

[69a]) Man beachte, daß nach bekannten Sätzen $\int_S\mathfrak{H}(\sigma,\sigma')\,u_3'\,d\sigma'=0$ ist.

Wir haben bis jetzt r_3 als einen kleinen Parameter behandelt. Führt man indessen die Entwicklung (85) in (80) ein, so erhält man eine Bestimmungsgleichung für r_3, eine „Verzweigungsgleichung". Es ist nun $\int_S \frac{1}{f}\psi u_3^2 d\sigma = -1$ und nach bekannten Sätzen der Theorie linearer Integralgleichungen

$$\int_S \mathfrak{H}(\sigma, \sigma')\psi(\sigma) u_3(\sigma) d\sigma = 0.$$

Die vorgenannte Gleichung ist demnach, wie man leicht sieht[70]), von der Form

$$(89)\quad \lambda \int_S R^2 u_3 d\sigma + \alpha \int_S u_3 d\sigma \int_T \chi' \frac{1}{\varrho(\sigma, \tau')} d\tau' + \mathfrak{P}(\lambda, s(\mathrm{I}), \alpha; r_3) = 0,$$

unter $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe, die mit den Gliedern zweiten Grades beginnt, verstanden.

Es sei

$$(90)\qquad r_3 = r_3(\lambda, s(\mathrm{I}), \alpha)$$

eine für $\lambda = s(\mathrm{I}) = \alpha = 0$ verschwindende Lösung der Gleichung (89). Für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|$, $|s(\mathrm{I})|$, $|\alpha|$ ist demnach mit (90) die Bedingungsgleichung (89) gewiß erfüllt. Die Funktion (85) genügt der Integro-Differentialgleichung (87), die Konfiguration $T_1 + S_1$ ist eine Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit.

Die Untersuchung der Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft der gegebenen Figur ist damit auf die Diskussion der Verzweigungsgleichung (89) zurückgeführt[71]).

Den vorstehenden Betrachtungen liegt die Annahme zugrunde, die Integralgleichung (5) habe nur eine von u_1 und u_2 linear unabhängige Nullösung u_3, und es sei $u_3(\sigma) = u_3(\sigma_*)$. Es möge jetzt demgegenüber (5) $m_1 - 2 > 1$ unter sich und von u_1 und u_3 linear unabhängige den Beziehungen (75) genügende Lösungen $u_3, \ldots, u_{m_1}$ haben, und es sei

$$u_l(\sigma) = u_l(\sigma_*) \qquad (l = 3, \ldots, m_1).$$

Man wird diesmal

$$(91)\quad \begin{aligned} f'\hat{\mathfrak{R}}(\sigma, \sigma') &= f'\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{f}\psi\psi'(u_1 u_1' + u_2 u_2' + \ldots + u_{m_1} u_{m_1}'), \\ r_3 = -\int_S \psi' u_3' \zeta' d\sigma', \ldots, r_{m_1} &= -\int_S \psi' u_{m_1}' \zeta' d\sigma' \end{aligned}$$

---

[70]) Man beachte (88) und (76').

[71]) Man vergleiche die zweite Abhandlung dieser Reihe. Dort findet sich auf S. 171—179 diese Diskussion in dem besonderen Falle $\alpha = 0$, d. h. für durchaus homogene Flüssigkeiten ins einzelne durchgeführt. Es ist zu beachten, daß ψ, λ, s jetzt das bezeichnen, was a. a. O. $f\psi$, $f\lambda$, fs bezeichneten.

setzen und im übrigen wie auf S. 521ff. verfahren und erhält zur Bestimmung der $m_1 - 2$ Parameter $r_3, \ldots, r_{m_1}$ ein System von $m_1 - 2$ Verzweigungsgleichungen.

Vorhin war nur von (nicht trivialen) Nullösungen die Rede, die in bezug auf alle Symmetrieebenen von T symmetrisch sind. Es möge jetzt (5) auch noch Nullösungen $u_{m_1+1}, \ldots, u_m$ haben, die beim Übergang von σ zu auch nur einem der spiegelbildlich gelegenen Punkte das Vorzeichen wechseln.

Wir setzen wieder

$$f' \tilde{\mathfrak{N}}(\sigma, \sigma') = f' \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{f} \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2' + \ldots + u_m u_m'), \tag{92}$$

$$r_3 = -\int_S \psi' u_3' \zeta' d\sigma', \ldots, r_m = -\int_S \psi' u_m' \zeta' d\sigma'$$

und verfahren sinngemäß wie auf S. 521ff. Augenscheinlich ist, da ζ nach Voraussetzung alle Symmetrieebenen von T zu Symmetrieebenen hat,

$$r_{m_1+1} = \ldots = r_m = 0,$$

so daß wir auch diesmal nur $m_1 - 2$ Verzweigungsgleichungen erhalten[72]). Sind $u_3, \ldots, u_m$ in bezug auf alle Symmetrieebenen von T symmetrisch, so haben die etwa vorhandenen neuen (reellen) Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft von $T + S$, wie man sich ohne Mühe überzeugt, alle diese Ebenen zu Symmetrieebenen.

Es möge speziell S eine Rotationsfläche um die Gerade $x = y = 0$ als Achse sein. Jetzt ist, wie man weiß, $u_3 \equiv 0$, und die etwaigen nicht trivialen Nullösungen der Integralgleichung (5) sind von der Form $F(\hat{s})$ oder aber $F_1(\hat{s}) \cos p\vartheta$ und $F_1(\hat{s}) \sin p\vartheta$, unter $\hat{s}$ die Bogenlänge der Meridiankurve, unter ϑ den Azimutwinkel, unter p eine positive ganze Zahl verstanden. Die zuletzt genannten Lösungen treten stets paarweise auf[73]). Niveauflächen von $T + S$ sind, wie man leicht sieht, ebenfalls Rotationsflächen um die Gerade $x = y = 0$. Im regulären Fall hat die Konfiguration $T_1 + S_1$ Rotationssymmetrie um die z-Achse. Das gleiche gilt, wenn alle Nullösungen von (5) die Form $F(\hat{s})$ haben. Alles dies folgt ohne Mühe, wenn man die Symmetrieverhältnisse der einzelnen Näherungen aufmerksam verfolgt.

---

[72]) Die anderen sind identisch erfüllt. Man vergleiche die analogen Betrachtungen in der zweiten Abhandlung der Reihe S. 169–170. A. a. O. sowie S. 153–156 finden sich spezielle Ausführungen über Rotationskörper als Ausgangsfiguren.

[73]) Vgl. die zweite Abhandlung S. 153–156.

Drittes Kapitel.

Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen nichthomogenen Gleichgewichtsfigur. Figur der Erde.

§ 1.

Die fundamentale Integro-Differentialgleichung des Problems.

Wir kehren zu den Betrachtungen des ersten Kapitels zurück und legen unseren weiteren Untersuchungen die Integro-Differentialgleichung (47)I in ausführlicher Schreibweise

$$(1)\qquad \psi(\tau)\zeta(\tau)+\int_S f'\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'-\int_{\mathfrak{S}}[f']\frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma'-\int_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial \nu'}\frac{1}{\varrho}\,d\tau'=s(\tau)$$

$$-\alpha\int_{T_1}\chi'\frac{1}{\varrho_1}\,d\tau_1'-\lambda R^2-\frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2)-2\lambda\zeta(ax+by)-\frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)}+\mathfrak{W}^{(3)}+\ldots$$

zugrunde. Die linke Seite kann (vgl. (51)I) auch einfacher in der Form

$$(2)\qquad \psi(\tau)\zeta(\tau)-\int_0^\infty df(\mathfrak{r}')\int_{S_{\mathfrak{r}'}}\zeta'\frac{1}{\varrho}\,d\sigma'$$

geschrieben werden. Bezüglich der Dichte f, die auf jeder Niveaufläche des Gesamtpotentials von $T+S$ einen konstanten Wert hat, haben wir a. a. O. vorausgesetzt, daß sie abteilungsweise stetig ist und in jedem Stetigkeitsbereiche stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Wir wollen darüber hinaus annehmen, daß $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ in $K+C$ stetig sind und einer H-Bedingung genügen. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ sind in O gleich Null. Sie verhalten sich demnach in der Umgebung von O wie r^μ $(0<\mu<1)$ (vgl. S. 487). Augenscheinlich ist $\frac{\partial f}{\partial \nu}=O(r^\mu)$. Dagegen braucht sich f beim Fortschreiten längs der z-Achse vom Koordinatenursprung nach der Randfläche S nicht notwendig monoton zu ändern (nicht zunehmen). Doch darf ψ in $T+S$, außer in dem Koordinatenursprunge, nicht verschwinden. In der Umgebung von O verhält sich ψ wie $O(r)$.[74])

Für $\tau\to 0$ folgt aus (1), da ζ im Koordinatenursprunge verschwindet,

$$(3)\qquad \int_S f'\frac{1}{{}_0\varrho}\zeta'\,d\sigma'-\int_{\mathfrak{S}}[f']\frac{1}{{}_0\varrho}\zeta'\,d\sigma'-\int_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial \nu'}\frac{1}{{}_0\varrho}\,d\tau'={}_0s-\alpha\int_{T_1}\chi'\frac{1}{{}_0\varrho_1}\,d\tau_1'-\frac{1}{\varkappa}({}_0\mathfrak{W}^{(2)}+{}_0\mathfrak{W}$$

---

[74]) Präziser, auch der Ausdruck $\frac{r}{\psi}$ liegt unterhalb einer festen Schranke (vgl. die Fußnote [59])).

Aus (1) und (3) folgt, wenn wir wie im zweiten Kapitel $s = {}_0s + h\,\mathfrak{r}^2 f(\mathfrak{r})$ setzen,

$$(4)\quad \psi'(\tau)\zeta(\tau) + \int_S f'\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\zeta'\,d\sigma' - \int_{\mathfrak{S}} [f']\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\zeta'\,d\sigma' - \int_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial \nu'}\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\,d\tau'$$
$$= h\,\mathfrak{r}^2 f(\mathfrak{r}) - \alpha\int_{T_1}\chi'\Big(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\Big)\,d\tau_1' - \lambda R^2 - \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by)$$
$$- \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - {}_0\mathfrak{W}^{(3)} - \ldots),$$

oder kürzer (vgl. S. 499)

$$(5)\quad \psi'(\tau)\zeta(\tau) - \int_0^\infty df(\mathfrak{r}')\int_{S_{\mathfrak{r}'}}\zeta'\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\,d\sigma' = h\,\mathfrak{r}^2 f(\mathfrak{r}) - \alpha\int_{T_1}\chi'\Big(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\Big)\,d\tau_1'$$
$$- \lambda R^2 + \Pi\{\lambda,\zeta\} - {}_0\Pi\{\lambda,\zeta\}.$$

§ 2.

Untersuchung einer homogenen linearen Integralgleichung.

Wir betrachten in dem Folgenden die homogene Integralgleichung

$$\psi'(\tau)\zeta(\tau) + \int_S f'\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\zeta'\,d\sigma' - \int_{\mathfrak{S}}[f']\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\zeta'\,d\sigma' - \int_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial\nu'}\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\,d\tau' = 0,$$

kürzer

$$(7)\quad \psi'(\tau)\zeta(\tau) - \int_0^\infty df(\mathfrak{r}')\int_{S_{\mathfrak{r}'}}\zeta'\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\,d\sigma' = 0.$$

Sie stellt, in der Bezeichnungsweise von A. Kneser, eine belastete Integralgleichung dar. Es ist nicht schwer einzusehen, daß, wenn bezüglich einer Nullösung $\zeta(\tau)$ von (7) feststeht, daß sie sich in O wie r^{-1} verhält, sie in $T+S$ gewiß beschränkt ist[75]). Wir schreiben, um dies zu zeigen, (6) zur Abkürzung vorübergehend in der Form

$$(8)\quad \psi'(\tau)\zeta(\tau) = J_1(\tau) + J_2(\tau) + J_3(\tau).$$

Augenscheinlich ist $J_1(\tau)$ in $T+S$ stetig und hat in T stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung; $J_2(\tau)$ ist in $T+S$ stetig und hat in jedem Stetigkeitsbereiche von f, der Rand allemal eingeschlossen, stetige Ableitungen erster Ordnung, in $K+C$ überdies stetige Ableitungen zweiter Ordnung. In O ist $J_1 = J_2 = 0$, darum verhalten sich J_1 und J_2 in der

[75]) Die Möglichkeit, daß $\zeta(\tau)$ in O von einer höheren Ordnung unendlich wird, braucht nicht berücksichtigt zu werden. (Vgl. S. 553.)

Umgebung des Koordinatenursprunges wie r. Was $J_3(\tau)$ betrifft, so ist dieser Ausdruck gewiß in $T+S$ stetig und in O gleich Null. Für alle von O verschiedenen τ in $T+S$ sind ferner $\frac{\partial J_3}{\partial x}=\int_T \zeta' \frac{\partial f'}{\partial \nu'} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\right) d\tau'$, $\frac{\partial J_3}{\partial y}$, $\frac{\partial J_3}{\partial z}$ stetig. Wie sich in bekannter Weise leicht zeigen läßt, ist schließlich

$$\frac{\partial J_3}{\partial x}, \frac{\partial J_3}{\partial y}, \frac{\partial J_3}{\partial z} = O\left(\log \frac{1}{r}\right). \quad (9)$$ [76])

Hieraus folgt aber $J_3 = O\left(r \log \frac{1}{r}\right)$ und nach (5), da ja $\frac{1}{\psi(r)} = O(r^{-1})$ gilt (vgl. (6)),

$$\zeta(\tau) = O\left(\log \frac{1}{r}\right). \quad (10)$$

Berücksichtigt man dies, so findet man, daß $\frac{\partial J_3}{\partial x}$, $\frac{\partial J_3}{\partial y}$, $\frac{\partial J_3}{\partial z}$ sich tatsächlich in T durchaus stetig verhalten, darum $J_3 = O(r)$ und $\zeta(\tau)$, wie behauptet, beschränkt ist.

Ist eine Nullösung der Integralgleichnng (6) in bezug auf alle $k+1$ Symmetrieebenen von T symmetrisch, so sind aus Gründen der Symmetrie in O die partiellen Ableitungen erster Ordnung von J_1, J_2, J_3 sämtlich gleich Null. Darum ist zunächst in der Umgebung von O

$$J_1 = O(r^2), \quad J_2 = O(r^2).$$

Weiter gilt nach einem Satze von Dini[77]), unter τ_1, τ_2 zwei Punkte in T, unter d_{12} ihren Abstand verstanden, beispielsweise

$$\left| \frac{\partial J_3}{\partial x}(\tau_2) - \frac{\partial J_3}{\partial x}(\tau_1) \right| < \alpha_{76} d_{12} |\log d_{12}|,$$

mithin, wenn $\tau_1 = \tau$ angenommen und τ_2 in den Koordinatenursprung gesetzt wird,

$$\frac{\partial}{\partial x} J_3(\tau), \frac{\partial}{\partial y} J_3(\tau), \frac{\partial}{\partial z} J_3(\tau) = O\left(r \log \frac{1}{r}\right), \quad J_3 = O\left(r^2 \log \frac{1}{r}\right). \quad (11)$$

Aus (8) folgt jetzt

$$|\zeta| \leqq \alpha_{77} r \log \frac{1}{r}.$$

Wir haben zuletzt vorausgesetzt, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ sich in $K+C$ stetig verhalten und einer H-Bedingung (mit dem Expo-

[76]) Man vergleiche H. Petrini, Acta Mathematica **31** (1908), S. 127–332; Journal de Mathématiques (6) **5** (1909), S. 127–223, wo Ausdrücke dieser und verwandter Art vielfach abgeschätzt werden.

[77]) Vgl. U. Dini, Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, Acta Mathematica **25** (1902), S. 185–230.

nenten $\mu < 1$) genügen. Hieraus folgt, wie wir jetzt zeigen wollen, daß auch $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ in $K + C$ einer H-Bedingung von der Form

$$\left| \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial \nu} - \frac{\partial f(\tau_2)}{\partial \nu} \right| \leqq \alpha_{78} d_{12}^{\mu}, \tag{12}$$

unter d_{12} den Abstand der Punkte τ_1 und τ_2 verstanden, genügt. Wegen

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b + \frac{\partial f}{\partial z} c \text{ [78])}$$

wird (12) bewiesen sein, sobald gezeigt ist, daß $\frac{\partial f}{\partial x} a$, $\frac{\partial f}{\partial y} b$, $\frac{\partial f}{\partial z} c$ analoge Ungleichheiten erfüllen. Es genügt, $\frac{\partial f}{\partial x} a$ zu betrachten. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf man

$$r_1 \leqq r_2 \quad (r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,\ r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$

annehmen.

Es gilt nun in naheliegender Bezeichnungsweise

$$\frac{\partial f(\tau_1)}{\partial x} a_1 - \frac{\partial f(\tau_2)}{\partial x} a_2 = \left(\frac{\partial f(\tau_1)}{\partial x} - \frac{\partial f(\tau_2)}{\partial x} \right) a_2 + \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial x} (a_1 - a_2)$$

und

$$\left| \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial x} - \frac{\partial f(\tau_2)}{\partial x} \right| |a_2| \leqq \left| \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial x} - \frac{\partial f(\tau_2)}{\partial x} \right| \leqq \alpha_{78}^{(1)} d_{12}^{\mu}.$$

Ferner ist, wenn τ_3 denjenigen Punkt auf der durch τ_2 bestimmten Orthogonaltrajektorie Γ_2 der Schar der Niveauflächen S_ν bezeichnet, dessen Entfernung von O den Wert r_1 hat,

$$\frac{\partial f(\tau_1)}{\partial x} (a_1 - a_2) = \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial x} (a_1 - a_3) + \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial x} (a_3 - a_2).$$

Nach Voraussetzung (vgl. S. 488) ist Γ_2 stetig gekrümmt und die Krümmung für alle Γ_2 gleichmäßig beschränkt, demnach ist, wenn d_{23} den Abstand der Punkte τ_2 und τ_3 bezeichnet,

$$|a_3 - a_2| \leqq \alpha_{78}^{(2)} d_{23} \leqq \alpha_{78}^{(3)} d_{12}.$$

Schließlich ist, wenn, wie wir zunächst annehmen wollen, der Abstand d_{13} von τ_1 und τ_3 den Wert $r_1 \sqrt{2}$ nicht übersteigt,

$$a_1 - a_3 = d_{13} \widetilde{Da},$$

unter $\widetilde{Da}$ die Ableitung von a in der Richtung $\tau_3 \to \tau_1$ in einem gewissen auf der Strecke $\overrightarrow{\tau_3 \tau_1}$ gelegenen Punkte verstanden.

Wie wir wissen (vgl. S. 493), verhält sich $\widetilde{Da}$ wie r_1^{-1}, so daß darum

[78]) Wir erinnern daran, daß $a = \cos(\nu, x)$, $b = \cos(\nu, y)$, $c = \cos(\nu, z)$ ist.

$|a_1 - a_3| \leqq \alpha_{78}^{(4)} \frac{d_{13}}{r_1}$ geschrieben werden kann[79]). Ferner gilt $\left|\frac{\partial f(\tau_1)}{\partial x}\right| \leqq \alpha_{78}^{(5)} r_1^{\mu}$, so daß wir

$$\left|\frac{\partial f(\tau_1)}{\partial x}(a_1 - a_3)\right| \leqq \alpha_{78}^{(4)} \frac{d_{13}}{r_1} \alpha_{78}^{(5)} r_1^{\mu} = \alpha_{78}^{(6)} \frac{d_{13}}{r_1^{1-\mu}} = \alpha_{78}^{(6)} \frac{d_{13}^{1-\mu}}{r_1^{1-\mu}} d_{13}^{\mu} \leqq \alpha_{78}^{(6)} 2^{\frac{1-\mu}{2}} d_{13}^{\mu}$$

erhalten, da nach Voraussetzung $d_{13} \leqq r_1 \sqrt{2}$ ist. Endlich ist gewiß $d_{13} \leqq \alpha_{78}^{(7)} d_{12}$, mithin

$$\left|\frac{\partial f(\tau_1)}{\partial x}(a_1 - a_3)\right| \leqq \alpha_{78}^{(8)} d_{12}^{\mu}.$$

Wir haben vorhin $d_{13} \leqq r_1 \sqrt{2}$ angenommen. Ist demgegenüber $d_{13} > r_1 \sqrt{2}$ und zugleich natürlich $d_{13} \leqq 2 r_1$, so schalten wir in der Ebene durch O, τ_1 und τ_3 noch einen Punkt τ_4 in dem Abstande r_1 von O und $r_1 \sqrt{2}$ von τ_3 ein und erhalten

$$|a_1 - a_3| = |a_1 - a_4 + a_4 - a_3| \leqq |a_1 - a_4| + |a_4 - a_3| \leqq \alpha_{78}^{(9)} \frac{d_{34} + d_{14}}{r_1} \leqq \alpha_{78}^{(10)} \frac{d_{13}}{r_1}$$

und wie vorhin

$$\left|\frac{\partial f(\tau_1)}{\partial x}(a_1 - a_3)\right| \leqq \alpha_{78}^{(10)} \frac{d_{13}}{r_1} \alpha_{78}^{(5)} r_1^{\mu} < \alpha_{78}^{(11)} d_{13}^{\mu} < \alpha_{78}^{(12)} d_{12}^{\mu}.$$

Damit ist aber auch unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Aus (12) folgt augenscheinlich, da $\lim_{\tau \to O} \frac{\partial f(\tau)}{\partial \nu} = 0$ ist,

$$\left|\frac{\partial f(\tau)}{\partial \nu}\right| \leqq \alpha_{78} r^{\mu}. \tag{13}$$

Aus (11) folgt, wenn man (8) beachtet,

$$\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right| \leqq \alpha_{79} \log \frac{1}{r}. \tag{14}$$

Wir beweisen, daß $\frac{\partial f(\tau)}{\partial \nu} \zeta(\tau)$ in $K + C$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügt. Es gilt

$$\frac{\partial f(\tau_2)}{\partial \nu_2} \zeta(\tau_2) - \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial \nu_1} \zeta(\tau_1) = \left(\frac{\partial f(\tau_2)}{\partial \nu_2} - \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial \nu_1}\right) \zeta(\tau_2) + \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial \nu_1} (\zeta(\tau_2) - \zeta(\tau_1)),$$

demnach

$$\left|\frac{\partial f(\tau_2)}{\partial \nu_2} \zeta(\tau_2) - \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial \nu_1} \zeta(\tau_1)\right| \leqq \left|\frac{\partial f(\tau_2)}{\partial \nu_2} - \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial \nu_1}\right| |\zeta(\tau_2)| + \left|\frac{\partial f(\tau_1)}{\partial \nu_1}\right| |\zeta(\tau_2) - \zeta \tag{15}$$

Wegen (12) und da gewiß $|\zeta(\tau_2)| \leqq \alpha_{80}$ gilt[80]), ist der erste Summand rechter Hand dem absoluten Betrage nach gewiß $\leqq \alpha_{78} \alpha_{80} d_{12}^{\mu} = \alpha_{81} d_{12}^{\mu}$.

---

[79]) Man beachte, daß der Abstand der Strecke $\tau_1 \tau_3$ vom Koordinatenursprunge $\geqq \frac{r_1 \sqrt{2}}{2}$ ist.

[80]) Es ist eben gezeigt worden, daß $\zeta(\tau)$ beschränkt ist.

Es genügt demnach, zu zeigen, daß der zweite Summand eine analoge Beziehung erfüllt. Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit wie vorhin annehmen, daß τ_1 dem Koordinatenursprung näher als τ_2 liegt. Es möge zunächst τ_2 irgendwo in dem auf der Fig. 2 durch schräge Schraffierung hervorgehobenen, aus einem Halbraume durch Entfernung eines Halbkugelkörpers entstandenen Bereiche liegen. Es gilt

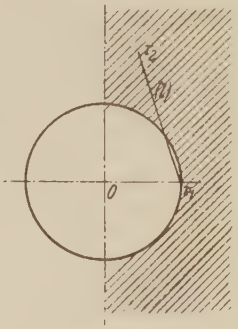


Fig. 2.

$$\zeta(\tau_2) - \zeta(\tau_1) = d_{12} \frac{\partial \xi}{\partial l},$$

unter $\frac{\partial \xi}{\partial l}$ die Ableitung in der Richtung des Vektors $\overrightarrow{\tau_1 \tau_2}$ in einem geeigneten auf dieser Strecke gelegenen Punkte verstanden. Der Abstand dieses Punktes von dem Koordinatenursprunge ist $\geqq r_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$. Wir finden darum nach (13) und (14)

$$\left| \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial \nu_1} \right| |\zeta(\tau_2) - \zeta(\tau_1)| \leqq \alpha_{79} d_{12} \sqrt{3} \log \frac{\sqrt{2}}{r_1} \alpha_{78} r_1^{\mu} \leqq \alpha_{82} d_{12}.$$

Liegt τ_2 in dem in der Fig. 3 durch horizontale Schraffierung bezeichneten Bereiche, so führen wir den zu τ_1 in bezug auf O diametral gegenüberliegenden Punkt $\bar{\tau}_1$ ein und finden augenscheinlich

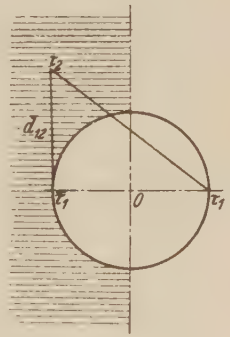


Fig. 3.

$$|\zeta(\tau_2) - \zeta(\bar{\tau}_1)| \leqq \alpha_{79} \bar{d}_{12} \sqrt{3} \log \frac{\sqrt{2}}{r_1} \leqq \alpha_{83} \bar{d}_{12} \log \frac{1}{r_1},$$

$$|\zeta(\bar{\tau}_1) - \zeta(\tau_1)| \leqq |\zeta(\bar{\tau}_1)| + |\zeta(\tau_1)| \leqq 2 \alpha_{77} r_1 \log \frac{1}{r_1},$$

somit

$$|\zeta(\tau_2) - \zeta(\tau_1)| \leqq |\zeta(\tau_2) - \zeta(\bar{\tau}_1)| + |\zeta(\bar{\tau}_1) - \zeta(\tau_1)|$$
$$\leqq \alpha_{84} (\bar{d}_{12} + r_1) \log \frac{1}{r_1},$$

$$\left| \frac{\partial f(\tau_1)}{\partial \nu_1} \right| |\zeta(\tau_2) - \zeta(\tau_1)| \leqq \alpha_{78} \alpha_{84} (\bar{d}_{12} + r_1) r_1^{\mu} \log \frac{1}{r_1} \leqq \alpha_{85} d_{12}.$$

Alles bisher Gefundene zusammenfassend, stellen wir fest, daß in der Tat $\frac{\partial f(\tau)}{\partial \nu} \zeta(\tau)$ in $K + C$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügt. Dies hat aber zur Folge, daß $J_3(\tau)$ in $K + C$ stetige, übrigens sogar eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ erfüllende, partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat. Aus (8) folgt jetzt endgültig, daß $\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ beschränkt und in T, höchstens mit Ausnahme des Koordinatenursprunges, abteilungsweise stetig sind. Offenbar verschwindet ζ in O wie r.

In dem Vorstehenden war ausdrücklich von dem Verhalten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \frac{\partial\zeta}{\partial z}$ im Innern von T die Rede. Es ist leicht, einzusehen, daß sie auch noch auf S stetig sind. In der Tat erfüllen $J_1(\tau)$, $J_2(\tau)$, $J_3(\tau)$ in dem Gebiete, das entsteht, wenn man aus T den Bereich $K+C$ entfernt, gewiß eine H-Bedingung mit einem beliebigen Exponenten <1. Wegen (8) gilt für $\zeta(\tau)$ das gleiche. Nach bekannten Sätzen haben $J_1(\tau)$, $J_2(\tau)$, $J_3(\tau)$, somit auch $\zeta(\tau)$, in dem vorhin betrachteten Bereiche abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.

Neben der Integralgleichung (6) betrachten wir jetzt noch die Gleichung

$$(16)\quad \psi(\tau)\zeta(\tau) + \int_S f' \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' - \int_{\mathfrak{S}} [f'] \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' - \int_T \zeta' \frac{\partial f'}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho} d\tau' = 0$$

und beweisen, daß sie, falls, wie wir zunächst annehmen wollen, $\omega \neq 0$ ist, gewiß eine Nullösung $u_1 = \text{konst. } c$ und, falls T nicht etwa Rotationssymmetrie um die z-Achse hat, eine weitere Nullösung $u_2 = \text{konst. } R\cos\mathfrak{p}$ besitzt, unter $\mathfrak{p}$ den Winkel verstanden, der von (ν) und dem bei einer Drehung von T um die z-Achse von dem Punkte P beschriebenen Kreisbogen eingeschlossen wird. Sind alle S_τ Rotationsflächen um die z-Achse, so ist $R\cos\mathfrak{p} \equiv 0$, darum $u_2 \equiv 0$.

Ist $\omega = 0$, handelt es sich mithin um einen ruhenden Flüssigkeitskörper mit Kugelsymmetrie als Ausgangsfigur, so hat die Integralgleichung (16) die Funktionen $u_1 = \text{konst. } c$, $u_{11} = \text{konst. } a$, $u_{12} = \text{konst. } b$ zu Nullösungen. Alle diese Nullösungen hängen eng mit Ortsänderungen zusammen, die $T+S$, als starrer Körper aufgefaßt, ausführen darf, ohne aufzuhören Gleichgewichtsfigur zu sein. Wir nennen sie darum auch diesmal „triviale Nullösungen".

Bevor wir zu einem Beweis der vorstehenden Behauptungen übergehen, bemerken wir, daß augenscheinlich u_1, u_2 bzw. u_1, u_{11}, u_{12} zugleich Nullösungen der Integralgleichung (6) sind. In der Tat ist beispielsweise

$$\int_S f' \frac{1}{\varrho\varrho} u_1' d\sigma' - \int_{\mathfrak{S}} [f'] \frac{1}{\varrho\varrho} u_1' d\sigma' - \int_T \frac{\partial f'}{\partial \nu'} u_1' \frac{1}{\varrho\varrho} d\tau' = 0,$$

da u_1 beim Übergang von τ zu dem in bezug auf die Ebene $z=0$ symmetrisch gelegenen Punkte das Zeichen wechselt. Hat $T+S$ Kugelsymmetrie in bezug auf den Ursprung, so sind u_1, u_{11}, u_{12}, wie alsbald gezeigt werden wird, die *einzigen* Nullösungen von (6).

Wir beweisen nunmehr, daß $u_1 = \text{konst } c$ tatsächlich eine Nullösung von (16) darstellt. Gewiß ist die Konfiguration, die man erhält, wenn man $T+S$ um eine Strecke h in der Richtung der z-Achse verschiebt, wieder eine zu der Winkelgeschwindigkeit ω gehörige Gleichgewichtsfigur. Das im ersten Kapitel benutzte System krummliniger Koordinaten ist zur Bestimmung der Lage der Bildflächen der Schar S_τ bei der betrachteten Verschiebung

nicht geeignet, da das Bild des Koordinatenursprunges sich mit diesem nicht mehr deckt. Wir ersetzen darum die Schar der Normalen (ν) durch die Schar der Parallelen zu der z-Achse durch die einzelnen Punkte auf S_τ.

Es sei ζ irgendeine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Ortsfunktion in $T+S$. Wir ordnen dem Punkte P mit den Koordinaten x, y, z auf S_τ den Punkt $\hat{P}$ mit den Koordinaten $x, y, z+\zeta$ zu. Sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung von ζ dem absoluten Betrage nach hinreichend klein, so stellt der Übergang von (x, y, z) zu $(x, y, z+\zeta)$ offenbar eine topologische Abbildung dar. Wir bezeichnen das Bild von S_τ mit $\hat{S}_\tau$, dasjenige von T und S entsprechend mit $\hat{T}$ und $\hat{S}$. Für $\zeta \equiv h$ ist $\hat{T}+\hat{S}$ mit der vorhin genannten neuen Gleichgewichtskonfiguration identisch.

Wir wollen nun einen Ausdruck für das Gesamtpotential der Flüssigkeitskonfiguration $\hat{T}+\hat{S}$ im Punkte $\hat{P}$ aufstellen, indem wir die Dichte in $\hat{P}$ gleich derjenigen der Ausgangskonfiguration in P setzen, und führen ähnlich wie in § 3 des ersten Kapitels eine von einem Parameter t abhängige stetige Schar von Konfigurationen $T^{(t)}$, die symbolisch mit $T+t(\hat{T}-T)$ bezeichnet werden können, ein. Dem Punkte P wird hierbei der Punkt $P^{(t)}=(x, y, z+t\zeta)$ zugeordnet. Für $t=0$ deckt sich $S_\tau^{(t)}$, das Bild von S_τ, mit S_τ, für $t=1$ mit $\hat{S}_\tau$. Die Differenz der Werte der Gravitationspotentiale $\hat{\mathfrak{W}}_t$ und $\mathfrak{W}$ der Konfigurationen $T^{(t)}$ und T, entsprechend in den Punkten $P^{(t)}$ und P, läßt sich ganz wie bei den Betrachtungen auf S. 492ff. in eine nach Potenzen von t fortschreitende Reihe

$$\hat{\mathfrak{W}}_t - \mathfrak{W} = \hat{\mathfrak{W}}^{(1)} t + \hat{\mathfrak{W}}^{(2)} t^2 + \ldots + \hat{\mathfrak{W}}^{(n)} t^n + \ldots \tag{17}$$

entwickeln. Diese Reihe ist, sofern $|\zeta|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right|$ hinreichend klein angenommen werden, gewiß für alle komplexen t mit $|t| \leqq t^*$, $t^*>1$ unbedingt konvergent. In der Tat ist dabei, wenn wir

$$\hat{\varrho}_t^2 = (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z+t(\zeta'-\zeta))^2$$

setzen, der Quotient $\left|\frac{\hat{\varrho}_t}{\varrho}\right|$ gewiß von Null verschieden, so daß alle auf S. 492ff. durchgeführten Schlüsse sinngemäß gelten. Wir finden insbesondere

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{W}}^{(1)} &= \varkappa \int_T f' \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\hat{\varrho}_t} \frac{\partial(x', y', z'+t\zeta')}{\partial(x', y', z')} \right] \right\}_{t=0} d\tau' = \varkappa \int_T f' \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\hat{\varrho}_t}\left(1+t\frac{\partial\zeta'}{\partial z'}\right)\right]\right\}_{t=0} d\tau' \\
&= \varkappa \int_T f' \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\hat{\varrho}_t} \right\}_{t=0} d\tau' + \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho} \frac{\partial\zeta'}{\partial z'} d\tau' = -\varkappa \int_T f' \frac{(z'-z)(\zeta'-\zeta)}{\varrho^3} d\tau' + \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho} \frac{\partial\zeta'}{\partial z'} d\tau \\
&= \varkappa\zeta \int_T f' \frac{z'-z}{\varrho^3} d\tau' - \varkappa \int_T f' \frac{z'-z}{\varrho^3} \zeta' d\tau' + \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho} \frac{\partial\zeta'}{\partial z'} d\tau' \\
&= \varkappa\zeta \int_T f' \frac{z'-z}{\varrho^3} d\tau' + \varkappa \int_T f' \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho}\right) \zeta' d\tau' + \varkappa \int_T f' \frac{1}{\varrho} \frac{\partial\zeta'}{\partial z'} d\tau'.
\end{aligned}$$

Nun ist augenscheinlich der Integralausdruck $\varkappa \int\limits_T f' \frac{z'-z}{\varrho^3} d\tau'$ die Komponente der von der Flüssigkeitsverteilung $T+S$ herrührenden Anziehungskraft im Punkte P parallel zu der z-Achse, mithin auch die Komponente der Schwerkraft in der gleichen Richtung; er hat also den Wert $\varkappa \psi c$. Des weiteren ist, wie eine teilweise Integration lehrt,

$$(19)\quad \int\limits_T f' \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial z'} d\tau' = \int\limits_T \frac{\partial}{\partial z'} \left(f' \frac{1}{\varrho} \mathfrak{z}' \right) d\tau' - \int\limits_T \mathfrak{z}' \frac{\partial f'}{\partial z'} \frac{1}{\varrho} d\tau' - \int\limits_T \mathfrak{z}' f' \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{\varrho} \right) d\tau'$$

$$= \int\limits_S f' \frac{1}{\varrho} \mathfrak{z}' c' d\sigma' - \int\limits_{\mathfrak{S}} [f'] \frac{1}{\varrho} \mathfrak{z}' c' d\sigma' - \int\limits_T \mathfrak{z}' \frac{\partial f'}{\partial z'} \frac{1}{\varrho} d\tau' - \int\limits_T \mathfrak{z}' f' \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{\varrho} \right) d\tau'.$$

Alles in allem ergibt sich aus (18) und (19), wenn man überdies beachtet, daß $\frac{\partial f'}{\partial z'} = \frac{\partial f'}{\partial \nu'} c'$ gilt,

$$(20)\quad \mathfrak{W}^{(1)} = \varkappa \psi \mathfrak{z} c + \varkappa \int\limits_S f' \frac{1}{\varrho} \mathfrak{z}' c' d\sigma' - \varkappa \int\limits_{\mathfrak{S}} [f'] \frac{1}{\varrho} \mathfrak{z}' c' d\sigma' - \varkappa \int\limits_T \frac{\partial f'}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho} \mathfrak{z}' c' d\tau'.$$ [80a])

Wir nehmen jetzt speziell $\mathfrak{z} \equiv h$ an. Offenbar ist $\mathfrak{W}_t$ für alle hinreichend kleinen reellen t gleich $\mathfrak{W}$. Also muß für $\mathfrak{z} \equiv h$ gewiß $\mathfrak{W}^{(1)}$ verschwinden. Dies bedeutet aber, wie ein Blick auf die Formeln (16) und (20) lehrt, daß hc, also auch $u_1 = \text{konst.}\, c$ eine Nullösung der Integralgleichung (16) darstellt. Durch ganz ähnliche Überlegungen läßt sich die Richtigkeit der übrigen auf S. 532 aufgestellten Behauptungen erweisen[81]).

Es sei τ_* der Punkt, der zu τ in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch liegt. Es gilt

$$(21)\qquad u_1(\tau_*) = -u_1(\tau);\ u_2(\tau_*) = u_2(\tau).$$

Die Integralgleichung (6) möge außer u_1 und u_2 noch weitere Nullösungen haben, und es sei

$$(22)\qquad u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen von (6). Es sei vorübergehend

$$(23)\qquad v_3(\tau) = u_3(\tau_*),\ \ldots,\ v_m(\tau) = u_m(\tau_*),$$

gesetzt. Die Funktionen $v_3, \ldots, v_m$ sind Lösungen von (6). Denn es ist z. B.

$$\psi(\tau_*) u_3(\tau_*) + \int\limits_S f(\sigma') \left(\frac{1}{\varrho(\tau_*, \sigma')} - \frac{1}{{}_0\varrho(\sigma')} \right) u_3(\sigma') d\sigma'$$

$$- \int\limits_{\mathfrak{S}} [f(\sigma')] \left(\frac{1}{\varrho(\tau_*, \sigma')} - \frac{1}{{}_0\varrho(\sigma')} \right) u_3(\sigma') d\sigma' - \int\limits_T u_3(\tau') \frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'} \left(\frac{1}{\varrho(\tau_*, \tau')} - \frac{1}{{}_0\varrho(\tau')} \right) d\tau' =$$

[80a]) In einem Homogenitätsgebiet ist $\frac{\partial f'}{\partial \nu'} = 0$, $\frac{\partial f'}{\partial z'} = 0$, darum immer noch $\frac{\partial f'}{\partial z'} = \frac{\partial f'}{\partial \nu'} c'$.

[81]) Hat T Rotationssymmetrie um die z-Achse, so ist $u_2 \equiv 0$.

oder, was dasselbe ist,

$$\psi(\tau_*)\,\mathfrak{u}_3(\tau_*) + \int_S f(\sigma'_*)\left(\frac{1}{\varrho(\tau_*,\sigma'_*)} - \frac{1}{{}_0\varrho(\sigma'_*)}\right)\mathfrak{u}_3(\sigma'_*)\,d\sigma'_*$$

$$[f(\sigma'_*)]\left(\frac{1}{\varrho(\tau_*,\sigma'_*)} - \frac{1}{{}_0\varrho(\sigma'_*)}\right)\mathfrak{u}_3(\sigma'_*)\,d\sigma'_* - \int_T \mathfrak{u}_3(\tau'_*)\,\frac{\partial f(\tau'_*)}{\partial \nu'_*}\left(\frac{1}{\varrho(\tau_*,\tau'_*)} - \frac{1}{{}_0\varrho(\tau'_*)}\right)d\tau'_* = 0.$$

Aus Gründen der Symmetrie kann man dafür auch setzen

$$\psi(\tau)\,\mathfrak{v}_3(\tau) + \int_S f(\sigma')\left(\frac{1}{\varrho(\tau,\sigma')} - \frac{1}{{}_0\varrho(\sigma')}\right)\mathfrak{v}_3(\sigma')\,d\sigma'$$

$$[f(\sigma')]\left(\frac{1}{\varrho(\tau,\sigma')} - \frac{1}{{}_0\varrho(\sigma')}\right)\mathfrak{v}_3(\sigma')\,d\sigma' - \int_T \mathfrak{v}_3(\tau')\,\frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}\left(\frac{1}{\varrho(\tau,\tau')} - \frac{1}{{}_0\varrho(\tau')}\right)d\tau' = 0,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist. Auch die Funktionen

$$\mathfrak{w}_l = \mathfrak{u}_l + \mathfrak{v}_l, \qquad \overline{\mathfrak{w}}_l = \mathfrak{u}_l - \mathfrak{v}_l \qquad (l = 1, \ldots, m)$$

sind Lösungen von (6), — sofern sie nicht identisch verschwinden, was aber nicht für ein $\mathfrak{w}_l$ und $\overline{\mathfrak{w}}_l$ zugleich eintreten kann. Ist etwa $\overline{\mathfrak{w}}_l \equiv 0$, so besagt dies, daß $\mathfrak{u}_l$ die Ebene $z = 0$ zur Symmetrieebene hat. Ist $\mathfrak{w}_l \equiv 0$, so heißt dies, daß $\mathfrak{u}_l$ bei dem Übergang von τ zu dem in bezug auf die Ebene $z = 0$ spiegelbildlich gelegenen Punkte τ_* das Vorzeichen ändert. Augenscheinlich ist $\mathfrak{w}_l$, wenn es, wie nunmehr vorausgesetzt werden soll, nicht identisch verschwindet, in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrisch, während unter analogen Voraussetzungen $\overline{\mathfrak{w}}_l(\tau) = -\overline{\mathfrak{w}}_l(\tau_*)$ gilt. Wegen

$$\mathfrak{u}_l = \frac{\mathfrak{w}_l + \overline{\mathfrak{w}}_l}{2} \qquad (l = 1, \ldots, m)$$

läßt sich jede Nullösung der Integralgleichung (6) linear durch die Lösungen $\mathfrak{w}_l$, $\overline{\mathfrak{w}}_l$ $(l = 1, \ldots, m)$ ausdrücken. Also läßt sich aus $\mathfrak{w}_l$, $\overline{\mathfrak{w}}_l$ ein vollständiges System linear unabhängiger Lösungen, etwa $\mathfrak{w}_{1l}$ $(l = 1, \ldots, m)$ aussondern. Entweder ist

$$\mathfrak{w}_{1l}(\tau_*) = \mathfrak{w}_{1l}(\tau) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{w}_{1l}(\tau_*) = -\mathfrak{w}_{1l}(\tau).$$

Übrigens ist $\overline{\mathfrak{w}} = 2\,\mathfrak{u}_1$ eine Lösung der zweiten Art und, wenn es sich nicht um ein System mit Rotationssymmetrie handelt, $\mathfrak{w}_2 = 2\,\mathfrak{u}_2$ eine Lösung der ersten Art. Man kann sich gewiß so einrichten, daß das System $\mathfrak{w}_{1l}$ die Lösungen $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ enthält. Von diesem System ausgehend gewinnt man, wenn speziell $k = 2$ ist, indem man den vorhin durchgeführten Prozeß in bezug auf die drei Koordinatenebenen wiederholt, ein neues vollständiges System linear unabhängiger Lösungen, dessen einzelne Individuen bei dem Übergang von τ zu den in bezug auf jene Ebenen symmetrisch gelegenen Punkten entweder ungeändert bleiben oder das Vorzeichen wechseln. Die Gesamtheit der Nullösungen zerfällt damit in acht verschiedene Kategorien. Man kann sich gewiß so einrichten, daß die Funktionen $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ auch

dem neuen System angehören und die einzelnen Nullösungen, die wir der Einfachheit halber wieder mit $u_1, u_2, \ldots, u_m$ bezeichnen, geeignete Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen erfüllen.

§ 3.
Fortsetzung.

Wir haben vorhin ausdrücklich $\omega \neq 0$ vorausgesetzt. Wir nehmen jetzt im Gegensatz hierzu $\omega = 0$ an, gehen demnach von einer Konfiguguration mit Kugelsymmetrie aus und beweisen für nicht zunehmendes $f(\tau)$, daß $u_1 = \text{konst.}\,\frac{z}{r}$, $u_{11} = \text{konst.}\,\frac{x}{r}$, $u_{12} = \text{konst.}\,\frac{y}{r}$ die einzigen beschränkten Nullösungen der Integralgleichung (6) darstellen, die wir kürzer in der Form

$$\psi(\tau)\,\zeta(\tau) - \int_0^\infty d f(\tau') \int_{S_{\tau'}} \zeta'\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\, d\sigma' = 0 \tag{24}$$

schreiben können, woselbst diesmal ${}_0\varrho = r'$ ist [82]). Wie wir wissen, sind etwaige Nullösungen dieser Integralgleichung, die in der Umgebung des Ursprunges nicht stärker unendlich werden als $\frac{1}{r}$, tatsächlich in $T+S$ beschränkt (vgl. S. 527ff.) und höchstens mit Ausnahme des Punktes O stetig.

Wir setzen, unter Y_{nm} $(m = 1, 2, \ldots, 2n+1)$ die allgemeinen in irgendeiner bestimmten Weise normierten und orthogonalisierten Kugelfunktionen n-ter Ordnung des Polarwinkels θ und des Azimuts $\mathfrak{d}$ verstanden, im Sinne der Äquivalenz

$$\zeta(\tau) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \zeta_{nm}(r)\, Y_{nm}. \tag{25}$$

Hierin bezeichnet $\zeta_{nm} = \zeta_{nm}(r)$ eine für alle r in $\langle 0, \mathfrak{R}\rangle$ ($\mathfrak{R}$ = Radius des Kugelkörpers $T+S$) beschränkte, in dem halboffenen Intervalle $(0, \mathfrak{R}\rangle$ stetige Funktion (vgl. die Formel (29)). Der Kugelsymmetrie halber können wir diesmal speziell

$$\psi(\tau) = \psi(r), \qquad f(\tau) = f(r) \tag{26}$$

setzen und auch S_r für S_τ schreiben.

Nach bekannten Sätzen ist für $n \geqq 1$

$$\int_{S_{r'}} \frac{1}{\varrho(\tau, \sigma')}\, Y_{nm}(\theta', \mathfrak{d}')\, d\sigma' = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{2n+1}\,\dfrac{r^n}{(r')^{n-1}}\, Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d}) & \text{für } r \leqq r', \\ \dfrac{4\pi}{2n+1}\,\dfrac{(r')^{n+2}}{r^{n+1}}\, Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d}) & \text{für } r' \leqq r \end{cases} \tag{27}$$

[83])

[82]) In (24) kann ζ für $r > \mathfrak{R}$ beliebig angenommen werden, denn für $r > \mathfrak{R}$ ist ja $f = 0$ zu setzen.

[83]) Vgl. beispielsweise A. Liapounoff, die auf S. 483 im Text an erster Stelle genannte Arbeit, S. 18. A. a. O. bezeichnet $d\sigma'$ das Flächenelement der Einheitskugel.

und darum beiläufig für $n \geqq 1$

$$\int_{S_{r'}} \frac{1}{{}_0\varrho(\sigma')} Y_{nm}(\theta', \mathfrak{d}')\, d\sigma' = 0. \tag{28}$$

Wir finden jetzt für $n \geqq 1$

$$Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d})\, d\sigma \int_0^\infty df(r') \int_{S_{r'}} \zeta' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma' = \int_{S_r} Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d})\, d\sigma \int_0^\infty df(r') \int_{S_{r'}} \zeta' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma'$$

$$\int_0^\infty df(r') \int_{S_{r'}} \zeta'\, d\sigma' \int_{S_r} Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d}) \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \int_0^r df(r') \int_{S_{r'}} Y_{nm}(\theta', \mathfrak{d}') \frac{r'^n}{r^{n-1}} \zeta'\, d\sigma'$$

$$+ \frac{4\pi}{2n+1} \int_r^\infty df(r') \int_{S_{r'}} Y_{nm}(\theta', \mathfrak{d}') \frac{r^{n+2}}{r'^{n+1}} \zeta'\, d\sigma'.$$

Wegen (25) ist

$$\int_{S_r} \zeta\, Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d})\, d\sigma = r^2 \zeta_{nm}(r) \int_{\mathfrak{S}_0} (Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d}))^2\, d\sigma = A_{nm} r^2 \zeta_{nm}(r) \text{ [84]} \tag{29}$$

die Integration rechter Hand erstreckt über die Oberfläche einer Einheitskugel $\mathfrak{S}_0$ um O. Demnach gilt für $n \geqq 1$

$$\int_{S_r} Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d})\, d\sigma \int_0^\infty df(r') \int_{S_{r'}} \zeta' \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma' = \frac{4\pi}{2n+1} A_{nm} \int_0^r \frac{r'^{n+2}}{r^{n-1}} \zeta_{nm}(r')\, df(r') \tag{30}$$

$$+ \frac{4\pi}{2n+1} A_{nm} \int_r^\infty \frac{r^{n+2}}{r'^{n-1}} \zeta_{nm}(r')\, df(r').$$

Aus (24), (29) und (30) folgt jetzt für $n \geqq 1$ fast unmittelbar

$$\psi(r) \zeta_{nm}(r) - \frac{4\pi}{2n+1} \int_0^r \zeta_{nm}(r') \frac{(r')^{n+2}}{r^{n+1}}\, df(r') - \frac{4\pi}{2n+1} \int_r^\infty \zeta_{nm}(r') \frac{r^n}{(r')^{n-1}}\, df(r') = 0,$$

$$n \geqq 1 \quad (m = 1, \ldots, 2n+1).$$

Der Einfachheit halber wollen wir im folgenden ζ_n für ζ_{nm} schreiben.

Wird die linke Seite der Gleichung (24) über S_r integriert, so findet man

$$\psi(r) \int_{S_r} \zeta(\tau)\, d\sigma - \int_0^\infty df(r') \int_{S_{r'}} \zeta(\tau')\, d\sigma' \int_{S_r} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma = 0. \tag{32}$$

---

[84]) Wir setzen zur Abkürzung $\int_{\mathfrak{S}_0} (Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d}))^2\, d\sigma = A_{nm}$. Die Art der Normierung der Kugelfunktionen $Y_{nm}(\theta, \mathfrak{d})$ ist für die folgende Betrachtung belanglos.

Nach bekannten Sätzen ist

$$\int_{S_r} \frac{1}{\varrho}\, d\sigma = \begin{cases} \frac{4\pi r^2}{r'} & \text{für } r' \geqq r, \\ 4\pi r & \text{für } r' \leqq r, \end{cases} \tag{33}$$

so daß wir für (32) wegen

$$\psi(r) = -\frac{4\pi}{r^2} \int_0^r f(r') r'^2\, dr', \qquad {}_0\varrho = r', \qquad \int_{S_r} \frac{1}{{}_0\varrho}\, d\sigma = \frac{4\pi r^2}{r}$$

auch

$$\frac{1}{r^2} \int_0^r f(r') r'^2\, dr' \int_{S_r} \zeta(\tau)\, d\sigma + \int_0^r df(r') \int_{S_{r'}} \zeta(\tau')\, d\sigma' \left(r - \frac{r^2}{r'}\right) = 0 \tag{34}$$

schreiben können.

Aus (25) folgt, wenn wir $Y_{01} = 1$ annehmen und für ζ_{01} einfacher ζ_0 setzen,

$$\int_{S_r} \zeta(\tau)\, d\sigma = 4\pi r^2 \zeta_0(r), \qquad \int_{S_{r'}} \zeta(\tau')\, d\sigma' \left(r - \frac{r^2}{r'}\right) = 4\pi r'^2 \zeta_0(r') \left(r - \frac{r^2}{r'}\right), \tag{35}$$

und (34) geht über in

$$\zeta_0(r) \int_0^r f(r') r'^2\, dr' + r \int_0^r \zeta_0(r')\, r'(r' - r)\, df(r') = 0. \tag{36}$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß $\zeta_0(r) \equiv 0$ ist[85]).

Man überzeugt sich vor allem leicht, daß $\zeta_0(r)$ jedenfalls in $\langle 0, \Re \rangle$ stetig ist. Dies ist einleuchtend für alle $r > 0$ und $< \Re$, die nicht Sprungstellen von $f(r)$ sind. Beim Passieren einer Sprungstelle von $f(r)$ ändert sich der zweite Summand in (36) des Faktors $r' - r$ unter dem Integralzeichen wegen stetig, also auch dort bleibt $\zeta_0(r)$ stetig. Ebenso verhält sich $\zeta_0(r)$ für $r = 0$ und $r = \Re$ stetig[86]).

Es sei jetzt

$$M_r = \operatorname{Max} |\zeta_0(r')| \text{ in } 0 \leqq r' \leqq r, \qquad f(r') \geqq N > 0 \quad (0 \leqq r' \leqq \Re), \tag{37}$$

somit

$$\int_0^r f(r') r'^2\, dr' \geqq N \frac{r^3}{3}, \tag{38}$$

$$\left| \int_0^r \zeta_0(r')(r' - r) r'\, df(r') \right| < r^2 \int_0^r |\zeta_0(r')|\, |df(r')| < r^2 M_r \int_0^r |df(r')|,$$

---

[85]) In den unmittelbar folgenden Ausführungen wird bezüglich der Funktion $f(r)$ lediglich vorausgesetzt, daß sie nicht zunimmt, dabei nicht notwendig stetig ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $f(+0) = f(0)$, $f(\Re) = f(\Re - 0)$ voraussetzen. Man überzeugt sich leicht, daß es gleichgültig ist, welchen Wert man $f(r)$ an einer Sprungstelle im Innern von $\langle 0, \Re \rangle$ erteilt.

[86]) Da $f(+0) = f(0)$ gilt, so ist, wie man sich leicht überzeugt, $\lim_{r \to 0} \int_0^r |df(r')| = 0$.

folglich wegen (36)

$$|\zeta_0(r)| \leqq \frac{3M_r}{N} \int_0^r |df(r')|. \tag{39}$$

Wir nehmen einen Wert $\hat{r}$ so klein an, daß

$$\int_0^{\hat{r}} |df(r')| < \frac{N}{3} \tag{40}$$

gilt[86]). In dem Intervall $0 \leqq r \leqq \hat{r}$ ist gewiß $\zeta_0(r) \equiv 0$. Sonst wäre in $\langle 0, \hat{r}\rangle$ nach (39) und (40) $|\zeta_0(r)| < M_{\hat{r}}$ also auch $\mathrm{Max}|\zeta_0(r)| < M_{\hat{r}}$, was einen Widerspruch bedeutet.

Die Beziehung (36) nimmt jetzt die Form

$$\zeta_0(r) \int_0^r f(r') r'^2 dr' + r \int_r^{\mathfrak{R}} \zeta_0(r')(r'-r) r' df(r') = 0 \qquad (r \leqq \mathfrak{R}) \tag{41}$$

an. Wir setzen nunmehr

$$\mathfrak{M}_r = \mathrm{Max}|\zeta_0(r')| \text{ in } \langle \hat{r}, r\rangle \tag{42}$$

und erhalten

$$\left| r \int_{\hat{r}}^r \zeta_0(r')(r'-r) r' df(r') \right| \leqq \mathfrak{M}_r \mathfrak{R}^2 \int_{\hat{r}}^r (r-r') |df(r')|, \tag{43}$$

somit wegen (38) für $r > \hat{r}$

$$|\zeta_0(r)| < \frac{3\mathfrak{R}^2}{N\hat{r}^3} \mathfrak{M}_r (r-\hat{r}) \int_{\hat{r}}^r |df(r')|. \tag{44}$$

Aus (42) und (44) schließen wir, daß in dem Intervalle $\langle \hat{r}, \dot{r}\rangle$ $(\dot{r} \leqq \mathfrak{R})$ mit der Eigenschaft, daß

$$\dot{r} - \hat{r} < \frac{N\hat{r}^3}{3\mathfrak{R}^2} \frac{1}{\int_0^{\dot{r}} |df(r')|} \tag{45}$$

gilt, $\zeta_0(r)$ identisch verschwindet.

Nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen der zuletzt durchgeführten Überlegung gelangen wir zu der Erkenntnis, daß $\zeta_0(r)$ in dem Intervall $\langle 0, \mathfrak{R}\rangle$ verschwindet.

Betrachten wir jetzt die Beziehung

$$\psi(r)\zeta_n(r) - \frac{4\pi}{(2n+1)r^{n+1}} \int_0^r \zeta_n(r')(r')^{n+2} df(r') - \frac{4\pi r^n}{2n+1} \int_r^{\infty} \zeta_n(r') \frac{1}{(r')^{n-1}} df(r') = 0 \qquad (n \geqq 1) \tag{46}$$

und beweisen, daß sie nur für $n = 1$ beschränkte, von Null verschiedene Lösungen hat.

Es ist vor allem leicht, zu sehen, daß die Integralgleichung

$$(47)\quad \psi(r)\zeta_1(r) - \frac{4\pi}{3r^2}\int_0^r \zeta_1(r')\,r'^3\,df(r') - \frac{4\pi r}{3}\int_r^\infty \zeta_1(r')\,df(r') = 0,$$

in die (46) für $n=1$ übergeht, durch $\zeta_1(r)\equiv 1$ befriedigt wird. Diese Lösung führt zu den eingangs gefundenen trivialen Nullösungen u_1, u_{11}, u_{12}.

In der Tat ist, wie eine teilweise Integration lehrt,

$$(48)\quad \int_0^r r'^3\,df(r') = r^3 f(r) - 3\int_0^r r'^2 f(r')\,dr', \qquad \int_r^\infty df(r') = -f(r),^{87})$$

somit

$$(49)\quad \frac{4\pi}{3r^2}\int_0^r r'^3\,df(r') + \frac{4\pi r}{3}\int_r^\infty df(r')$$

$$= \frac{4\pi r}{3}f(r) - \frac{4\pi}{r^2}\int_0^r r'^2 f(r')\,dr' - \frac{4\pi r}{3}f(r) = -\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r f(r')\,r'^2\,dr' = \psi(r),$$

so daß $\zeta_1\equiv 1$ die Gleichung (47) tatsächlich befriedigt.

Die Gleichung (47) besitzt keine weiteren beschränkten, von der Lösung $\zeta_1\equiv 1$ linear unabhängigen Lösungen. Vor allem überzeugt man sich leicht, daß alle diese Lösungen stetig sein müßten, Es sei nun $\bar{\xi}_1(r)$ eine Lösung von (47), und es möge zunächst $\bar{\xi}_1(0)=0$ sein. Läßt man in

$$(50)\quad \bar{\xi}_1(r) - \frac{4\pi}{3r^3\psi(r)}\int_0^r \bar{\xi}_1(r')\,r'^3\,df(r') - \frac{4\pi r}{3\psi(r)}\int_r^\infty \bar{\xi}_1(r')\,df(r') = 0$$

r gegen Null gehen, so findet man

$$\lim_{r\to 0}\int_0^r |df(r')| = 0, \qquad \lim_{r\to 0}\bar{\xi}_1(r) = 0, \qquad \int_0^r \bar{\xi}_1(r')\,r'^3\,df(r') = o(r^3),$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^3\psi(r)}\int_0^r \bar{\xi}_1(r')\,r'^3\,df(r') = 0, \qquad \lim_{r\to 0}\frac{r}{\psi(r)} \neq 0,$$

folglich

$$(51)\quad \int_0^\infty \bar{\xi}_1(r')\,df(r') = 0.$$

Die Gleichung (50) nimmt jetzt darum die Gestalt

$$(52)\quad \psi(r)\bar{\xi}_1(r) + \frac{4\pi}{3r^2}\int_0^r \bar{\xi}_1(r')[r^3 - r'^3]\,df(r') = 0, \qquad \psi(r) = -\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r f(r')\,r'^2$$

---

87) Es sei daran erinnert, daß $f(r)$ für $r>\mathfrak{R}$ verschwindet.

an. Es sei

$$(53)\quad \bar{M}_r = \mathrm{Max}\,|\bar{\xi}_1(r')| \text{ in } 0 \leqq r' \leqq r,\ f(r') \geqq N > 0 \quad (0 \leqq r' \leqq \mathfrak{R}).$$

Aus (52) folgt

$$(54)\quad |\psi(r)| \geqq \frac{4\pi}{3} N r,\ |\bar{\xi}_1(r)| < \frac{4\pi}{3r^3} \cdot \frac{3}{4\pi r N} r^3 \bar{M}_r \int_0^r |df(r')| = \frac{\bar{M}_r}{N} \int_0^r |df(r')|.$$

Wie wir wissen (vgl. [86]), ist $\lim_{r \to 0} \int_0^r |df(r')| = 0$. Wird jetzt $\hat{r}$ der Bedingung

$$\int_0^{\hat{r}} |df(r')| < N$$

gemäß gewählt, so gilt für alle r in dem Intervalle $\langle 0, \hat{r} \rangle$ wegen (54)

$$|\bar{\xi}_1(r)| < \bar{M}_{\hat{r}},$$

was zu einem Widerspruch führt, falls $\bar{\xi}_1(r)$ in $\langle 0, \hat{r} \rangle$ nicht identisch verschwindet. Also ist $\bar{\xi}_1(r) \equiv 0$ für $0 \leqq r \leqq \hat{r}$, und die Gleichung (52) nimmt die Form

$$(55)\qquad r^3 \psi(r) \bar{\xi}_1(r) + \frac{4\pi}{3} \int_{\hat{r}}^{r} \bar{\xi}_1(r')(r^3 - r'^3)\, df(r') = 0$$

an. Jetzt gilt für alle $\hat{r} \leqq r \leqq \mathfrak{R}$

$$r^3 |\psi(r)| > \frac{4\pi}{3} N \hat{r}^3,$$

darum nach (55) mit $\overline{\mathfrak{M}}_r = \mathrm{Max}\,|\bar{\xi}_1(r')|$ in $\langle \hat{r}, r \rangle$

$$(56)\quad |\bar{\xi}_1(r)| < \frac{4\pi}{3} \overline{\mathfrak{M}}_r \frac{3}{4\pi N \hat{r}^3} (r^3 - \hat{r}^3) \int_0^{\infty} |df(r')| < \overline{\mathfrak{M}}_r \frac{3\mathfrak{R}^2 (r - \hat{r})}{N \hat{r}^3} \int_0^{\infty} |df(r')|.$$

Hieraus folgt augenscheinlich, daß $\bar{\xi}_1(r)$ für alle r in dem Intervalle $\langle \hat{r}, \dot{r} \rangle$,

$$\dot{r} - \hat{r} \leqq \frac{N \hat{r}^3}{3\mathfrak{R}^2 \int_0^{\infty} |df(r)|} \quad (\dot{r} \leqq \mathfrak{R}),$$

identisch verschwindet. Nach einer endlichen Anzahl von Wiederholungen dieser Überlegung findet man, daß $\bar{\xi}_1$ in dem Intervall $\langle 0, \mathfrak{R} \rangle$ gleich Null ist. Die Integralgleichung (50) hat also, wie wir sehen, keine für $r = 0$ verschwindende Lösung. Wäre nun $\xi_1(r)$ eine von $\zeta_1(r) \equiv 1$ verschiedene Lösung, so wäre $\xi_1(r) - \xi_1(0)\zeta_1(r)$ eine für $r = 0$ verschwindende Lösung, und es müßte somit

$$\xi_1(r) - \xi_1(0)\zeta_1(r) \equiv 0, \qquad \xi_1(r) \equiv \xi_1(0)\zeta_1(r)$$

sein. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Es sei schließlich $n > 1$. Es handelt sich also um die Gleichung

$$(57)\qquad \zeta_n(r) - \frac{4\pi}{(2n+1)r^{n+1}\psi(r)}\int_0^r \zeta_n(r')(r')^{n+2}\,df(r') - \frac{4\pi r^n}{(2n+1)\psi(r)}\int_r^\infty \zeta_n(r')\frac{1}{(r')^{n-1}}\,df(r') = 0 \qquad (n>1).$$

Wir setzen $M_n =$ ob. Grenze $|\zeta_n(r)|$ in $\langle 0, \Re\rangle$ und wählen, unter ε eine beliebig kleine Zahl verstanden, δ so klein, daß

$$\int_0^\delta |df(r')| < \varepsilon\frac{2n+1}{9}\frac{N}{M_n}$$

gilt. Wir finden für $r < \delta$

$$(58)\qquad \left|\int_r^\infty df(r')\zeta_n(r')\frac{1}{r'^{n-1}}\right| < \frac{1}{r^{n-1}}M_n\int_r^\delta |df(r')| + M_n\int_\delta^\infty |df(r')|\frac{1}{r'^{n-1}} < \frac{(2n+1)N\varepsilon}{9r^{n-1}} + M_n c_n \qquad (c_n \text{ konstant}),$$

darum wegen $|\psi(r)| \geqq \frac{4\pi}{3}Nr$ nach einer leichten Umformung

$$\left|\frac{4\pi r^n}{(2n+1)\psi(r)}\int_r^\infty df(r')\zeta_n(r')\frac{1}{r'^{n-1}}\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{3c_n M_n r^{n-1}}{(2n+1)N},$$

und dieser Ausdruck ist für hinreichend kleine r, etwa $r \leqq \delta_1 < \delta$, kleiner als $\frac{2\varepsilon}{3}$. Weiter ist

$$\left|\frac{4\pi}{(2n+1)r^{n+1}\psi(r)}\int_0^r df(r')\zeta_n(r')r'^{n+2}\right| < \frac{4\pi M_n r^{n+2}}{(2n+1)r^{n+1}|\psi(r)|}\int_0^r |df(r')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $r \leqq \delta_2 \leqq \delta_1$. Alles in allem ist für alle $r \leqq \delta_2$ augenscheinlich $|\zeta_n(r)| < \varepsilon$; demnach finden wir endgültig $\zeta_n(0) = 0$.

Es ist zunächst festzustellen, daß $\zeta_n(r)$ in $0 < r < \Re$ eine auch noch an den Unstetigkeitsstellen von $f(r)$ stetige Ableitung hat. Man findet[87a]) zunächst aus (57) für $0 < r < \Re$ etwa für den rechtsseitigen Differentialquotienten $(h > 0)$

$$(59)\qquad \frac{\dot{d}\zeta_n}{dr} - \frac{4\pi}{2n+1}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^{n+1}\psi(r)}\right)\right]^{r+0}\int_0^{r+0}\zeta_n(r')(r')^{n+2}\,df(r') - \frac{4\pi}{2n+1}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{r^n}{\psi(r)}\right)\right]^{r+0}\int_{r+0}^\infty \zeta_n(r')\frac{1}{(r')^{n-1}}\,df(r')$$
$$- \lim_{h\to 0}\frac{4\pi}{(2n+1)\psi(r)}\frac{1}{h}\left\{\int_r^{r+h}\frac{(r')^{n+2}}{r^{n+1}}\zeta_n(r')\,df(r') - \int_r^{r+h}\frac{r^n}{(r')^{n-1}}\zeta_n(r')\,df(r')\right\} = 0.$$

[87a]) Vgl. loc. cit. [89]), S. 20—24.

Es ist nun

$$\zeta_n(r')\left[\frac{(r')^{n+2}}{r^{n+1}}-\frac{r^n}{(r')^{n-1}}\right]df(r')=\frac{1}{h}\int_r^{r+h}\zeta_n(r')\frac{(r'-r)(r'^{2n}+r'^{2n-1}r+\ldots+r^{2n})}{r^{n+1}r'^{n-1}}df(r')$$

und der Ausdruck rechter Hand konvergiert, wie man sich ohne Mühe überzeugt, für $h\to 0$ gegen Null. Es ist demnach

$$(60)\qquad \frac{\dot{d}\zeta_n}{dr}-\frac{4\pi}{2n+1}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^{n+1}\psi(r)}\right)\right]^{r+0}\int_0^{r+0}\zeta_n(r')(r')^{n+2}df(r')$$

$$-\frac{4\pi}{2n+1}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{r^n}{\psi(r)}\right)\right]^{r+0}\int_{r+0}^{\infty}\zeta_n(r')\frac{1}{(r')^{n-1}}df(r')=0.$$

Eine analoge Beziehung gilt für den linksseitigen Differentialquotienten $\frac{\bar{d}\zeta_n}{dr}$; aus Gründen der Stetigkeit gilt diese Beziehung auch für $r=\Re$. Wie man sich ferner überzeugt, ist an einer Sprungstelle r von $f(r)$

$$\frac{\dot{d}\zeta_n}{dr}-\frac{\bar{d}\zeta_n}{dr}=\frac{4\pi}{2n+1}\zeta_n(r)\,r^{n+2}[f]_{r-0}^{r+0}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^{n+1}\psi(r)}\right)\right]^{r+0}$$

$$-\frac{4\pi}{2n+1}\zeta_n(r)\,\frac{1}{r^{n-1}}[f]_{r-0}^{r+0}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{r^n}{\psi(r)}\right)\right]^{r+0}$$

$$\frac{4\pi}{n+1}\frac{1}{r^{n+1}}\frac{4\pi[f]_{r-0}^{r+0}}{\psi^2}\int_0^{r-0}\zeta_n(r')(r')^{n+2}df(r')+\frac{4\pi}{2n+1}r^n\frac{4\pi[f]_{r-0}^{r+0}}{\psi^2}\int_{r-0}^{\infty}\zeta_n(r')\frac{1}{(r')^{n-1}}df(r')=0$$

mit Rücksicht auf (57), folglich auch

$$(61)\qquad \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{\zeta_n}{r}\right)\right]_{r-0}^{r+0}=0.$$

Also existiert $\frac{d\zeta_n}{dr}$ in $(0,\Re)$ und ist dort stetig und konvergiert für $r\to\Re$ gegen einen bestimmten Wert. Weiter folgt fast unmittelbar, daß $\psi(r)\frac{d}{dr}\zeta_n(r)$ beschränkt ist.

Jetzt liefert (57) nach einer teilweisen Integration, wie man sich ohne Mühe überzeugt, für alle r in $(0,\Re)$

$$\zeta_n(r)+\frac{4\pi}{(2n+1)r^{n+1}\psi(r)}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^r f(r')\frac{d}{dr'}(\zeta_n(r')(r')^{n+2})\,dr'$$

$$+\frac{4\pi r^n}{(2n+1)\psi(r)}\int_r^{\Re}f(r')\frac{d}{dr'}\left(\frac{\zeta_n(r')}{(r')^{n-1}}\right)dr'+\frac{4\pi}{(2n+1)r^{n+1}\psi(r)}\lim_{\varepsilon\to 0}f(\varepsilon)\zeta_n(\varepsilon)\varepsilon^{n+2}$$

$$-\frac{4\pi}{2n+1}\frac{f(r)\zeta_n(r)r^{n+2}}{r^{n+1}\psi(r)}-\frac{4\pi r^n}{(2n+1)\psi(r)}\left[f(r)\frac{\zeta_n(r)}{r^{n-1}}\right]_r^{\infty}=0,$$ [88])

---

[88]) Wir setzen in (57) $\int_0^r\zeta_n(r')\frac{(r')^{n+2}}{r^{n+1}}df(r')=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^r\zeta_n(r')\frac{(r')^{n+2}}{r^{n+1}}df(r')$.

kürzer

$$(62)\qquad \zeta_n(r)+\frac{4\pi}{(2n+1)r^{n+1}\psi(r)}\int_0^r f(r')\frac{d}{dr'}\left(\zeta_n(r')(r')^{n+2}\right)dr' + \frac{4\pi r^n}{(2n+1)\psi(r)}\int_r^{\mathfrak{R}} f(r')\frac{d}{dr'}\left(\frac{\zeta_n(r')}{(r')^{n-1}}\right)dr'=0,$$

und diese Gleichung gilt aus Gründen der Stetigkeit auch für $r=0$ und $r=\mathfrak{R}$.

Wir setzen jetzt

$$(63)\qquad \zeta_n = r z_n$$

und erhalten nach einer naheliegenden Umformung, da

$$\psi(r)=-\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r f(r')r'^2\,dr'$$

ist,

$$(64)\qquad z_n(r)\int_0^r f(r')r'^2\,dr'-\frac{1}{(2n+1)r^n}\int_0^r f(r')\frac{d}{dr'}\left(z_n(r')(r')^{n+3}\right)dr' - \frac{r^{n+1}}{2n+1}\int_r^{\mathfrak{R}} f(r')\frac{d}{dr'}\left(\frac{z_n(r')}{(r')^{n-2}}\right)dr'=0.^{89})$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiation und Zusammenziehung, wie man leicht verifiziert,

$$(65)\qquad \frac{dz_n}{dr}\int_0^r f(r')r'^2\,dr'+\frac{n}{2n+1}\frac{1}{r^{n+1}}\int_0^r f(r')\frac{d}{dr'}\left(z_n(r')(r')^{n+3}\right)dr' - \frac{(n+1)r^n}{2n+1}\int_r^{\mathfrak{R}} f(r')\frac{d}{dr'}\left(\frac{z_n(r')}{(r')^{n-2}}\right)dr'=0.$$

Eine nochmalige Differentiation und Zusammenziehung liefert für alle Stetigkeitsstellen von $f(r)$

$$(66)\qquad \frac{d^2z_n}{dr^2}\int_0^r f(r')r'^2dr'+2r^2f(r)\frac{dz_n}{dr}+2f(r)rz_n$$

$$-\frac{n(n+1)}{2n+1}\frac{1}{r^{n+2}}\int_0^r f(r')\frac{d}{dr'}\left(z_n(r')(r')^{n+3}\right)dr'-\frac{n(n+1)}{2n+1}r^{n-1}\int_r^{\mathfrak{R}} f(r')\frac{d}{dr'}\left(\frac{z_n(r')}{(r')^{n-2}}\right)dr$$

89) Mit der Differentialgleichung (64) und der zugehörigen nichthomogenen Differentialgleichung beschäftigt sich eingehend Liapounoff in der Abhandlung Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg **15**, Nr. 10 (1904), 66 S.

Man bestätigt jetzt leicht durch Einsetzen, daß z_n an den Stetigkeitsstellen die Differentialgleichung

$$(67) \qquad \left(r^3 \frac{d^2 z_n}{dr^2} - n(n+1) z_n\right) \int_0^r f(r') r'^2 dr' + 2 f(r) r^3 \frac{dr z_n}{dr} = 0$$

und die Randbedingungen

$$(68) \qquad n z_n + r \frac{dz_n}{dr} = 0 \quad \text{für} \quad r = \Re, \quad z_n = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

erfüllt.

Hieraus folgt, wie es sich zeigen läßt, daß z_n identisch verschwindet. Der ursprüngliche Beweis findet sich in der in [89]) genannten Abhandlung von Liapounoff. Wir bringen die Gleichung (67) auf die Form[90])

$$(69) \qquad L(z_n) + \lambda t z_n \equiv \frac{d}{dr}\left(p \frac{dz_n}{dr}\right) - q z_n + \lambda t z_n = 0$$

mit

$$p = \left(\int_0^r f(r') r'^2 dr'\right)^2 \geqq 0, \qquad q = \frac{6}{r^2}\left(\int_0^r f(r') r'^2 dr'\right)^2 - 2 f(r) r \int_0^r f(r') r'^2 dr' \geqq 0,$$

$$t = \frac{p}{r^4} \geqq 0, \qquad \lambda = 6 - n(n+1)$$

und bedienen uns der Greenschen Formel

$$(71) \qquad \int_0^{\Re} \left(p \left(\frac{dz_n}{dr}\right)^2 + q z_n^2\right) dr = - \int_0^{\Re} z_n L(z_n) dr + \left[p z_n \frac{dz_n}{dr}\right]_0^{\Re}.$$

Im vorliegenden Falle ist, da, wie wir gesehen haben, $\psi(r) \frac{d}{dr} \zeta_n(r)$ beschränkt ist

$$\frac{dz_n}{dr} = O(r^{-2}), \quad z_n = o(r^{-1}), \quad p = O(r^6), \quad \text{darum} \quad p z_n \frac{dz_n}{dr} \to 0 \text{ für } r \to 0,$$

ferner wegen (68) für $r = \Re$

$$\frac{dz_n}{dr} = -\frac{n}{\Re} z_n, \quad \text{demnach} \quad p z_n \frac{dz_n}{dr} = -\frac{n p z_n^2}{\Re} = -\frac{n}{\Re}\left(\int_0^{\Re} f(r') r'^2 dr'\right)^2 (z_n(\Re))^2 \leqq 0,$$

somit alles in allem

$$\int_0^{\Re} \left(p \left(\frac{dz_n}{dr}\right)^2 + q z_n^2 - \lambda t z_n^2\right) dr \leqq 0.$$

Hieraus folgt aber, da für $n \geqq 2$ augenscheinlich $\lambda \leqq 0$ ist, $z_n \equiv 0$, w. z. b. w.

---

[90]) Die folgenden Entwicklungen verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn E. Hölder.

Die vorstehenden recht umständlichen Überlegungen, die freilich den Zusammenhang unserer Integralgleichung mit einer Differentialgleichung aufdecken, lassen sich, worauf mich nachträglich Herr Kostitzin freundlicherweise aufmerksam machte, durch die folgende überaus einfache Schlußweise ersetzen.

Die Gleichung (57), die wir in der Form

$$(*)\quad \psi(r)\zeta_n(r) = \frac{4\pi}{(2n+1)r^2}\int_0^r \zeta_n(r')\left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1} r'^2\, df(r') + \frac{4\pi r}{2n+1}\int_r^\infty \zeta_n(r')\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1} df(r'$$

schreiben können, liefert mit $|\zeta_n(r)| < L$

$$(**)\quad |\psi(r)\zeta_n(r)| \leqq -\frac{4\pi L}{(2n+1)r^2}\int_0^r r'^2\, df(r') - \frac{4\pi r L}{(2n+1)}\int_r^\infty df(r') = -\frac{4\pi L}{(2n+1)r^2}\Big\{[r'^2$$

$$-\int_0^r 3r'^2 f(r')\,dr'\Big\} - \frac{4\pi r L}{2n+1}[f(r')]_r^\infty = \frac{4\pi L}{(2n+1)r^2}\frac{3r^2}{4\pi}|\psi(r)|,$$

somit

$$|\zeta_n(r)| \leqq \frac{3L}{2n+1},$$

darum für $n > 1$ gewiß $\zeta_n(r) \equiv 0$.

Wir kehren jetzt zu der Voraussetzung $\omega \neq 0$ zurück. Die Integralgleichungen (16) und (6) haben gewiß u_1 und u_2 zu Nullösungen. Hat $T+S$ Rotationssymmetrie um die Gerade $z=0$, so ist überdies, wie wir wissen, $u_2 \equiv 0$.

Es sei zur Abkürzung für alle τ in $T+S$

$$(71a)\quad \boldsymbol{K}(\tau,\tau') = \begin{cases} -\dfrac{1}{\psi(\tau)}\dfrac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}\dfrac{1}{\varrho(\tau,\tau')} & \text{für } \tau' \text{ in } T, \text{ jedoch nicht auf } \mathfrak{S}, \\ \dfrac{f(\sigma')}{\psi(\tau)}\dfrac{1}{\varrho(\tau,\sigma')}, & \tau' = \sigma' \text{ auf } S, \\ -\dfrac{[f(\sigma')]}{\psi(\tau)}\dfrac{1}{\varrho(\tau,\sigma')}, & \tau' = \sigma' \text{ auf } \mathfrak{S}, \end{cases}$$

$d\tau = d\tau$ in T, jedoch nicht auf $\mathfrak{S}$, $= d\sigma$ auf S und $\mathfrak{S}$ gesetzt. Die Integralgleichung (16) nimmt damit die Form

$$(72)\qquad \zeta(\tau) + \int \boldsymbol{K}(\tau,\tau')\,\zeta(\tau')\,d\tau' = 0$$

an. Die hierzu adjungierte Integralgleichung

$$(73)\qquad w(\tau') + \int \boldsymbol{K}(\tau,\tau')\,w(\tau)\,d\tau = 0$$

faßt, wenn

$$(74)\qquad w(\tau') = \begin{cases} w(\tau') \text{ für } \tau' \text{ in } T, \text{ jedoch nicht auf } \mathfrak{S}, \\ w_S(\sigma'), \quad \tau' = \sigma' \text{ auf } S, \\ w_{\mathfrak{S}}(\sigma'), \quad \tau' = \sigma' \text{ auf } \mathfrak{S} \end{cases}$$

gesetzt wird, voll ausgeschrieben die drei simultanen homogenen Integralgleichungen

$$\varphi(\tau') - \int_T \frac{1}{\psi(\tau)} \frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho(\tau,\tau')} w(\tau)\, d\tau - \int_S \frac{1}{\psi(\sigma)} \frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho(\sigma,\tau')} w_S(\sigma)\, d\sigma - \int_{\mathfrak{S}} \frac{1}{\psi(\sigma)} \frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho(\sigma,\tau')} w_{\mathfrak{S}}(\sigma)\, d\sigma = 0,$$

$$\varphi_S(\sigma') + \int_T \frac{f(\sigma')}{\psi(\tau)} \frac{1}{\varrho(\tau,\sigma')} w(\tau)\, d\tau + \int_S \frac{f(\sigma')}{\psi(\sigma)} \frac{1}{\varrho(\sigma,\sigma')} w_S(\sigma)\, d\sigma + \int_{\mathfrak{S}} \frac{f(\sigma')}{\psi(\sigma)} \frac{1}{\varrho(\sigma,\sigma')} w_{\mathfrak{S}}(\sigma)\, d\sigma = 0,$$

$$\varphi_{\mathfrak{S}}(\sigma') - \int_T \frac{[f(\sigma')]}{\psi(\tau)} \frac{1}{\varrho(\tau,\sigma')} w(\tau)\, d\tau - \int_S \frac{[f(\sigma')]}{\psi(\sigma)} \frac{1}{\varrho(\sigma,\sigma')} w_S(\sigma)\, d\sigma - \int_{\mathfrak{S}} \frac{[f(\sigma')]}{\psi(\sigma)} \frac{1}{\varrho(\sigma,\sigma')} w_{\mathfrak{S}}(\sigma)\, d\sigma = 0$$

zusammen[91]). Man verifiziert leicht, daß, wenn $\zeta(\tau)$ eine Lösung der Gleichung (16), beispielsweise u_1 oder u_2 bezeichnet, das System

$$\begin{aligned} w(\tau') &= -\frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'} \psi(\tau') \zeta(\tau'), \\ w_S(\sigma') &= \quad f(\sigma') \psi(\sigma') \zeta(\sigma'), \\ w_{\mathfrak{S}}(\sigma') &= -[f(\sigma')] \psi(\sigma') \zeta(\sigma') \end{aligned} \tag{76}$$

die Gleichungen (75) befriedigt.

Wir denken uns u_1 und u_2 irgendwie, etwa den Beziehungen

$$\begin{aligned} \int u_1^2(\tau)\, d\tau &= \int_T u_1^2(\tau)\, d\tau + \int_{S+\mathfrak{S}} u_1^2(\sigma)\, d\sigma = 1, \\ \int u_2^2(\tau)\, d\tau &= \int_T u_2^2(\tau)\, d\tau + \int_{S+\mathfrak{S}} u_2^2(\sigma)\, d\sigma = 1 \end{aligned} \tag{77}$$

gemäß normiert[92]). Augenscheinlich ist die „Orthogonalitätsbeziehung"

$$\int u_1 u_2\, d\tau = \int_T u_1 u_2\, d\tau + \int_{S+\mathfrak{S}} u_1 u_2\, d\sigma = 0 \tag{78}$$

erfüllt[93]). Es seien u_1 und u_2 die den analogen Normierungs- und Ortho-

[91]) Vgl. meine in der Fußnote [95]) genannte Arbeit in den Studia mathematica.

[92]) Um die Vorstellungen zu fixieren, wird angenommen, daß u_2 nicht identisch verschwindet. Ebensogut hätte man übrigens für (77) auch

$$\int \frac{\partial f}{\partial \nu} \psi(\tau)\, u_1^2\, d\tau = \int \frac{\partial f}{\partial \nu} \psi(\tau)\, u_2^2\, d\tau = 1 \tag{77'}$$

setzen können. (Auf S und $\mathfrak{S}$ ist hierin $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ entsprechend durch $-f$ und $[f]$ zu ersetzen.)

[93]) Auch die zu (77') gehörige Orthogonalitätsbeziehung

$$\int \frac{\partial f}{\partial \nu} \psi(\tau)\, u_1 u_2\, d\tau = 0 \tag{78'}$$

ist im vorliegenden Falle erfüllt.

gonalisierungsbeziehungen genügenden Nullösungen der Integralgleichung (73),

$$\int \mathfrak{u}_1^2(\tau)\,d\tau = \int_T \mathfrak{u}_1^2(\tau)\,d\tau + \int_{S+\mathfrak{S}} \mathfrak{u}_1^2(\sigma)\,d\sigma = 1, \quad \int \mathfrak{u}_2^2\,d\tau = \int_T \mathfrak{u}_2^2\,d\tau + \int_{S+\mathfrak{S}} \mathfrak{u}_2^2\,d\sigma =$$

(79)

$$\int \mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2\,d\tau = \int_T \mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2\,d\tau + \int_{S+\mathfrak{S}} \mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2\,d\sigma = 0.$$

Offenbar ist, unter Zugrundelegung der in (74), (76) benutzten Schreibweise, z. B.

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_1(\tau) &= -\frac{\partial f(\tau)}{\partial \nu}\psi(\tau)\,\mathfrak{u}_1(\tau)\cdot C^{-1}, \\ \mathfrak{u}_{1S}(\sigma) &= f(\sigma)\,\psi(\sigma)\,\mathfrak{u}_1(\sigma)\cdot C^{-1}, \\ \mathfrak{u}_{1\mathfrak{S}}(\sigma) &= -[f(\sigma)]\,\psi(\sigma)\,\mathfrak{u}_1(\sigma)\cdot C^{-1} \end{aligned} \tag{80}$$

mit

$$C^2 = \int_T \left(\frac{\partial f(\tau)}{\partial \nu}\right)^2 \psi^2(\tau)\,\mathfrak{u}_1^2(\tau)\,d\tau + \int_S f^2(\sigma)\,\psi^2(\sigma)\,\mathfrak{u}_1^2(\sigma)\,d\sigma + \int_{\mathfrak{S}} [f(\sigma)]^2\psi^2(\sigma)\,\mathfrak{u}_1^2(\sigma)\,d\sigma \quad (C$$

Es sei $\boldsymbol{L}(\tau, \tau')$ der Kern, den man erhält, wenn man in (71a) allemal $\frac{1}{\varrho}$ durch $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}$ ersetzt (vgl. die Formeln (83)). Die Integralgleichung

$$\zeta(\tau) + \int \boldsymbol{L}(\tau, \tau')\,\zeta(\tau')\,d\tau' = 0, \tag{81}$$

die offenbar mit der Integralgleichung (6) identisch ist, hat, wie wir wissen, $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ zu Nullösungen. Wir nehmen an, daß diese „trivialen Nullösungen" ihre einzigen Lösungen sind. Man überzeugt sich leicht, daß $\mathfrak{u}_1(\tau)$ und $\mathfrak{u}_2(\tau)$ die zu (81) adjungierte Integralgleichung

$$\boldsymbol{w}(\tau') + \int \boldsymbol{L}(\tau, \tau')\,\boldsymbol{w}(\tau)\,d\tau = 0$$

befriedigt. Nach bekannten Sätzen hat die Integralgleichung

$$\zeta(\tau) + \int \boldsymbol{M}(\tau, \tau')\,\zeta(\tau')\,d\tau' = 0,$$

$$\boldsymbol{M}(\tau, \tau') = \boldsymbol{L}(\tau, \tau') - \mathfrak{u}_1(\tau)\,\mathfrak{u}_1(\tau') - \mathfrak{u}_2(\tau)\,\mathfrak{u}_2(\tau')$$

keine Nullösungen mehr[95]).

---

[94]) Man könnte aber auch statt dessen den weiteren Betrachtungen die durch $C = 1$ bestimmte Normierung zugrunde legen.

[95]) Vgl. E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen, Math. Annalen 65 (1908), S. 370–399, insb. S. 386–389. A. a. O. handelt es sich um eine Integralgleichung im gewöhnlichen Sinne. Man überzeugt sich leicht, daß das a. a. O. auf S. 388 aufgestellte Kriterium im vorliegenden Falle erfüllt ist. Man vergleiche, was die belasteten Integralgleichungen betrifft, meine kürzlich erschienene Schrift: Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen, Berlin 1931, S. 29, und

(Fortsetzung der Fußnote [95]) auf nächster Seite.)

§ 4.

Auflösung einer inhomogenen linearen Integralgleichung.

Es sei $g(\tau)$ eine in $T+S$ erklärte stetige Funktion, die daselbst stetige, allenfalls auf $\mathfrak{S}$ sprungweise unstetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt und darüber hinaus folgende Eigenschaften hat. Sie ist in bezug auf die $k+1$ Symmetrieebenen von $T+S$ symmetrisch und verschwindet in O. Ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung, die aus Gründen der Symmetrie in O gleich Null sind, verschwinden dort wie r. Dies hat zur Folge, daß sich g in der Umgebung des Koordinatenursprunges wie r^2 verhält. Wir betrachten jetzt die nicht homogene „belastete" Integralgleichung

$$\psi(\tau)\zeta(\tau)+\int_S f'\Big(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\zeta' d\sigma'-\int_{\mathfrak{S}}[f']\Big(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\zeta' d\sigma'-\int_T \zeta'\frac{\partial f'}{\partial \nu'}\Big(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\Big)d\tau'=g(\tau).$$

Es sei ähnlich wie auf S. 546 für alle τ in $T+S$

$$\text{3)}\qquad L(\tau,\tau')=\begin{cases}-\dfrac{1}{\psi(\tau)}\dfrac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}\Big(\dfrac{1}{\varrho(\tau,\tau')}-\dfrac{1}{{}_0\varrho(\tau')}\Big) & \text{für } \tau' \text{ in } T, \text{ jedoch nicht auf } \mathfrak{S},\\ \dfrac{f(\sigma')}{\psi(\tau)}\Big(\dfrac{1}{\varrho(\tau,\sigma')}-\dfrac{1}{{}_0\varrho(\sigma')}\Big), & \tau'=\sigma' \text{ auf } S,\\ -\dfrac{[f(\sigma')]}{\psi(\tau)}\Big(\dfrac{1}{\varrho(\tau,\sigma')}-\dfrac{1}{{}_0\varrho(\sigma')}\Big), & \tau'=\sigma' \text{ auf } \mathfrak{S},\end{cases}$$

$d\tau=d\tau$ in T, jedoch nicht auf $\mathfrak{S}$, $=d\sigma$ auf S und $\mathfrak{S}$ gesetzt. Die Integralgleichung (82) kann kürzer in der Form

$$(84)\qquad \zeta(\tau)+\int L(\tau,\tau')\zeta(\tau')\,d\tau'=\frac{1}{\psi(\tau)}g(\tau)$$

geschrieben werden.

Es sei $\zeta(\tau)$ eine in $T+S$, außer höchstens in O, wo sie sich wie r^{-1} verhält, stetige Lösung dieser Integralgleichung, von der wir überdies

---

meinen Aufsatz: Bemerkungen über belastete Integralgleichungen, Studia mathematica 3 (1931), S. 212–225. A. a. O. handelt es sich allemal um Integralgleichungen mit stetigen Kernen. Die Note in den Studia, in der gewisse Bemerkungen von E. Schmidt und A. Kneser ins einzelne durchgeführt werden, ist speziell mit Hinblick auf die Anwendungen in der Theorie der nichthomogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten abgefaßt worden. Man vergleiche in diesem Zusammenhang auch die allgemeinen Ergebnisse der Abhandlung von Herrn N. Günther: Sur les intégrales de Stieltjes généralisées, Atti del congresso internazionale dei Matematici Bologna 3–10 settembre 1928 (VI), Bd. II, S. 313–324, sowie seine kürzlich erschienene ausführliche Abhandlung: Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes de la physique mathématique, Travaux de l'institut physicomathématique Stekloff, 1932, S. 1–494.

wissen, daß sie die Ebenen der Symmetrie von $T+S$ zu Symmetrieebenen hat. Alsdann ist, wie wir sogleich zeigen werden, $\zeta(\tau)$ in $T+S$ stetig, hat daselbst beschränkte und außer höchstens in O abteilungsweise stetige Ableitungen erster Ordnung und verschwindet im Koordinatenursprunge. Demnach verhält sich $\zeta(\tau)$ in der Umgebung von O wie r. Zum Beweise bringen wir (82) auf die Form (vgl. S. 527)

$$\psi(\tau)\zeta(\tau) = g(\tau) + J_1(\tau) + J_2(\tau) + J_3(\tau) \tag{85}$$

und bemerken, daß $J_1(\tau)$ sich in $T+S$ stetig verhält, in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und in O verschwindet. Des weiteren ist $J_2(\tau)$ in $T+S$ stetig, hat in jedem Stetigkeitsbereich von f, der Rand allemal eingeschlossen, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, in $K+C$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung und verschwindet in O. Was $J_3(\tau)$ betrifft, so ist es in $T+S$ stetig, in O gleich Null und hat in $T+S$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, außer höchstens in O, wo sie sich wie $\log\frac{1}{r}$ verhalten (vgl. S. 528). Demnach ist $J_3(\tau) = O\left(r\log\frac{1}{r}\right)$, nach (85) somit $\zeta(\tau) = O\left(\log\frac{1}{r}\right)$. Nunmehr zeigt es sich, daß $\frac{\partial J_3}{\partial x}$, $\frac{\partial J_3}{\partial y}$, $\frac{\partial J_3}{\partial z}$ in $T+S$ beschränkt sind, demnach $J_3(\tau) = O(r)$ gilt, somit $\zeta(\tau)$ beschränkt ist. In engster Anlehnung an die auf S. 528 ff. in allen Einzelheiten dargestellten Überlegungen läßt sich so weiter die Richtigkeit aller unserer Behauptungen erweisen.

Es sei jetzt $\mathfrak{g}(\tau)$ irgendeine in $T+S$ erklärte stetige Funktion. Betrachten wir die Integralgleichung

$$\zeta(\tau) + \int \boldsymbol{M}(\tau,\tau')\,\zeta(\tau')\,d\tau' = \frac{1}{\psi(\tau)}\mathfrak{g}(\tau). \tag{86}$$

Sie hat, wie wir sogleich sehen werden, eine und nur eine in $T+S$, außer höchstens in O, stetige Lösung, die in der Umgebung des Ursprunges höchstens wie $\frac{1}{r}$ unendlich wird. Ist $\mathfrak{g}(\tau)$ überdies in bezug auf die $k-1$ Symmetrieebenen des Systems symmetrisch, so gilt für $\zeta(\tau)$ das gleiche. Augenscheinlich erfüllt alsdann $\zeta(\tau)$ die Integralgleichung (82), in der diesmal $g(\tau)$ durch $\mathfrak{g}(\tau)$ zu ersetzen ist. Sie besitzt also, wenn $\mathfrak{g}(\tau)$ auch noch die übrigen S. 549 angegebenen Eigenschaften der Funktion $g(\tau)$ hat, beschränkte und in jedem Stetigkeitsbereiche von f, außer höchstens in O, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung und verschwindet im Koordinatenursprung.

Wir setzen

$$\psi(\tau)\zeta(\tau) = \boldsymbol{Z}(\tau)$$

und erhalten zur Bestimmung von $\boldsymbol{Z}(\tau)$ die Integralgleichung

$$\boldsymbol{Z}(\tau) + \int \boldsymbol{P}(\tau,\tau')\,\boldsymbol{Z}(\tau')\,d\tau' = \mathfrak{g}(\tau), \tag{86'}$$

deren Kern $\boldsymbol{P}(\tau,\tau')$ wie folgt erklärt ist.

Es gilt

$$\boldsymbol{P}(\tau,\tau') = \boldsymbol{Q}(\tau,\tau') - \frac{\psi(\tau)}{\psi(\tau')}\left(\mathfrak{u}_1(\tau)\,u_1(\tau') + \mathfrak{u}_2(\tau)\,u_2(\tau')\right),$$

wobei

$$\boldsymbol{Q}(\tau,\tau') = \begin{cases} -\dfrac{1}{\psi(\tau')}\dfrac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}\left(\dfrac{1}{\varrho(\tau,\tau')} - \dfrac{1}{{}_0\varrho(\tau')}\right) \text{ für } \tau' \text{ in } T, \text{ jedoch nicht auf } \mathfrak{S}, \\ \dfrac{f(\sigma')}{\psi(\tau')}\left(\dfrac{1}{\varrho(\tau,\sigma')} - \dfrac{1}{{}_0\varrho(\sigma')}\right), \quad \tau' = \sigma' \text{ auf } S, \\ -\dfrac{[f(\sigma')]}{\psi(\tau')}\left(\dfrac{1}{\varrho(\tau,\sigma')} - \dfrac{1}{{}_0\varrho(\sigma')}\right), \quad \tau' = \sigma' \text{ auf } \mathfrak{S}. \end{cases}$$

Da nach Voraussetzung (vgl. S. 526) $\frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}$ in O wie $(r')^\mu$ verschwindet, so verhalten sich die Ausdrücke $-\frac{1}{\psi(\tau')}\frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}\frac{1}{\varrho(\tau,\tau')}$ bzw. $\frac{1}{\psi(\tau')}\frac{\partial f(\tau')}{\partial \nu'}\frac{1}{{}_0\varrho(\tau')}$ entsprechend wie $\frac{1}{(r')^{1-\mu}\varrho(\tau,\tau')}$ und $\frac{1}{(r')^{2-\mu}}$. Es sei $\boldsymbol{P}^{(2)}(\tau,\tau')$ der zu $\boldsymbol{P}(\tau,\tau')$ gehörige iterierte Kern[96]). Um sein Verhalten für gegen Null konvergierende Werte von r' und $\varrho(\tau,\tau')$ festzustellen, genügt es, wie man unmittelbar sieht, den ersten iterierten Kern des Kernes

$$\frac{1}{(r')^{1-\mu}\varrho(\tau,\tau')} + \frac{1}{(r')^{2-\mu}}, \tag{87}$$

d. h. den Ausdruck

$$\int_T \left(\frac{1}{(r'')^{1-\mu}\varrho(\tau,\tau'')} + \frac{1}{(r'')^{2-\mu}}\right)\left(\frac{1}{(r')^{1-\mu}\varrho(\tau'',\tau')} + \frac{1}{(r')^{2-\mu}}\right) d\tau'' \tag{87'}$$

zu studieren. Die vier Summanden, in die (87′) zerfällt, lassen sich einzeln nach einem von H. Petrini[97]) angegebenen Verfahren abschätzen. Es gilt vor allem

$$\int_T \frac{1}{(r'')^{1-\mu}\varrho(\tau,\tau'')}\,\frac{1}{(r')^{1-\mu}\varrho(\tau'',\tau')}\,d\tau'' \tag{88}$$

$$\leqq \frac{1}{(r')^{1-\mu}}\int_T \frac{d\tau''}{(r'')^{1-\mu}\varrho^2(\tau,\tau'')} + \frac{1}{(r')^{1-\mu}}\int_T \frac{d\tau''}{(r'')^{1-\mu}\varrho^2(\tau'',\tau')}.$$

Um für das erste Integral rechter Hand eine Schranke zu bestimmen, setzt man $r = h$, $x = h\underline{x}$, $y = h\underline{y}$, $z = h\underline{z}$ und findet in naheliegender Schreibweise

$$\int_T \frac{d\tau''}{(r'')^{1-\mu}\varrho^2(\tau,\tau'')} = h^\mu \int_{T_h} \frac{d\underline{\tau}''}{(\underline{r}'')^{1-\mu}\varrho^2(\underline{\tau},\underline{\tau}'')}, \tag{89}$$

---

[96]) Wir schreiben, wie üblich, $\boldsymbol{P}(\tau,\tau') = \boldsymbol{P}^{(1)}(\tau,\tau')$.

[97]) Vgl. H. Petrini, Acta mathematica **31** (1908), S. 127–332, Journal de Mathématiques (6) **5** (1909), S. 127–223.

unter T_h den Bildbereich von T verstanden. Das uneigentliche Integral rechter Hand ist unbedingt konvergent, da die beiden Punkte O und τ, in denen die zu integrierende Funktion unendlich wird, den festen Abstand 1 haben. Im Unendlichen verhält sich die zu integrierende Funktion wie $(r'')^{\mu-3}$. Da T_h in einer Kugel um den Koordinatenursprung vom Radius $\frac{D}{h}$ enthalten ist, unter D den Durchmesser des Bereiches $T+S$ verstanden, so verhält sich $\int_{T_h}$ für kleine h wie $h^{-\mu}$. Das Integral in (89) links ist also beschränkt. In einer ganz ähnlichen Weise kann gezeigt werden, daß auch das zweite Integral in (88) rechts beschränkt ist, somit, daß

$$\int_T \frac{1}{(r'')^{1-\mu}\varrho(\tau,\tau'')}\,\frac{1}{(r')^{1-\mu}\varrho(\tau'',\tau')}\,d\tau'' = O\Big(\frac{1}{(r')^{1-\mu}}\Big)$$

gesetzt werden kann. Durch eine sinngemäße Modifikation der vorstehenden Betrachtungen findet man

$$\int_T \frac{1}{(r'')^{1-\mu}\varrho(\tau,\tau'')}\,\frac{1}{(r')^{2-\mu}}\,d\tau'' = O\Big(\frac{1}{(r')^{2-\mu}}\Big),$$

$$\int_T \frac{1}{(r'')^{2-\mu}}\,\frac{1}{(r')^{1-\mu}\varrho(\tau'',\tau')}\,d\tau'' = O\Big(\frac{1}{(r')^{1-\mu}}\Big),$$

$$\int_T \frac{1}{(r')^{2-\mu}}\,\frac{1}{(r'')^{2-\mu}}\,d\tau'' \qquad = O\Big(\frac{1}{(r')^{2-\mu}}\Big).$$

Der iterierte Kern des Kernes (87) verhält sich, alles in allem, wie $\frac{1}{(r')^{2-\mu}}$. Darum gilt nach den eingangs gemachten Bemerkungen auch

$$P^{(2)}(\tau,\tau') = O\Big(\frac{1}{(r')^{2-\mu}}\Big).$$

Diese Singularität läßt sich auch durch weitere Iterationen nicht beheben. Gleichwohl läßt sich auf die Integralgleichung

$$Z(\tau) - \int P^{(2)}(\tau,\tau')\,Z(\tau')\,d\tau' = f(\tau) \qquad (f(\tau) \text{ in } T+S \text{ stetig})$$

die Fredholmsche Theorie fast ohne weiteres anwenden[98]).

---

[98]) Vgl. L. Lichtenstein, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Die erste Randwertaufgabe für analytische Gebiete mit Ecken, Acta mathematica **36** (1913), S. 345–386. A. a. O. handelt es sich um gewöhnliche (zweidimensionale) Integralgleichungen. Der Übergang zu einer „belasteten" Integralgleichung bedingt lediglich den Ersatz der Differentiale $d\tau_1, \ldots, d\tau_m$ durch die Symbole $d\tau_1, \ldots, d\tau_m$. Vgl. meine in der Fußnote [95]) genannte Note.

Die Integralgleichung (86′) hat keine Nullösungen. Die durch einmalige Iteration gewonnene Integralgleichung kann demgegenüber sehr wohl Nullösungen haben. Dies tritt, wie man weiß, dann ein, wenn $\nu = -1$ ein Eigenwert der Integralgleichung

$$(90) \qquad Z(\tau) + \nu \int \boldsymbol{P}(\tau, \tau') Z(\tau') \, d\tau' = 0$$

ist. In diesem Falle hat $\boldsymbol{P}^{(2)}$ keine Resolvente. Ist auch einer der Werte $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ oder $e^{\frac{4\pi i}{3}}$ ein Eigenwert von (90), so hat auch der zweite iterierte Kern $\boldsymbol{P}^{(3)}(\tau, \tau')$ keine Resolvente. Da nicht alle von 1 verschiedenen Einheitswurzeln Eigenwerte von (90) sein können, sie würden sich ja im Endlichen häufen, so muß es einen iterierten Kern von $\boldsymbol{P}$ geben, der eine Fredholmsche Resolvente besitzt. Es möge dies etwa schon der Kern $\boldsymbol{P}^{(2)}$ sein. Die Gleichung (86′) ist der Integralgleichung

$$(90') \quad Z(\tau) - \int \boldsymbol{P}^{(2)}(\tau, \tau') Z(\tau') \, d\tau' = \mathfrak{g}(\tau) - \int \boldsymbol{P}(\tau, \tau') \mathfrak{g}(\tau') \, d\tau' = \mathfrak{h}(\tau)$$

äquivalent, unter $\mathfrak{h}(\tau)$ eine wie $\mathfrak{g}(\tau)$ in $T + S$ stetige Funktion verstanden. Die Resolvente $\mathfrak{H}^{(2)}(\tau, \tau')$ von $\boldsymbol{P}^{(2)}(\tau, \tau')$ verhält sich in der Umgebung des Koordinatenursprunges wie $\frac{1}{(\tau')^{2-\mu}}$.

Der Fredholmschen Auflösungsformel

$$(*) \qquad Z(\tau) = \mathfrak{h}(\tau) + \int \mathfrak{H}^{(2)}(\tau, \tau') \mathfrak{h}(\tau') \, d\tau'$$

zufolge ist $Z(\tau)$ in $T + S$ stetig. Augenscheinlich wird

$$\zeta(\tau) = \frac{1}{\psi(\tau)} Z(\tau),$$

wie behauptet, höchstens wie $\frac{1}{r}$ unendlich.

Es möge jetzt die Funktion $\mathfrak{g}(\tau)$, die sich diesmal, was ihre Stetigkeits- und Symmetrieeigenschaften betrifft, wie die Funktion $g(\tau)$ verhält, den Ungleichheiten

$$(**) \qquad \left| \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{g}(\tau)}{\psi(\tau)}\right) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{g}(\tau)}{\psi(\tau)}\right) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{g}(\tau)}{\psi(\tau)}\right) \right| \leqq C' \qquad (C' \text{ konstant}),$$

somit auch der Beziehung

$$(***) \qquad \left| \frac{\mathfrak{g}(\tau)}{\psi(\tau)} \right| \leqq \sqrt{3}\, C r$$

genügen. Aus (90′) ergibt sich zunächst

$$|\mathfrak{h}(\tau)| \leqq \alpha^{(1)} C,$$

unter $\alpha^{(1)}$ eine Konstante verstanden, wie später unter $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \ldots$.

Nunmehr folgt aus (*)

$$(\dagger) \qquad |Z(\tau)| \leqq \alpha^{(2)} C, \quad \text{somit} \quad |\zeta(\tau)| \leqq \alpha^{(3)} \frac{C}{r}$$

und weiter, wenn man die Betrachtungen auf S. 549ff. noch einmal aufmerksam durchgeht,

$$(\dagger\dagger) \qquad \left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right| \leqq \hat{\alpha} C \qquad (\hat{\alpha} \text{ konstant}),$$

somit

$$(\dagger\dagger\dagger) \qquad |\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\hat{\alpha} C r.$$

§ 5.

Sukzessive Approximationen.

Wir kehren nach allen diesen Vorbereitungen zu der Integro-Differentialgleichung (4) zurück und schreiben diese im Einklang mit den in § 3 und § 4 eingeführten Bezeichnungen in der Form

$$(91) \quad \zeta(\tau) + \int \boldsymbol{L}(\tau, \tau')\zeta(\tau')\,d\tau' = \frac{1}{\psi(\tau)}\Big[h\tau^2 \mathfrak{f}(\tau) - \alpha \int_{T_1} \chi'\Big(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\Big)d\tau_1' - \lambda R^2$$

$$- \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - {}_0\mathfrak{W}^{(3)} -$$

Hat, wie wir es annehmen wollen, $\zeta(\tau)$ die wiederholt genannten $k+1$ Ebenen zu Symmetrieebenen, so ist, wenn wir $\omega \neq 0$ voraussetzen und annehmen, daß die Integralgleichung (6) nur die trivialen Nullösungen u_1, u_2 hat,

$$(92) \qquad \int u_1' \zeta'\,d\tau' = \int u_2' \zeta'\,d\tau' = 0,$$

und wir können für (91) auch schreiben

$$(93) \quad \zeta(\tau) + \int \boldsymbol{M}(\tau, \tau')\zeta(\tau')\,d\tau' = \frac{1}{\psi(\tau)}\Big[h\tau^2 \mathfrak{f}(\tau) - \alpha \int_{T_1} \chi'\Big(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\Big)d\tau_1' - \lambda R^2$$

$$- \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\zeta^2(a^2+b^2) - 2\lambda\zeta(ax+by) - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots - {}_0\mathfrak{W}^{(2)} - {}_0\mathfrak{W}^{(3)} -$$

$$= \frac{1}{\psi(\tau)}\Big[h\tau^2 \mathfrak{f}(\tau) - \alpha \int_{T_1} \chi'\Big(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\Big)d\tau_1' - \lambda R^2 + \Pi\{\lambda, \zeta\} - {}_0\Pi\{\lambda, \zeta\}\Big].$$

Wir versuchen jetzt, diese Integro-Differentialgleichung durch sukzessive Approximationen aufzulösen, und setzen im Einklang mit den im zweiten Kapitel gebrauchten Bezeichnungen (vgl. S. 509ff.)

$$\overset{1}{\zeta}(\tau)+\int \boldsymbol{M}(\tau,\tau')\overset{1}{\zeta}(\tau')\,d\tau'=\frac{1}{\psi(\tau)}\Big[h\,\mathfrak{r}^2\,\mathfrak{f}(\mathfrak{r})-\alpha\int_{T}\chi'\Big(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\,d\tau'-\lambda R^2\Big]=\frac{1}{\psi(\tau)}\overset{1}{g}(\tau).$$

$$\overset{2}{\zeta}(\tau)+\int \boldsymbol{M}(\tau,\tau')\overset{2}{\zeta}(\tau')\,d\tau'=\frac{1}{\psi(\tau)}\Big[h\,\mathfrak{r}^2\,\mathfrak{f}(\mathfrak{r})-\alpha\int_{\overset{1}{T}}\chi'\Big(\frac{1}{\overset{1}{\varrho}}-\frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}}\Big)\,d\overset{1}{\tau}'-\lambda R^2$$

$$+\Pi\{\lambda,\overset{1}{\zeta}\}-{}_0\Pi\{\lambda,\overset{1}{\zeta}\}\Big]=\frac{1}{\psi(\tau)}\overset{2}{g}(\tau).$$

$$\overset{3}{\zeta}(\tau)+\int \boldsymbol{M}(\tau,\tau')\overset{3}{\zeta}(\tau')\,d\tau'=\frac{1}{\psi(\tau)}\Big[h\,\mathfrak{r}^2\,\mathfrak{f}(\mathfrak{r})-\alpha\int_{\overset{2}{T}}\chi'\Big(\frac{1}{\overset{2}{\varrho}}-\frac{1}{{}_0\overset{2}{\varrho}}\Big)\,d\overset{2}{\tau}'-\lambda R^2$$

$$+\Pi\{\lambda,\overset{2}{\zeta}\}-{}_0\Pi\{\lambda,\overset{2}{\zeta}\}\Big]=\frac{1}{\psi(\tau)}\overset{3}{g}(\tau).$$

. . . . . .

allgemein

$$(95)\quad \overset{n}{\zeta}(\tau)+\int \boldsymbol{M}(\tau,\tau')\overset{n}{\zeta}(\tau')\,d\tau'=\frac{1}{\psi(\tau)}\Big[h\,\mathfrak{r}^2\,\mathfrak{f}(\mathfrak{r})-\alpha\int_{\overset{n-1}{T}}\chi'\Big(\frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}}-\frac{1}{{}_0\overset{n-1}{\varrho}}\Big)\,d\overset{n-1}{\tau}'-\lambda R^2$$

$$+\Pi\{\lambda,\overset{n-1}{\zeta}\}-{}_0\Pi\{\lambda,\overset{n-1}{\zeta}\}\Big]=\frac{1}{\psi(\tau)}\overset{n}{g}(\tau).$$

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, daß die $\overset{n}{g}(\tau)$ sich ganz wie die in § 4 eingeführte Funktion $g(\tau)$ verhalten und zugleich, daß $\overset{n}{\zeta}(\tau)$ Funktionen darstellen, die in $T+S$ stetig sind, die bekannten $k+1$ Symmetrieebenen besitzen, in O verschwinden und beschränkte, in jedem Stetigkeitsbereiche von f, außer höchstens in O stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Dies liegt, was zunächst $\overset{1}{g}(\tau)$ und $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ betrifft, den Ergebnissen des § 4 gemäß auf der Hand[98a]). Den Entwicklungen des ersten Kapitels zufolge (man beachte insbesondere die Ausführungen auf S. 499—506) verhält sich $\overset{2}{g}(\tau)$ wie $\overset{1}{g}(\tau)$, darum $\overset{2}{\zeta}(\tau)$ wie $\overset{1}{\zeta}(\tau)$. Jetzt zeigt sich, daß $\overset{3}{g}(\tau)$ die behaupteten Eigenschaften hat, und dies hat wiederum zur Folge, daß $\overset{3}{\zeta}(\tau)$ sich wie $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ verhält. Sind $|h|$, $|\alpha|$ und $|\lambda|$ hinreichend klein, so kann der Prozeß der sukzessiven Approximationen, wie wir jetzt zeigen wollen, unbegrenzt fortgesetzt werden.

Es sei

$$(96)\quad \boldsymbol{\Omega}=\text{ob. Grenze}\left\{\left|\frac{\partial\overset{n-1}{\zeta}}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial\overset{n-1}{\zeta}}{\partial y}\right|,\left|\frac{\partial\overset{n-1}{\zeta}}{\partial z}\right|\right\}\text{ in }T+S,\quad \boldsymbol{\Omega}_1=\text{Max}\{|h|,|\alpha|,|\lambda|\}.$$

Da $\overset{n-1}{\zeta}$ in O verschwindet, so ist

$$(97)\qquad |\overset{n-1}{\zeta}|\leqq\sqrt{3}\,r\,\boldsymbol{\Omega}.$$

[98a]) Man beachte, daß $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ sich auf $\mathfrak{S}$ sprungweise ändern.

Den Ergebnissen auf S. 506 zufolge ist, sofern $\Omega = \frac{\varepsilon}{4}$ angenommen wird (vgl. (93) I),

$$(98)\quad \left|\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\overset{n-1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}} d\,\overset{n-1}{\tau'}\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{\overset{n-1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}} d\,\overset{n-1}{\tau'}\right|, \left|\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\overset{n-1}{T}} \chi' \frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}} d\,\overset{n-1}{\tau'}\right| \leqq \alpha_{86} r,$$

somit

$$(99)\quad \int\limits_{\overset{n-1}{T}} \chi' \left(\frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{n-1}{\varrho}}\right) d\,\overset{n-1}{\tau'} \leqq \sqrt{3}\,\alpha_{86} r^2.$$

Es gilt weiter (vgl. (90′) I) für alle τ in $T + S$

$$(100)\quad \left|\frac{\partial}{\partial x}\overset{n-1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + \frac{\partial}{\partial x}\overset{n-1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \ldots\right|, \ldots \leqq \alpha_{87} r \Omega^2,$$

somit

$$(101)\quad \left|\left(\overset{n-1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + \overset{n-1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \ldots\right) - \left({}_0\overset{n-1}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + {}_0\overset{n-1}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \ldots\right)\right| \leqq \sqrt{3}\,\alpha_{87} r^2 \Omega^2,$$

ferner

$$(102)\quad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\overset{n-1}{\zeta}{}^2(a^2+b^2)\right)\right|, \ldots \leqq \alpha_{88} \Omega^2 r, \text{ [99)]} \quad \left|\overset{n-1}{\zeta}{}^2(a^2+b^2)\right| \leqq \sqrt{3}\,\alpha_{88} \Omega^2 r^2, \\ &\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\,\overset{n-1}{\zeta}(ax+by)\right)\right|, \ldots \leqq \alpha_{89} \Omega \Omega_1 r, \quad \left|\lambda\,\overset{n-1}{\zeta}(ax+by)\right| \leqq \sqrt{3}\,\alpha_{89} \Omega \Omega_1 r^2, \end{aligned}$$

darum

$$(103)\quad \left|\frac{\partial}{\partial x} \Pi\left\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\right\}\right|, \ldots \leqq \Omega(\alpha_{90}\Omega + \alpha_{91}\Omega_1) r,$$

und

$$(104)\quad \left|\Pi\left\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\right\} - {}_0\Pi\left\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\right\}\right| \leqq \sqrt{3}\,\Omega(\alpha_{90}\Omega + \alpha_{91}\Omega_1) r^2.$$

Alles dies zusammenfassend finden wir augenscheinlich

$$(105)\quad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial \overset{n}{g}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{g}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{g}}{\partial z}\right| \leqq \alpha_{92}\Omega_1 r + \Omega(\alpha_{93}\Omega + \alpha_{94}\Omega_1) r, \\ &\left|\overset{n}{g}(\tau)\right| \leqq \sqrt{3}\,\alpha_{92}\Omega_1 r^2 + \sqrt{3}\,\Omega(\alpha_{93}\Omega + \alpha_{94}\Omega_1) r^2. \end{aligned}$$

Aus (105) ergibt sich jetzt (vgl. S. 553—554)

$$(106)\quad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial}{\partial x}\overset{n}{\zeta}\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y}\overset{n}{\zeta}\right|, \left|\frac{\partial}{\partial z}\overset{n}{\zeta}\right| \leqq \alpha_{95}\Omega_1 + \Omega(\alpha_{96}\Omega + \alpha_{97}\Omega_1), \\ &\left|\overset{n}{\zeta}\right| \leqq \sqrt{3}\,\alpha_{95}\Omega_1 r + \sqrt{3}\,\Omega(\alpha_{96}\Omega + \alpha_{97}\Omega_1) r. \end{aligned}$$

Von diesen Ungleichheiten ausgehend kann man wie bei den analogen Betrachtungen auf S. 516—517 für Ω eine für alle n gültige Schranke ableiten. Betrachten wir wie a. a. O. die quadratische Gleichung

$$(107)\quad t = \alpha_{95}\Omega_1 + t(\alpha_{96} t + \alpha_{97}\Omega_1).$$

---

[99]) Vgl. die Fußnote [61]).

Ihre Wurzeln sind, wenn Ω_1 hinreichend klein ist, reell und positiv. Die kleinere, t_*, konvergiert mit Ω_1 zugleich gegen Null. Für $\Omega_1 \leqq d_1$ ist darum gewiß $t_* \leqq \frac{\varepsilon}{4}$. Wir denken uns α_{95} überdies so groß gewählt, daß

$$\text{ob. Grenze}\left\{\left|\frac{\partial \overset{1}{\zeta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{1}{\zeta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{1}{\zeta}}{\partial z}\right|\right\} \leqq \alpha_{95}\,\Omega_1 \leqq t_*$$

gilt. Nunmehr finden wir wie auf S. 516

$$\left|\frac{\partial \overset{2}{\zeta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{2}{\zeta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{2}{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \alpha_{95}\,\Omega_1 + t_*(\alpha_{96}\,t_* + \alpha_{97}\,\Omega_1) = t_*,$$

und durch eine unbegrenzt wiederholte Iteration dieser Schlußweise, wie behauptet,

$$\left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq t_* \leqq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle } n, \tag{108}$$

sofern

$$\operatorname{Max}\{|h|, |\alpha|, |\lambda|\} \leqq d_1 \tag{109}$$

gilt.

Und nun der Konvergenzbeweis. Wir setzen wie auf S. 517 zur Abkürzung

$$\overset{n+1}{\zeta} - \overset{n}{\zeta} = \overset{n}{\delta} \tag{110}$$

und erhalten aus (95) und der analogen Beziehung für $\overset{n+1}{\zeta}$ zur Bestimmung von $\overset{n}{\delta}$ die Integralgleichung

$$\overset{n}{\delta}(\tau) + \int \boldsymbol{M}(\tau, \tau')\,\overset{n}{\delta}(\tau')\,d\tau' = -\frac{\alpha}{\psi(\tau)}\left[\int_{\overset{n}{T}} \chi'\left(\frac{1}{\overset{n}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{n}{\varrho}}\right) d\overset{n}{\tau}' - \int_{\overset{n-1}{T}} \chi'\left(\frac{1}{\overset{n-1}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{n-1}{\varrho}}\right) d\overset{n-1}{\tau}'\right] \tag{111}$$

$$+ \frac{1}{\psi(\tau)}\left\{[\Pi\{\lambda, \overset{n}{\zeta}\} - {}_0\Pi\{\lambda, \overset{n}{\zeta}\}] - [\Pi\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\} - {}_0\Pi\{\lambda, \overset{n-1}{\zeta}\}]\right\} = \frac{1}{\psi(\tau)}\,\overset{n}{l}(\tau).$$

Es möge nun für alle τ in $T + S$

$$\left|\frac{\partial \overset{n-1}{\lambda}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n-1}{\lambda}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n-1}{\lambda}}{\partial z}\right| \leqq \overline{\sigma} \tag{112}$$

sein. Da $\overset{1}{\lambda}$ in O verschwindet, so gilt augenscheinlich

$$|\overset{n-1}{\lambda}| \leqq \sqrt{3\,\overline{\sigma}}\,r. \tag{113}$$

Durch eine sinngemäße Modifikation der auf S. 556 durchgeführten Betrachtungen finden wir unter Verwendung der in dem § 4 des ersten Kapitels abgeleiteten Ungleichheiten für den absoluten Betrag der partiellen Ableitungen von $\overset{n}{l}(\tau)$ Schranken von der Form

$$\left|\frac{\partial \overset{n}{l}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{l}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{l}}{\partial z}\right| \leqq (\alpha_{98}\,t_* + \alpha_{99}\,d_1)\,\overline{\sigma}\,r, \tag{114}$$

somit, da $\overset{n}{l}$ in O verschwindet, zugleich

$$|\overset{n}{l}| \leqq \sqrt{3}\,(\alpha_{98}\,t_* + \alpha_{99}\,d_1)\,\bar{\mathfrak{O}}\,r^2. \tag{115}$$

In der Tat ist, um nur einen der in $\overset{n}{l}(\tau)$ zusammengefaßten Terme näher zu betrachten, wenn wir vorübergehend

$$(\overset{n}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + \overset{n}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \ldots) - ({}_0\overset{n}{\mathfrak{W}}{}^{(2)} + {}_0\overset{n}{\mathfrak{W}}{}^{(3)} + \ldots) = \overset{n}{P}(\tau)$$

setzen, nach § 4 I

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\overset{n}{P}(\tau) - \frac{\partial}{\partial x}\overset{n-1}{P}(\tau)\right|, \ldots \leqq \alpha_{100}\,t_*\,\bar{\mathfrak{O}}\,r, \tag{116}$$

mithin, da $\overset{n}{P}(\tau) - \overset{n-1}{P}(\tau)$ in O verschwindet, zugleich

$$|\overset{n}{P}(\tau) - \overset{n-1}{P}(\tau)| \leqq \sqrt{3}\,\alpha_{100}\,t_*\,\bar{\mathfrak{O}}\,r^2. \tag{117}$$

Aus (111), (114) und (115) folgt (vgl. S. 553—554)

$$\left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial z}\right| \leqq (\alpha_{101}\,t_* + \alpha_{102}\,d_1)\,\bar{\mathfrak{O}},\ |\overset{n}{\delta}| \leqq \sqrt{3}\,(\alpha_{101}\,t_* + \alpha_{102}\,d_1)\,\bar{\mathfrak{O}}\,r. \tag{118}$$

Da t_* mit d_1 zugleich gegen Null geht, so kann man gewiß d_1 so klein wählen, daß

$$\alpha_{101}\,t_* + \alpha_{102}\,d_1 \leqq q < 1$$

gilt, mithin

$$\left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\delta}}{\partial z}\right| \leqq q\,\bar{\mathfrak{O}}, \qquad |\overset{n}{\delta}| \leqq \sqrt{3}\,q\,\bar{\mathfrak{O}}\,r \tag{119}$$

wird. Die unendlichen Reihen

$$\overset{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty}(\overset{n+1}{\zeta} - \overset{n}{\zeta}) = \overset{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty}\overset{n}{\delta}, \qquad \frac{\partial \overset{1}{\zeta}}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(\overset{n+1}{\zeta} - \overset{n}{\zeta}), \ldots$$

konvergieren gleichmäßig für alle τ in $T + S$ wie die geometrischen Reihen mit dem Quotienten $q < 1$.

Die Funktion

$$\zeta = \overset{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty}(\overset{n+1}{\zeta} - \overset{n}{\zeta}) = \lim_{n=\infty}\overset{n}{\zeta} \tag{120}$$

ist in $T + S$ stetig, verschwindet in O und hat beschränkte und in jedem Stetigkeitsbereiche von f, außer höchstens im Koordinatenursprunge, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Wie alle Näherungen $\overset{n}{\zeta}$ hat auch ζ die Ebenen der Symmetrie von $T + S$ zu Symmetrieebenen. Darum ist gewiß

$$\int \mathfrak{u}_1(\tau')\,\zeta(\tau')\,d\tau' = \int_T \mathfrak{u}_1(\tau')\,\zeta(\tau')\,d\tau' + \int_{S+\mathfrak{S}} \mathfrak{u}_1(\sigma')\,\zeta(\sigma')\,d\sigma' = 0, \tag{121}$$

$$\int \mathfrak{u}_2(\tau')\,\zeta(\tau')\,d\tau' = 0.$$

Augenscheinlich erfüllt $\zeta(\tau)$ wegen (94) und (120) die Integro-Differentialgleichung (93). Wegen (121) ist $\zeta(\tau)$ zugleich eine Lösung der Integralgleichung (91), somit, wenn man s_0 der Gleichung (3) gemäß bestimmt und

$$s(\tau) = s_0 + h\tau^2 \zeta(\tau)$$

setzt, auch der Integro-Differentialgleichung (1).

Der Flüssigkeitskörper $T_1 + S_1$ ist eine Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit.

Aus (108) folgt für $n \to \infty$

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right| \leqq t_* \leqq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{122}$$

Übrigens ist ζ, sofern $\mathrm{Max}\{|h|, |\alpha|, |\lambda|\}$ hinreichend klein ist, die einzige den bekannten Symmetriebedingungen und den Ungleichheiten (122) genügende Lösung der Integro-Differentialgleichung (93), somit zugleich die einzige den vorgeschriebenen Symmetriebedingungen genügende Lösung von (91). Darum ist auch $T_1 + S_1$ die einzige, den eingangs gestellten Forderungen genügende Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von $T + S$. Der Beweis wäre wie auf S. 520 zu führen.

Hat die Integralgleichung (6), im Gegensatz zu unseren bisherigen Annahmen, neben den trivialen Nullösungen u_1 und u_2 auch noch Funktionen $u_3, \ldots, u_m$ zu Nullösungen, so liegt der Verzweigungsfall vor. Wir setzen $k = 2$ voraus und nehmen an, daß $u_3, \ldots, u_m$ alle Symmetrieebenen von $T + S$ zu Ebenen der Symmetrie haben. Die Entscheidung darüber, ob in der Nachbarschaft von $T + S$ für absolut hinreichend kleine Werte der Größen h, α, λ sowie gewisser neu einzuführenden Parameter neue Gleichgewichtsfiguren existieren, ergibt die Diskussion einer oder mehrerer „Verzweigungsgleichungen". Man vergleiche hierzu die Schlußausführungen des zweiten Kapitels (S. 520—525).

§ 6.

Figur der Erde.

Während vorhin die Winkelgeschwindigkeit ω als von Null verschieden vorausgesetzt wurde, wird jetzt $\omega = 0$ angenommen. Wir gehen also von dem Ruhezustande aus; $T + S$ ist eine aus konzentrischen Kugelschichten gleicher Dichte bestehende Flüssigkeitsmasse. Bezüglich der Dichte $f(\tau)$ gelten unsere früheren Annahmen (vgl. S. 526)[99a]. Die homogene Integralgleichung (6) hat jetzt als einzige Lösungen die drei trivialen Nullösungen u_1, u_{11}, u_{12}. Die Lösungen der zu (6) adjungierten Integralgleichung sind durch die Formeln (80) und die dazu analogen auf u_{11}, u_{12} bezüglichen Formeln gegeben und werden mit fetten Buchstaben bezeichnet. Wir denken

[99a]) Doch wird im Einklang mit den Festsetzungen des § 3 auch noch vorausgesetzt, daß $f(r)$ nicht zunimmt.

uns alle diese Funktionen wie in § 4 die Lösungen $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ etwa den Beziehungen

$$(123)\quad \int \mathfrak{u}_1^2\, d\tau = \int \mathfrak{u}_{11}^2\, d\tau = \int \mathfrak{u}_{12}^2\, d\tau = 1, \quad \int \mathfrak{u}_1^2\, d\tau = \int \mathfrak{u}_{11}^2\, d\tau = \int \mathfrak{u}_{12}^2\, d\tau = 1$$

gemäß normiert und setzen

$$(124)\quad \hat{P}(\tau, \tau') = L(\tau, \tau') - \mathfrak{u}_1(\tau)\,\mathfrak{u}_1(\tau') - \mathfrak{u}_{11}(\tau)\,\mathfrak{u}_{11}(\tau') - \mathfrak{u}_{12}(\tau)\,\mathfrak{u}_{12}(\tau').$$

Den sukzessiven Näherungen liegt diesmal die Integralgleichung zugrunde, die man erhält, wenn man in (93) $M(\tau, \tau')$ durch $\hat{P}(\tau, \tau')$ ersetzt. Der Konvergenzbeweis verläuft offenbar ganz wie vorhin in § 5. Wir nehmen insbesondere $\alpha = 0, \lambda \neq 0$ an.

Augenscheinlich hat jetzt die Dichte in den korrespondierenden Punkten der beiden Gleichgewichtskonfigurationen $T + S$ und $T_1 + S_1$ denselben Wert. Betrachten wir die erste Approximation $\overset{1}{\zeta}$ etwas näher. Im Einklang mit den Formeln (94) ist

$$(125)\quad \overset{1}{\zeta}(\tau) + \int \hat{P}(\tau, \tau')\,\overset{1}{\zeta}(\tau')\, d\tau' = \frac{1}{\psi(\tau)}\,[h r^2 \mathfrak{f}(r) - \lambda R^2]. \quad {}^{100})$$

Da $\overset{1}{\zeta}(\tau)$, wie übrigens auch alle höheren Näherungen die Ebene $z = 0$ sowie die beiden Ebenen durch die Rotationsachse $x = 0, y = 0$ zu Symmetrieebenen hat, so ist

$$(126)\quad \int \overset{1}{\zeta}(\tau')\,\mathfrak{u}_1(\tau')\, d\tau' = \int \overset{1}{\zeta}(\tau')\,\mathfrak{u}_{11}(\tau')\, d\tau' = \int \overset{1}{\zeta}(\tau')\,\mathfrak{u}_{12}(\tau')\, d\tau' = 0.$$

Demnach genügt $\overset{1}{\zeta}(\tau')$ der Integralgleichung (vgl. (4))

$$(127)\quad \psi(\tau)\,\overset{1}{\zeta}(\tau) + \int_S f'\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\,\overset{1}{\zeta}{}'\, d\sigma' - \int_{\bar{S}} [f']\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\,\overset{1}{\zeta}{}'\, d\sigma'$$
$$- \int_T \overset{1}{\zeta}{}'\,\frac{\partial f'}{\partial \nu'}\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\, d\tau' = h r^2 \mathfrak{f}(r) - \lambda R^2,$$

kürzer

$$(128)\quad \psi(\tau)\,\overset{1}{\zeta}(\tau) - \int_0^\infty df(r') \int_{S_{r'}} \overset{1}{\zeta}{}'\Big(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\Big)\, d\sigma' = h r^2 \mathfrak{f}(r) - \lambda R^2.$$

Wie wir wissen, hat die zu (127) gehörige homogene Integralgleichung drei linear unabhängige Nullösungen $\mathfrak{u}_1(\tau), \mathfrak{u}_{11}(\tau), \mathfrak{u}_{12}(\tau)$; die Lösungen der adjungierten Gleichung sind $\mathfrak{u}_1(\tau), \mathfrak{u}_{11}(\tau), \mathfrak{u}_{12}(\tau)$.

Die für die Lösbarkeit von (127) notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind wegen

$$(129)\quad \begin{aligned} &\int R^2\,\mathfrak{u}_1(\tau)\, d\tau = \int R^2\,\mathfrak{u}_{11}(\tau)\, d\tau = \int R^2\,\mathfrak{u}_{12}(\tau)\, d\tau = 0, \\ &\int r^2\,\mathfrak{f}(r)\,\mathfrak{u}_1(\tau)\, d\tau = \int r^2\,\mathfrak{f}(r)\,\mathfrak{u}_{11}\, d\tau = \int r^2\,\mathfrak{f}(r)\,\mathfrak{u}_{12}\, d\tau = 0 \end{aligned}$$

erfüllt. Durch die Forderung der Symmetrie ist $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ vollkommen bestimmt.

---

100) Man beachte, daß $M(\tau, \tau')$, wie eben ausgeführt, durch $\hat{P}(\tau, \tau')$ zu ersetzen ist und überdies $\mathfrak{r} = r$ gilt.

Wie man leicht verifiziert, ist

$$R^2 = \frac{2}{3} r^2 (1 - P_2(\cos\theta)), \tag{130}$$

unter $P_2(x)$ das Legendresche Polynom

$$P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}, \tag{131}$$

d. h. eine Kugelfunktion zweiter Ordnung verstanden. Den Entwicklungen in § 3 zufolge liegt es nahe, eine die Symmetrieforderungen erfüllende Lösung der Gleichung (127) in der Form

$$\overset{1}{\zeta}(\tau) = \gamma_{0}(r) + \gamma_{2}(r) P_2(\cos\theta) \tag{132}$$

anzusetzen. Zur Bestimmung von $\gamma_0(r)$ und $\gamma_2(r)$ erhält man, wenn man wie in § 3 verfährt, die Integralgleichungen

$$\psi(r)\gamma_0(r) - \int_0^\infty \gamma_0' df(r') \int_{S_{r'}} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\sigma' = h r^2 \mathfrak{f}(r) - \frac{2}{3}\lambda r^2 \quad [101] \tag{133}$$

und

$$\psi(r)\gamma_2(r) P_2(\cos\theta) - \int_0^\infty \gamma_2' df(r') \int_{S_{r'}} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) P_2(\cos\theta') d\sigma' = \frac{2}{3}\lambda r^2 P_2(\cos\theta). \tag{134}$$

Es möge $\mathfrak{C}_0$ die Einheitskugel bezeichnen. Da

$$\int_{\mathfrak{C}_0} P_2(\cos\theta)\, d\sigma = 0 \tag{135}$$

gilt, so kann man für (134) auch schreiben

$$\psi(r)\gamma_2(r) P_2(\cos\theta) - \int_0^\infty \gamma_2' df(r') \int_{S_{r'}} \frac{1}{\varrho} P_2(\cos\theta')\, d\sigma' = \frac{2}{3}\lambda r^2 P_2(\cos\theta). \tag{136}$$

Setzt man speziell $h r^2 \mathfrak{f}(r) = \frac{2}{3}\lambda r^2$, so erhält man $\gamma_0(r) \equiv 0$, da, wie wir schon früher gesehen haben (vgl. S. 537—538), die zu (133) gehörige homogene Integralgleichung keine von Null verschiedene Lösung hat. Die Gleichung (136) ergibt wiederum, wenn man die Formeln (27) beachtet, zur Bestimmung von $\gamma_2(r)$ die Beziehung

$$\psi(r)\gamma_2(r) - \frac{4\pi}{5}\int_0^r \frac{r'^4}{r^3}\gamma_2' df(r') - \frac{4\pi}{5}\int_r^\infty \frac{r^2}{r'}\gamma_2' df(r') = \frac{2}{3}\lambda r^2, \tag{137}$$

---

[101]) Wir schreiben für $\psi(\tau)$ jetzt

$$\psi(r) = -\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r f(r') r'^2 dr'.$$

(vgl. (57)), wofür man nach einer einfachen Umformung auch

$$(138)\quad \vartheta_2(r)\int_0^r f(r')\,r'^2\,dr' - \frac{1}{5r}\int_0^r f'\,d(r'^4\vartheta_2') - \frac{r^4}{5}\int_r^{\mathfrak{R}} f'\,d\left(\frac{1}{r'}\vartheta_2'\right) = -\frac{\lambda r^4}{6\pi}$$

schreiben kann (vgl. (64)). Dies ist die bekannte Gleichung, zu der Clairaut in seiner „Théorie de la figure de la terre“ gelangt ist[102]).

Ist im Gegensatz zu der vorhin gemachten Annahme $h r^2 \mathfrak{f}(r) - \frac{2}{3}\lambda r^2$ nicht identisch gleich Null, so wird $\vartheta_0(r)$ von Null verschieden ausfallen. Man gelangt von der Clairautschen Näherung zu der ersten Approximation durch eine bestimmte kugelsymmetrische Deformation.

Leipzig, den 1. März 1932.

---

[102]) Vgl. A. Liapounoff, Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie des figures des planètes, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, 1904, S. 1, Formel (1). A. a. O. bedeutet z das, was im Text mit $\frac{\vartheta_2}{r}$ bezeichnet wurde. Man vergleiche in diesem Zusammenhang auch die Note von J. Lense, Über eine Integralgleichung in der Theorie der heterogenen Gleichgewichtsfiguren, Math. Zeitschrift **16** (1923), S. 296–300.

(Eingegangen am 1. März 1932.)

Zur Theorie inhomogener Gleichgewichtsfiguren.

1. Mitteilung.

Homogene Ausgangsfiguren.

Von

Ernst Hölder in Leipzig.

In den folgenden Zeilen möchte ich darauf hinweisen, wie die in der vorstehenden Abhandlung von Herrn Lichtenstein[1]) durchgeführte Untersuchung der schwach inhomogenen Gleichgewichtsfiguren etwas modifiziert werden könnte, so daß sich nach zwei Richtungen ein vollständigerer Überblick über die Mannigfaltigkeit der Nachbarfiguren einer vorgelegten (gewissen Bedingungen genügenden) Gleichgewichtsfigur ergibt. Erstens lassen sich *sämtliche* Nachbarfiguren erfassen, deren Niveauflächen ebenso wie die der Ausgangsfigur eine Schar ineinandergeschachtelter, gegen ein „Zentrum" konvergierender Jordanscher Flächen bilden[2]), und nicht nur diejenigen Nachbarfiguren, welche die von Herrn Lichtenstein formulierten Symmetrieeigenschaften besitzen. Freilich, wenn man diese nicht voraussetzt, kann man auch nicht mehr erwarten, daß das Zentrum der zu untersuchenden Nachbarfigur mit dem der Ausgangsfigur zusammenfällt, sondern jenes wird gegen dieses um einen gewissen Vektor verrückt sein; dessen Komponenten müssen als Parameter in die Gleichung des Problems eingeführt werden, indem man die zu untersuchende Gleichgewichtsfigur auf eine neue Aus-

[1]) L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Dritte Abhandlung. Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der Erde, Math. Zeitschr. 36 (1933), S. 481—562.

[2]) In dem bei homogenen Gleichgewichtsfiguren möglichen Umfange ließen sich wohl auch schwach inhomogene, aus mehreren Massen mit je einem Zentrum bestehende Gleichgewichtsfiguren oder eine Konfiguration von der Art des Erdmondes behandeln. Aber auch ringförmige Gleichgewichtsfiguren dürften unserer Methode zugänglich sein.

gangskonfiguration bezieht, die gegen die ursprüngliche Ausgangsfigur eben um jenen Vektor verschoben ist, so daß das neue Zentrum mit dem der zu untersuchenden Figur zusammenfällt. Daß zum Schluß die trivialen Verzweigungsgleichungen keine Schwierigkeiten machen, beruht auf den bekannten Invarianzeigenschaften des Problems[3]).

Zweitens habe ich versucht, die *wirklich verschiedenen* Gleichgewichtsfiguren in der Nachbarschaft einer gegebenen Ausgangsfigur durch Angabe einer charakteristischen Darstellung in Evidenz zu setzen: mit Liapounoff beziehe ich die Niveauflächen der zu untersuchenden Figur auf die der Ausgangsfigur (die das gleiche Volumen besitzen soll) in einer ganz bestimmten Weise, die keine vorzugebende Funktion mehr enthält[4]), nämlich so, daß allemal Niveauflächen, die das gleiche Volumen umschließen, einander zugeordnet werden. Dies erfordert einige etwas weitläufigere Rechnungen, die (ebenso wie die auf den ersten, oben genannten Punkt bezüglichen) mit Hilfe der von mir schon früher benutzten, auf Gleichgewichtsfiguren bestehenden Integralgleichungen durchgeführt werden[5]).

§ 1.

Voraussetzungen über die Ausgangsfigur.

Als Ausgangsfigur dient die mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \geqq 0$ rotierende Gleichgewichtsfigur $T + S$ einer gravitierenden Flüssigkeit; ihre Dichte $f > 0$ genüge in den beiden ersten Paragraphen, die auch für eine weitere, die Clairautsche Theorie betreffende Mitteilung die Grundlage abgeben sollen, den von Herrn Lichtenstein formulierten Bedingungen[6]);

---

[3]) Vgl. meine Habilitationsschrift, Mathematische Probleme der Himmelsmechanik, Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 197–257.

[4]) Bisher war es noch so, daß zu zwei verschiedenen vorgegebenen Funktionen für die Differenz der Werte des Gesamtpotentials auf zugeordneten Niveauflächen möglicherweise dieselbe Nachbarfigur gehörte, nur in zwei verschiedenen Weisen auf die Ausgangsfigur bezogen.

[5]) Vgl. meine Note: Über einige Integralgleichungen aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten mit Anwendung auf Stabilitätsbetrachtungen. Berichte d. Sächs. Akad. d. Wiss. 1926, S. 3–20.

[6]) Loc. cit. [1]). Es genügt übrigens vorauszusetzen, die abteilungsweise stetige Funktion $f(\mathrm{r})$ besitze in jedem Stetigkeitsintervall eine Ableitung $\frac{df(\mathrm{r})}{d\mathrm{r}}$, die in einer Umgebung $0 \leqq \mathrm{r} \leqq \mathrm{r}_1$ des Nullpunktes eine H-Bedingung erfüllt. — Alle im folgenden nicht erklärten Bezeichnungen sind der unter [1]) zitierten Abhandlung von Herrn Lichtenstein entnommen. Der Kürze halber schreiben wir manchmal $(x, y, z) = (x_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, und analog bei anderen Vektoren. U, U_1, C, C_1 bezeichnen hier die Größen $\frac{1}{\varkappa} U$, $\frac{1}{\varkappa} U_1$, $\frac{1}{\varkappa} C$, $\frac{1}{\varkappa} C_1$ bei Herrn Lichtenstein, $\varkappa$ Gaußsche Gravitationskonstante.

für den Rest der vorliegenden Note ist f konstant[7]). Weiter machen wir die Voraussetzungen:

Die Flächen $S_\mathfrak{r}$ konstanten Relativpotentials, $U = C(\mathfrak{r}) = \text{konst.}$, bilden eine Schar ineinandergeschachtelter Jordanscher Flächen vom Kugeltypus, die gegen einen (nicht notwendig auf der Rotationsachse liegenden) Punkt $S_0(x_\alpha^0)$ konvergieren[8]). Dabei denke ich mir den Parameter $\mathfrak{r}$ durch $v = \frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}^3$ bestimmt, wo v das von der betreffenden Niveaufläche umschlossene Volumen ist.

Der Vektor $\left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right) = (U_\alpha)$ der Schwerkraft verschwindet nur in S_0. Demnach ist

$$(1) \qquad U_\alpha^0 = 0 \quad \text{und sonst} \quad \psi^2 = \sum_\alpha U_\alpha^2 > 0 \quad \text{in} \quad T + S.$$

Der obere Index 0 bedeutet immer den Wert im Zentrum S_0. Es ist dann $\frac{\partial U}{\partial \nu} = \psi < 0$ in $T + S$ (exkl. S_0), und U besitzt in S_0 ein eigentliches Maximum. Die aus den zweiten Ableitungen $U_{\alpha\beta}$ von U in S_0 gebildete quadratische (Hessesche) Form

$$F(\xi_\alpha) = \sum_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}^0 \xi_\alpha \xi_\beta$$

ist also sicher negativ definit oder mindestens negativ semidefinit. Daß hier das erste zutrifft,

$$(2) \qquad F(\xi_\alpha) < 0 \quad \text{für} \quad \sum_\alpha \xi_\alpha^2 = 1,$$

das Maximum von U also bereits an den Gliedern zweiten Grades erkennbar ist, ist gleichwertig mit der von Herrn Lichtenstein weiter gemachten Voraussetzung[9]):

$\frac{\partial \psi}{\partial \nu}$ ist in einem Kugelkörper $K + C$ um S_0 (exkl. S_0) stetig, und es gilt

$$0 < \gamma \leqq \left|\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right| \leqq \gamma_1 \quad \text{in} \quad K + C \qquad (\gamma, \gamma_1 \text{ konstant});$$

genauer ist dann

$$(3) \qquad -\gamma_1 \leqq \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \leqq -\gamma < 0,$$

was zur Folge hat

$$(4) \qquad -c_1 r \leqq \psi \leqq -cr \qquad (c > 0,\ c_1 > 0 \text{ konstant}).$$

---

[7]) Falls es sich um die in Fußnote [2]) genannten Gleichgewichtsfiguren handeln würde, könnte die Dichte in den verschiedenen getrennten Einzelmassen verschiedene (konstante) Werte besitzen; es wären dann auch die im Haupttext folgenden Voraussetzungen zu modifizieren.

[8]) D. h. bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, daß die Fläche $S_\mathfrak{r}$ in der Kugel K_ε mit Radius ε um S_0 liegt, wofern nur $C(0) - C(\mathfrak{r}) < \delta$ ist.

[9]) Loc. cit. [1]), Fußnote [59]).

Das Quadrat der Schwerkraft $\psi^2 = \sum_\beta U_\beta^2$ gibt ja differenziert

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2\psi}\frac{\partial \psi^2}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{\psi}\sum_\beta U_\beta U_{\beta\alpha} = \sum U_{\alpha\beta} a_\beta, \tag{5}$$

also

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \sum_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta; \tag{6}$$

hier ist $(a, b, c) = (a_\alpha) = \left(\frac{U_\alpha}{\psi}\right)$ der Einheitsvektor der Außennormale an $S_\mathfrak{r}$.

Gilt nun die durch (3) geforderte Beschränkung nach rechts, so mache ich $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$ so klein, daß in K_ε

$$\left|\sum_{\alpha\beta}(U_{\alpha\beta} - U^0_{\alpha\beta})\, a_\alpha a_\beta\right|^2 \leqq \sum_\beta \left|\sum_\alpha (U_{\alpha\beta} - U^0_{\alpha\beta})\, a_\alpha\right|^2 \leqq \sum_{\beta\alpha}(U_{\alpha\beta} - U^0_{\alpha\beta})^2 \leqq \left(\frac{\gamma}{2}\right. \tag{7}$$

ausfällt. Dann erkennt man aus (6), daß $F(a_\alpha) \leqq -\frac{\gamma}{2}$ ist für die Einheitsvektoren (a_α) der Normalen in denjenigen Punkten von $S_\mathfrak{r}$, die in K_ε liegen; das sind aber wegen der Konvergenz[10]) der $S_\mathfrak{r}$ gegen S_0 *alle* Einheitsvektoren. Das bedeutet den negativ definiten Charakter der Form $F(a_\alpha)$.

Umgekehrt ist klar, daß die beiden Voraussetzungen (1), (2) alle von Herrn Lichtenstein bezüglich der Schwerkraft ψ gemachten Annahmen[11]) nach sich ziehen. Zunächst ist ja nach (5), (6) $\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \nu}$ in $T + S$ (exkl. S_0) stetig. Weiter ist $\left|\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\right|$ beschränkt, und für $\frac{\partial \psi}{\partial \nu}$ folgt aus (6), (7) und (2), daß für eine gewisse Umgebung von S_0 sicher eine Konstante $\gamma > 0$ existiert, mit der (3) gilt.

Über das Vorhandensein von Symmetrieebenen wollen wir nichts annehmen. Die in der Abhandlung von Herrn Lichtenstein bei einer nichthomogenen Ausgangsfigur benötigte Voraussetzung 6 ist fallen zu lassen.

§ 2.

Die fundamentale Integro-Differentialgleichung.

Es sei nun ein Flüssigkeitskörper $T_1 + S_1$ vorgelegt, der sich ebenso wie $T + S$ aus einer Schar von ineinandergeschachtelten Jordanflächen $S_{\mathfrak{r}1}$ mit stetiger Normale aufbauen läßt, die gegen ein Zentrum S_{01} konvergieren. Auch hier sei $\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}^3$ das von $S_{\mathfrak{r}1}$ umschlossene Volumen. Auf $S_{\mathfrak{r}1}$ ist die Dichte der Flüssigkeit konstant[12]), gleich $f(\mathfrak{r}) + \alpha\chi(\mathfrak{r})$, wo α ein kleiner Parameter ist und χ eine Funktion, die ebenso wie f beschaffen ist[12a]).

---

[10]) Vgl. Fußnote [7]).

[11]) Loc. cit. [1]), Fußnote [59]).

[12]) Möglicherweise sind auch Homogenitätsgebiete vorhanden.

[12a]) χ braucht übrigens nur als Funktion von $\mathfrak{r}$ in einer Umgebung $0 \leqq \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{r}_1$ des Nullpunktes einer H-Bedingung zu genügen.

Jedenfalls kann man eventuell durch eine ähnliche Vergrößerung von T (bei Aufrechterhaltung der Dichte f) erreichen, daß sein Volumen $\bar{v} = \frac{4\pi}{3}\bar{\mathfrak{r}}^3$ mit dem von T_1 übereinstimmt. Es sollen dann die Flächen $S_{\mathfrak{r}1}$ und $S_{\mathfrak{r}}$, die also dasselbe Volumen umschließen, für das ganze Parameterintervall $0 \leqq \mathfrak{r} \leqq \bar{\mathfrak{r}}$ einander zugeordnet werden[13]).

Nun ist aber noch zu beachten, daß möglicherweise die beiden Zentren S_{01} und S_0 nicht zusammenfallen. Man wird so dazu geführt, die Nachbarfigur $(S_{\mathfrak{r}1})$ auf eine neue Konfiguration $(\dot{S}_{\mathfrak{r}})$ zu beziehen, die aus der Ausgangsfigur $(S_{\mathfrak{r}})$ durch die Translation $\overrightarrow{S_0 S_{01}} = (t_1, t_2, t_3)$ hervorgeht[14]) — derart, daß das Zentrum von $(\dot{S}_{\mathfrak{r}})$ mit dem von $(S_{\mathfrak{r}1})$ zusammenfällt. Die verschobene Bezugskonfiguration $(\dot{S}_{\mathfrak{r}}) = \dot{T} + \dot{S}$ ist dann freilich keine Gleichgewichtsfigur mehr; ihr Relativpotential

$$\dot{U}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \int_{\dot{T}} f' \frac{1}{\dot{\varrho}}\, d\tau' + \frac{\omega^2}{2\varkappa}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{8}$$

$$(\dot{\varrho}^2 = (\dot{x} - x')^2 + (\dot{y} - y')^2 + (\dot{z} - z')^2$$

ist auf der Fläche $\dot{S}_{\mathfrak{r}}$ $(0 \leqq \mathfrak{r} \leqq \bar{\mathfrak{r}})$ nicht mehr konstant; vielmehr gilt

$$\dot{U}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C(\mathfrak{r}) + \frac{\omega^2}{\varkappa}[(\dot{x} - t_1)t_1 + (\dot{y} - t_2)t_2] + \frac{\omega^2}{2\varkappa}(t_1^2 + t_2^2) \text{ auf } \dot{S}_{\mathfrak{r}}. \tag{9}$$

Den später auf sein relatives Gleichgewicht hin zu untersuchenden Körper $T_1 + S_1$ denken wir uns dargestellt durch Angabe des Abstandes ζ, den der Punkt $(x_1, y_1, z_1) = (x_{\alpha 1})$ auf $S_{\mathfrak{r}1}$ von der Bezugsfläche $\dot{S}_{\mathfrak{r}}$ besitzt; das Lot von der Länge ζ ist also im Fußpunkt $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (x_\alpha)$ auf $\dot{S}_{\mathfrak{r}}$ aufzutragen: $x_{\alpha 1} = \dot{x}_\alpha + \dot{a}_\alpha \zeta$, d. h.

$$x_1 = \dot{x} + \dot{a}\zeta, \qquad y_1 = \dot{y} + \dot{b}\zeta, \qquad z_1 = \dot{z} + \dot{c}\zeta. \tag{10}$$

Gleichwohl betrachten wir ζ als Funktion $\zeta(x, y, z)$ in $T + S$, indem wir

$$\dot{x}_\alpha = x_\alpha + t_\alpha \tag{11}$$

setzen. In gleicher Weise werden alle auf $\dot{T} + \dot{S} = (\dot{S}_{\mathfrak{r}})$ bezüglichen Größen als Funktionen in $T + S$ aufgefaßt; z. B. ist $\dot{a}_\alpha = a_\alpha$.

Für das zur Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 + 2\varkappa\lambda}$ gehörige Relativpotential $U_1(x_1, y_1, z_1)$ von $T_1 + S_1$ und eine später näher festzulegende Funktion $C_1 = C_1(\mathfrak{r}) = C + s$ erhalten wir im *Ausgangsbereich* $T + S$ die

---

[13]) Hier benutzen wir die Voraussetzung, daß T aus einer einzigen Flüssigkeitsmasse besteht.

[14]) Die Dichte f wird dabei mitgenommen.

Entwicklung[15])

(13)
$$U_1(x_1, y_1, z_1) - C_1$$
$$= (U_1(x_1, y_1, z_1) - \dot{U}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})) - \left(s - \frac{\omega^2}{\varkappa}(t_1 x + t_2 y) - \frac{\omega^2}{2\varkappa}(t_1^2 + t_2^2)\right)$$
$$= L(\zeta) - s + \frac{\omega^2}{\varkappa}(t_1 x + t_2 y) + \lambda(x^2 + y^2) + \alpha \int_{T_1} \chi' \frac{1}{\varrho_1} d\tau_1'$$
$$+ 2\lambda\zeta(ax + by) + 2\lambda(t_1 x + t_2 y)$$
$$+ \frac{\omega_1^2}{2\varkappa}\left((t_1 + a\zeta)^2 + (t_2 + b\zeta)^2\right) + \mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots$$
$$= L(\zeta) + 2t_0 C + \frac{\omega^2}{\varkappa}(t_1 x + t_2 y) - \left(s - \frac{C}{\bar{C}}\bar{s}\right) - \Phi\{t_1, t_2, \alpha, \lambda, \zeta\}$$

mit dem Parameter[16]) $t_0 = -\frac{\bar{s}}{2\bar{C}}$ und

(14)
$$L(\zeta) = \psi\zeta - \int_T \frac{\partial f'}{\partial \nu'} \frac{1}{\varrho} \zeta' d\tau' - \int_{\mathfrak{S}} [f'] \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma' + \int_S f' \frac{1}{\varrho} \zeta' d\sigma';$$

$d\sigma$ ist das Oberflächenelement auf S oder auf einer Niveaufläche $\mathfrak{S}$, wo die Dichte den Sprung $[f]$ besitzt.

Soll nun $T_1 + S_1$ eine zur Winkelgeschwindigkeit ω_1 gehörige Gleichgewichtsfigur sein, bei der die Flächen S_{τ_1} Niveauflächen des Relativpotentials sind, so besteht mit einer noch zu berechnenden Funktion $s = s(\mathfrak{x})$ in $T + S$ die fundamentale Integro-Differentialgleichung

(15)
$$U_1(x_1, y_1, z_1) - C_1 \equiv L(\zeta) + 2t_0 C + \frac{\omega^2}{\varkappa}(t_1 x + t_2 y) - \left(s - \frac{C}{\bar{C}}\bar{s}\right) - \Phi = 0$$

Es ist manchmal nützlich, in der Ausgangsfigur $T + S$ folgende Größen einzuführen:

(16)
$$C_0 = 2C, \quad C_1 = C_2 = \frac{\omega^2}{\varkappa}, \quad C_3 = 0$$

---

[15]) Loc. cit. [1]), S. 491–499. Dort finden sich die Ausdrücke für die Terme höheren Grades $\mathfrak{W}^{(2)}, \ldots$. Es gilt nämlich

(12)
$$\frac{\omega_1^2}{2}(x_1^2 + y_1^2) - \frac{\omega^2}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{\omega_1^2}{2}(x_1^2 + y_1^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2) + \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2}(\dot{x}^2 + y^2)$$
$$= (\omega^2 + 2\varkappa\lambda)\zeta(ax + by) + \omega_1^2\zeta(at_1 + bt_2) + \frac{\omega_1^2}{2}\zeta^2(a^2 + b^2)$$
$$+ \varkappa\lambda(x^2 + y^2) + 2\varkappa\lambda(t_1 x + t_2 y) + \left(\frac{\omega^2}{2} + \varkappa\lambda\right)(t_1^2 + t_2^2) - \frac{\omega^2}{2}(t_1^2 + t_2^2)$$
$$= \omega^2(ax + by)\zeta + \varkappa\lambda(x^2 + y^2) + 2\varkappa\lambda\zeta(ax + by) + 2\varkappa\lambda(t_1 x + t_2 y)$$
$$+ \frac{\omega_1^2}{2}\left((t_1 + a\zeta)^2 + (t_2 + b\zeta)^2\right) - \frac{\omega^2}{2}(t_1^2 + t_2^2).$$

[16]) Die auf die Oberfläche S bezüglichen Größen bezeichnen wir durch Überstreichung.

und $x_0 = 1$ zu setzen. (14) schreibt sich dann

$$(17)\quad U_1(x_1, y_1, z_1) - C_1 \equiv L(\zeta) + \sum_{\alpha=0}^{3} t_\alpha C_\alpha x_\alpha - \left(s - \frac{C}{\bar{C}}\bar{s}\right) - \Phi = 0,$$

wo t_s beliebig ist.

Nun beachte man die in einer Gleichgewichtsfigur $T + S$ für die Stützfunktion $p = a_0 = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha a_\alpha$ und den Normalenvektor (a_α) von S_t bestehenden Integralgleichungen[17])

$$(18)\qquad L(a_\alpha) = C_\alpha x_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Falls

$$(19)\qquad \zeta = \mathfrak{z} - \sum_{\alpha=0}^{3} t_\alpha a_\alpha$$

gesetzt wird, kommt also aus (17) die Integro-Differentialgleichung

$$(20)\qquad U_1(x_1, y_1, z_1) - C_1 \equiv L(\mathfrak{z}) - \left(s - \frac{C}{\bar{C}}\bar{s}\right) - \Phi = 0.$$

§ 3.

Weitere Behandlung im Fall einer homogenen Ausgangsfigur.

Von jetzt an sei f konstant. Ist

$$\bar{u}_1 = \text{konst.} \cdot \bar{c}, \qquad \bar{u}_2 = \text{konst.} \cdot \bar{\gamma} \quad (\gamma = xb - ya),^{18})$$

$\bar{u}_3, \ldots, \bar{u}_m$ ein normiertes Orthogonalsystem der Nullösungen von

$$(21)\qquad \bar{L}(u) \equiv \bar{\psi} u + \int_S \bar{f}' \frac{1}{\bar{\varrho}} u' \, d\sigma' = 0,$$

so geht man von der auf S geltenden Integro-Differentialgleichung

$$(22)\qquad \bar{L}(\mathfrak{z}) = \bar{\Phi}$$

durch die Kernzerspaltung

$$(23)\qquad \frac{1}{\bar{\varrho}} = \sum_{j=1}^{m} \bar{\psi}\,\bar{\psi}'\,\bar{u}_j\,\bar{u}_j' + \mathfrak{N}$$

zur Integro-Differentialgleichung

$$(24)\qquad \bar{L}_*(\mathfrak{z}) \equiv \bar{\psi}\,\bar{\mathfrak{z}} + \int_S f'\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{z}'\,d\sigma' = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{r}_j \cdot \bar{\psi}\,\bar{u}_j + \bar{\Phi}$$

---

[17]) Vgl. loc. cit. [5]), S. 4—9; jetzt betrachten wir gleich den ganzen Bereich $T + S$. Die Überlegungen von S. 7—9 sind auch bei inhomogenen Gleichgewichtsfiguren anwendbar, vgl. dazu loc. cit. [1]), S. 532—534.

[18]) Im Falle, daß $T + S$ keine Rotationssymmetrie um die z-Achse besitzt. Abweichend von den loc. cit. [1]), S. 520 getroffenen Festsetzungen normiere ich

$$-\int_S f\,\psi\,\bar{u}_i\,\bar{u}_j\,d\sigma = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

mit

$$\mathfrak{r}_j = -\int_S f \psi \mathfrak{z} \bar{u}_j d\sigma. \tag{25}$$

Mit Hilfe des zu $\frac{\bar{f}'}{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ gehörenden lösenden Kernes $\mathfrak{H}$ folgt aus (24)

$$\bar{\mathfrak{z}} = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{r}_j \bar{u}_j + \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\psi}} - \int_S \mathfrak{H} \frac{\Phi'}{\psi'} d\sigma', \tag{26}$$

d. h.

$$\bar{\xi} = -\sum_{\alpha=0}^{3} t_\alpha \bar{a}_\alpha + \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{r}_j \bar{u}_j + \frac{\bar{\Phi}_*}{\bar{\psi}}, \qquad \frac{\bar{\Phi}_*}{\bar{\psi}} = \frac{\bar{\Phi}}{\bar{\psi}} - \int_S \mathfrak{H} \frac{\Phi}{\psi'} d\sigma'. \tag{27}$$

Diesen Ausdruck für den Randwert von ζ rechts in

$$\psi\zeta = -\sum_{\alpha=0}^{3} t_\alpha C_\alpha x_\alpha - \int_S f' \frac{1}{\varrho} \bar{\xi}' d\sigma' + \left(s - \frac{C}{\bar{C}} \bar{s}\right) + \Phi \tag{28}$$

eingesetzt, gibt unter Einführung von

$$\psi u_j = -\int_S f' \frac{1}{\varrho} \bar{u}_j' d\sigma', \qquad \Phi^* = \Phi - \int_S f' \frac{1}{\varrho} \frac{\bar{\Phi}_*'}{\psi'} d\sigma' \tag{29}$$

die Beziehung

$$\psi\zeta = -\sum_{\alpha=0}^{3} t_\alpha C_\alpha x_\alpha + \sum_{\alpha=0}^{3} t_\alpha \int_S f' \frac{1}{\varrho} \bar{a}_\alpha' d\sigma' + \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{r}_j \psi u_j + \left(s - \frac{C}{\bar{C}} \bar{s}\right) + \Phi^*. \tag{30}$$

Vermöge (18), (21) vereinfacht sich dies zu

$$\psi\zeta = -\sum_{\alpha=1}^{3} t_\alpha U_\alpha - t_0 \psi p + \left(s - \frac{C}{\bar{C}} \bar{s}\right) + P, \tag{31}$$

wo

$$P = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{r}_j \psi u_j + \Phi^* = P\{t_1, t_2, t_3, \lambda, \alpha, \mathfrak{r}_j, \zeta\} \tag{32}$$

ist.

Ehe wir weitergehen, müssen wir die Funktion s bestimmen, und zwar auf Grund der oben gemachten Verabredung, daß immer Niveauflächen $S_{\mathfrak{r}1}$ und $S_{\mathfrak{r}}$ einander zugeordnet werden, die dasselbe Volumen $v = \frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}^3$ umschließen[19]). Wir multiplizieren (31) mit $\frac{d\sigma}{\psi} = d\omega$, integrieren über $S_{\mathfrak{r}}$ und dividieren durch $\int_{S_{\mathfrak{r}}} d\omega = \omega$ (nicht zu verwechseln mit der Ausgangswinkelgeschwindigkeit):

$$\frac{1}{\omega}\int_{S_{\mathfrak{r}}} \zeta d\sigma = s - \frac{C}{\bar{C}} \bar{s} - t_0 \frac{3v}{\omega} + M \tag{33}$$

[19]) Vgl. Fußnote [18]).

mit dem Mittelwert

$$M = \frac{1}{\omega}\int_{S_\tau} P\,d\omega. \tag{34}$$

Wegen der Volumbedingung ergibt sich für das in (33) links stehende Integral ein Ausdruck der Form[20])

$$\frac{1}{\omega}\int_{S_\tau}\zeta\,d\sigma = \frac{1}{\omega}\int_{S_\tau}\left(H - \frac{1}{3}K\zeta\right)\zeta^2\,d\sigma \equiv N, \tag{35}$$

H mittlere, K Gaußsche Krümmung der Niveaufläche S_τ, worauf ich im nächsten Paragraphen zurückkomme.

Die Beziehung (33) gibt dann für $\tau = \bar{\tau}$ zunächst den Parameter

$$\frac{3\bar{v}}{\bar{\omega}} t_0 = \bar{M} - \bar{N}. \tag{36}$$

$\bar{M}$ kann noch einfacher dargestellt werden. Dazu berechnen wir mittels (29), (27) den Randwert

$$\bar{\Phi}^* = \bar{\Phi} - \int_S f' \frac{1}{\bar{\varrho}} \frac{\Phi'}{\psi'}\,d\sigma' + \int_S\int_S f^* \frac{1}{\bar{\varrho}(\sigma\sigma^*)} \mathfrak{H}(\sigma^*\sigma') \frac{\Phi'}{\psi'}\,d\sigma^*\,d\sigma'. \tag{37}$$

Wegen (23) gilt mit

$$\Psi_j = \int_S f \Phi u_j\,d\sigma \tag{38}$$

die Beziehung

$$\bar{\Phi}^* = \bar{\Phi} - \bar{\psi}\sum_j \Phi_j \bar{u}_j - \int_S f' \mathfrak{N}(\sigma\sigma') \frac{\Phi'}{\psi'}\,d\sigma' + \int_S\int_S f^* \mathfrak{N}(\sigma\sigma^*)\,\mathfrak{H}(\sigma^*\sigma') \frac{\Phi'}{\psi'}\,d\sigma^*\,d\sigma', \tag{39}$$

da ja

$$\int_S f \psi u_j \mathfrak{H}(\sigma\sigma')\,d\sigma = 0 \tag{40}$$

ist, auf Grund der bekannten Integralgleichung für den lösenden Kern $\mathfrak{H}$. Diese liefert weiter

$$\bar{\Phi}^* = \bar{\Phi} - \bar{\psi}\sum_j \Phi_j \bar{u}_j - \int_S \bar{\psi}\,\mathfrak{H}(\sigma\sigma') \frac{\Phi'}{\psi'}\,d\sigma' = \bar{\Phi}_* - \bar{\psi}\sum_j \Phi_j \bar{u}_j. \tag{41}$$

Wenn wir nun den durch (32) gegebenen Ausdruck $\bar{P}$ mitteln, so kommt

$$\bar{\omega}\bar{M} = \int_S \frac{\Phi'}{\psi'}\,d\sigma' - \int_S\int_S \mathfrak{H}(\sigma\sigma') \frac{\Phi'}{\psi'}\,d\sigma'\,d\sigma. \tag{42}$$

---

[20]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Zweite Abhandlung. Stabilitätsbetrachtungen. Math. Zeitschr. 7 (1920), S. 126—231, insbes. S. 165. Die weiteren Bemerkungen auf S. 166 genügen für unsere Zwecke nicht, vgl. unten S. 577; dort berechne ich den expliziten Ausdruck (35) des Textes.

Jetzt beachten wir

$$\frac{\mathfrak{H}(\sigma\sigma')}{f'\psi'} = \frac{\mathfrak{H}(\sigma'\sigma)}{f\psi} \tag{43}$$

und die aus $(18)_0$ folgende Beziehung

$$\bar{p} = \sum_j p_j \bar{u}_j + \frac{2\bar{C}}{\bar{\psi}} - \int_S \mathfrak{H}(\sigma\sigma')\frac{2\bar{C}'}{\psi'}\,dc' = \sum_j p_j \bar{u}_j + \frac{2\bar{C}}{\bar{\psi}}\Big(1 - \int_S \mathfrak{H}(\sigma'\sigma)\,d\sigma'\Big), \tag{44}$$

wo

$$p_j = -\int_S f\psi\, p u_j\, d\sigma \tag{45}$$

gesetzt ist. Dann wird

$$2\bar{C}\cdot\bar{\omega}\,\bar{M} = \int_S p\Phi\, d\sigma - \frac{1}{f}\sum_j p_j \Phi_j. \tag{46}$$

Also ergibt sich nach (36), (35) schließlich

$$\begin{aligned} -3\bar{v}\,\bar{s} = 3\bar{v}\cdot 2\bar{C}t_0 &= \int_S \Phi p\, d\sigma - 2\bar{C}\int_S (H - \tfrac{1}{3}K\zeta)\zeta^2\, d\sigma - \frac{1}{f}\sum_j p_j \Phi_j \\ &= 6\bar{v}\,\bar{C}\cdot \mathsf{T}_0\{t_1, t_2, \lambda, \alpha, \zeta\}, \end{aligned} \tag{47}$$

ein Funktional derselben Art wie Φ. Dieser Ausdruck für t_0 kann auch unmittelbar aus (22), (19) hergeleitet werden.

Jetzt gibt (33), (35)

$$s - \frac{C}{\bar{C}}\bar{s} = \mathsf{T}_0\frac{3v}{\omega} - M + N; \tag{48}$$

daß hier die rechte Seite auf S verschwindet, folgt schon aus der gemäß (47) erfolgten Bestimmung von T_0. Der erhaltene Ausdruck (48) für $s - \frac{C}{\bar{C}}\bar{s}$ in (31) eingesetzt, gibt schließlich

$$\psi\zeta = -\sum_{\alpha=1}^{8} t_\alpha U_\alpha - \mathsf{T}_0\Big(\psi p - \frac{3v}{\omega}\Big) + P - M + N = R\{t_1, t_2, t_3, \lambda, \alpha, \mathfrak{r}_j, \zeta\}. \tag{49}$$

§ 4.

Untersuchung der Mittelwerte.

Der vorhin aufgetretene Ausdruck $\frac{d\sigma}{\psi} = d\omega$ ist das zur Fläche

$$U(x_1, x_2, x_3) - C = 0 \tag{50}$$

gehörige Flächendifferential[21]). Aus Zähler und Nenner die der Gleichung (50) fremde Irrationalität wegzuschaffen, denken wir die Punkte x_α der Fläche gegeben als Funktionen zweier Gaußscher Parameter ξ, η

$$x_\alpha = x_\alpha(\xi, \eta), \tag{51}$$

[21]) Vgl. G. Herglotz, Über die Integration linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. I, Berichte d. Sächs. Akad. d. Wiss. 1926, S. 44.

die identisch die Gleichung (50) erfüllen. Das System ξ, η sei überdies so eingerichtet, daß für die Richtungskosinus (a_α) der Außennormale gilt

$$\delta \cdot a_\alpha = \frac{\partial(x_{\alpha+1}, x_{\alpha+2})}{\partial(\xi, \eta)} = \lambda U_\alpha \quad \text{mit} \quad \delta = \sqrt{\left(\frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(\xi, \eta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(\xi, \eta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi, \eta)}\right)^2} > 0$$

und mit Mod 3 zu nehmenden Indizes. λ bestimmt sich eindeutig durch

$$\delta = \lambda \psi. \tag{53}$$

Es ist nützlich, allemal wenn φ, χ irgend zwei Funktionen von ξ, η sind, unter

$$d\varphi\, d\chi = \frac{\partial(\varphi, \chi)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi\, d\eta = -d\chi\, d\varphi \tag{54}$$

zu verstehen. Dann ist $d\sigma = \delta \cdot d\xi\, d\eta$ das Oberflächenelement und

$$\frac{d\sigma}{\psi} = d\omega = \lambda\, d\xi\, d\eta = \frac{da\, db}{\frac{\partial(U, a, b)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}} \tag{55}$$

das Flächendifferential, das nur scheinbar von den beiden beliebigen Funktionen $a = a(x_1, x_2, x_3)$, $b = b(x_1, x_2, x_3)$ abhängt.

Bei einer (stetig differenzierbaren) Transformation

$$x'_\alpha = x'_\alpha(x_1, x_2, x_3) \quad \text{mit} \quad D = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0, \tag{56}$$

bei der $U = U'(x'_1, x'_2, x'_3)$ und $a = a'(x'_1, x'_2, x'_3)$, $b = b'(x'_1, x'_2, x'_3)$ wird, verhält sich $d\omega$ kovariant:

$$d\omega = \frac{da'\, db'}{\frac{\partial(U'(a', b'))}{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}} \frac{1}{D} = \frac{1}{D} d\omega', \tag{57}$$

wo $d\omega'$ das zu $U'(x'_1, x'_2, x'_3) - C = 0$ gehörige Flächendifferential ist.

Dies wende ich an auf die Abbildung[32])

$$x'_\alpha = x_\alpha(1 + w), \qquad w = w(x_1, x_2, x_3), \tag{58}$$

die für genügend kleines $C_0 - C$ die Niveaufläche

$$U(x_1, x_2, x_3) \equiv C_0 + \frac{1}{2} \sum U^0_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + h(x_1, x_2, x_3) = C \tag{59}$$

jeweils in das Ellipsoid

$$U'_0(x'_1, x'_2, x'_3) \equiv C_0 + \frac{1}{2} \sum U^0_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta = C \tag{60}$$

überführt. Es ergibt sich

$$w = \sqrt{1 + \frac{2h(x_1, x_2, x_3)}{\sum U^0_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}} - 1 = O(r). \tag{61}$$

---

[32]) Die Betrachtungen dieses Absatzes sind nur bei Gleichgewichtsfiguren erforderlich, die keine Ellipsoide sind. Vorübergehend setze ich statt $x_\alpha - x^0_\alpha$ einfach x_α.

Weiter sind $\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} = O(1)$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = O\left(\frac{1}{r}\right)$ und (exkl. S_0) stetig. Umgekehrt ist

$$(62)\quad x_\alpha = x'_\alpha(1+w^*),\quad w^* = w^*(x'_1, x'_2, x'_3) = O(r'),\quad r'^2 = \sum x'^2_\alpha = O(r^2).$$

Für diese Abbildung ist (Summenzeichen bisweilen weggelassen)

$$(63)\quad \begin{aligned} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta} &= \delta_{\alpha\beta}(1+w) + x_\alpha \frac{\partial w}{\partial x_\beta} = \delta_{\alpha\beta} + O(r), \\ \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} &= \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial w}{\partial x_\gamma} + \delta_{\alpha\gamma}\frac{\partial w}{\partial x_\beta} + x_\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} = O(1) \end{aligned}$$

und die Funktionaldeterminante

$$(64)\qquad D = D'(x'_1, x'_2, x'_3) = 1 + O(r') \quad \text{mit} \quad \frac{\partial D'}{\partial x'_\alpha} = O(1).$$

Natürlich ist auch

$$(65)\quad \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} = \delta_{\alpha\beta} + O(r'),\quad \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\beta \partial x'_\gamma} = \frac{\partial x_\varrho}{\partial x'_\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\varrho}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} = O(1) \text{ und (exkl. } S_0) \text{ stetig.}$$

Weiter wird

$$(66)\quad \begin{aligned} U &= U'(x'_1, x'_2, x'_3) = C_0 + \frac{1}{2}\sum U^0_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta + h^*(x'_1, x'_2, x'_3), \\ h^* &= h + \left(w + \frac{1}{2}w^2\right) U^0_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta = O(r'^3), \end{aligned}$$

$$(67)\quad \begin{aligned} \frac{\partial U'}{\partial x'_\alpha} &= U^0_{\alpha\beta} x'_\beta + \frac{\partial h^*}{\partial x'_\alpha}, \\ \frac{\partial h^*}{\partial x'_\alpha} &= \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{\partial h}{\partial x_\gamma} + (1+w)\frac{\partial w}{\partial x_\gamma} U^0_{\varrho\beta} x'_\varrho x'_\beta\right) + (2w + w^2) U^0_{\alpha\beta} x'_\beta = O(r'^2) \end{aligned}$$

und schließlich

$$\frac{\partial^2 h^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = O(r').$$

Bezeichnen wir mit $d\omega'_0$ das Flächendifferential auf $U'_0(x'_1, x'_2, x'_3) - C = 0$, so ist wegen $(67)_1$

$$(68)\quad d\omega' = E'\, d\omega'_0 \text{ mit } E' = \left\{1 + 2\frac{U^0_{\alpha\beta} x'_\beta \frac{\partial h^*}{\partial x'_\alpha}}{\sum (U^0_{\alpha\beta} x'_\beta)^2} + \frac{\sum \left(\frac{\partial h^*}{\partial x'_\alpha}\right)^2}{\sum (U^0_{\alpha\beta} x'_\beta)^2}\right\}^{-\frac{1}{2}} = 1 + O(r'),$$
$$\frac{\partial E'}{\partial x'_\alpha} = O(1).$$

Man hat also

$$(69)\quad d\omega = W' d\omega'_0 \text{ mit } W' = \frac{E'}{D'} = 1 + O(r'),\quad \frac{\partial W'}{\partial x'_\alpha} = O(1) \text{ und (exkl. } S_0) \text{ stetig.}$$

Ist die Ausgangsfigur ein Gleichgewichtsellipsoid, so ist die Abbildung (58) die Identität und $W' \equiv 1$.

Jetzt betrachte ich den Mittelwert

$$(70)\qquad M = \frac{\int P' W' d\omega'_0}{\int W' d\omega'_0} = M(x'_1, x'_2, x'_3)$$

von $P = P'(x_1', x_2', x_3')$, die Integrale erstreckt längs eines Ellipsoids (60). Dieses denke ich mir durch eine Ähnlichkeitstransformation im Verhältnis $1 : t'$ auf ein festes zum Parameter C^* gehöriges Ellipsoid (60) abgebildet, dessen Flächendifferential $d\omega_0^* = t' \cdot d\omega_0'$ ist. Wie man sieht, kann man im Ausdruck für M statt $d\omega_0'$ auch einfach $d\omega_0^*$ schreiben.

Nunmehr differenzieren wir, zunächst unter der Annahme $W \equiv 1$

a) $$\frac{\partial M'}{\partial x_\alpha'} = \frac{1}{\int W' d\omega_0^*} \cdot \frac{1}{r'} \frac{\partial r'}{\partial x_\alpha'} \int \sum x_\gamma' \frac{\partial P'}{\partial x_\gamma'} W' d\omega_0^* = \frac{1}{\int W' d\omega_0^*} \frac{x_\alpha'}{r'^2} \int \sum x_\gamma' O(r') W' d\omega_0^*,$$

denn $\int x_\alpha^* d\omega_0^* = 0$, falls $x_\alpha^* = t' \cdot x_\alpha'$, und die partiellen Ableitungen erster Ordnung von P' genügen in einer Umgebung von S_0 einer Lipschitz-Bedingung[23]). Insgesamt ist also auch

(71) $$\frac{\partial M}{\partial x_\alpha} = O(r).$$

Falls im Zähler und Nenner des Mittelwertes M unter den Integralzeichen der Faktor $W \not\equiv 1$ ist, so kommt zu (71) noch die Differenz[23a])

1b) $$\frac{x_\alpha'}{r'^2} \left(\frac{\int P' \sum \frac{\partial W'}{\partial x_\gamma'} x_\gamma' d\omega_0'}{\int W' d\omega_0'} - \frac{\int P' W' d\omega_0'}{\int W' d\omega_0'} \frac{\int \sum \frac{\partial W'}{\partial x_\gamma'} x_\gamma' d\omega_0'}{\int W' d\omega_0'} \right)$$

$$= \frac{x_\alpha'}{r'^2} \frac{1}{\omega} \left\{ \int (P'(0) + O(r')) \sum \frac{\partial W'}{\partial x_\gamma'} x_\gamma' d\omega_0' - (P(0) + O(r)) \int \sum \frac{\partial W'}{\partial x_\gamma'} x_\gamma' d\omega_0' \right\} = O(r),$$

die am Resultat (71) nichts ändert. Im übrigen ist die partielle Ableitung $\frac{\partial M}{\partial x_\alpha}$ in $T + S$ stetig.

Der nach (34) gebildete Mittelwert

(72) $$M_0 = -\mathsf{T}_0 \frac{3v}{\omega} = \frac{1}{\omega} \int_{S_\tau} P_0 d\omega, \qquad P_0 = -\mathsf{T}_0 \psi p = -\mathsf{T}_0 \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha U_\alpha,$$

zeigt ebenfalls das Verhalten (71).

Nun ist noch der durch (35) gegebene Mittelwert N näher zu begründen und zu untersuchen; zugleich müssen wir die genauen Ausdrücke der Größen H und K feststellen.

In der Nachbarschaft einer Niveaufläche S_τ setzen wir $x_{\alpha t} = x_\alpha + a_\alpha \zeta t$ und berechnen in den Variablen t, ξ, η das Volumelement

(74) $$d\tau_t = dx_{1t} dx_{2t} dx_{3t} = \det\left(\frac{\partial x_{\alpha t}}{\partial t}, \frac{\partial x_{\alpha t}}{\partial \xi}, \frac{\partial x_{\alpha t}}{\partial \eta} \right) \cdot dt\, d\xi\, d\eta$$

$$= \zeta \cdot \det\left(a_\alpha, \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi} \zeta t, \frac{\partial x_\alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial a_\alpha}{\partial \eta} \zeta t \right) dt\, d\xi\, d\eta.$$

---

[23]) Vgl. loc. cit. [1]), S. 503.

[23a]) Zunächst stünde in der zweiten Zeile von (71b) vor dem zweiten Integral $P(0) + O(1)$ und auf der rechten Seite $O(1)$; dies gibt weiter die Abschätzung des Textes.

Entwickelt gibt die Determinante in der Bezeichnungsweise (54)

$$(75) \qquad d\tau_t = \zeta \sum a \{dy\,dz + (dy\,dc + db\,dz)\zeta t + db\,dc\,\zeta^2 t^2\}\,dt.$$

Mittels des Ausdruckes (55) für $d\omega$ kann dies auch so geschrieben werden

$$(76) \quad d\tau_t = \zeta \sum a \left\{\frac{\partial(U,y,z)}{\partial(x,y,z)} + \left(\frac{\partial(U,y,c)}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial(U,b,z)}{\partial(x,y,z)}\right)\zeta t + \frac{\partial(U,b,c)}{\partial(x,y,z)}\zeta^2 t^2\right\} d\omega\,dt.$$

Man erkennt jetzt leicht:

$$(77) \qquad d\tau_t = dx_{1t}\,dx_{2t}\,dx_{3t} = \{1 - 2H\zeta t + K\zeta^2 t^2\}\,\zeta\,d\sigma\,dt,$$

wo H die mittlere und K die Gaußsche Krümmung der Niveaufläche S_t ist. Es ist nämlich (vgl. (5))

$$(78) \qquad \sum a \left(\frac{\partial(U,y,c)}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial(U,b,z)}{\partial(x,y,z)}\right) = a_\alpha \left(U_\alpha \frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\gamma} - U_\gamma \frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\alpha}\right) = \psi \frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\gamma}$$

$$= \Delta U - \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \Delta U - U_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta$$

und

$$(79) \qquad \frac{1}{\psi}(\Delta U - U_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta) = -2H,$$

da ja[24])

$$(80) \qquad \Delta U = \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - 2H\psi + \Delta_2 U,$$

wo der auf S_t verstandene zweite Beltramische Differentialausdruck $\Delta_2 U = 0$ und der Laplacesche Differentialausdruck $\Delta U = -4\pi f + 2\frac{\omega^2}{\varkappa} = \text{konst.}$ ist.

Den Koeffizienten von ζ^3 in (77) als Gaußsche Krümmung zu erkennen, beachten wir

$$(81) \qquad \sum a\,db\,dc = 2\sum a^2 \frac{db\,dc}{2a} = 2\,d\omega_a = d\sigma_a = K\,d\sigma,$$

wo $d\omega_a$, $d\sigma_a$ das Flächendifferential und Oberflächenelement auf dem sphärischen Bild $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, K die Gaußsche Krümmung von S_t bedeutet. Wir brauchen für K vor allem noch einen zu (79) analogen Ausdruck; dieser folgt aus dem Vergleich von (77) und (76) und aus

$$(82) \quad \sum a \frac{\partial(U,b,c)}{\partial(x,y,z)} = \frac{1}{\psi}\sum U_x \frac{\partial(U,b,c)}{\partial(x,y,z)} = -\frac{1}{\psi}\begin{vmatrix} 0 & U_\beta \\ U_\alpha & \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\psi} U^{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta,$$

$U^{\alpha\beta}$ das algebraische Komplement von $U_{\alpha\beta}$ in der Matrix $(U_{\alpha\beta})$, nämlich

$$(83) \qquad \frac{1}{\psi^2} U^{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta = K.$$

---

[24]) Vgl. J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, Paris 1903, S. 50.

Dafür daß das von S_τ und $S_{\tau 1}$ eingeschlossene Volumen

$$\int_{T_{\tau 1}-T_\tau} d\tau_t = \int_0^1 dt \int_{S_\tau} \{1 - 2H\zeta t + K\zeta^2 t^3\}\zeta\, d\sigma \tag{84}$$

$$= \int_{S_\tau} \zeta\, d\sigma - \int_{S_\tau} \left(H - \frac{1}{3}K\zeta\right)\zeta^2\, d\sigma$$

verschwindet, ist die Bedingung die in (35) angegebene. Die dort betrachtete Größe N schreibt sich jetzt als Mittelwert

$$N = \frac{1}{\omega}\int_{S_\tau} Q\, d\omega, \tag{85}$$

wo

$$Q = \left(H\psi - \frac{1}{3}K\psi^2 \cdot \frac{\zeta}{\psi}\right)\zeta^2 \tag{86}$$

mittels der Ausdrücke (79), (83) zu bilden ist und wegen

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right| \leqq \varepsilon_0, \quad |\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon_0 r \tag{87}$$

in $T+S$ (inklusive des Zentrums S_0) stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt, die bei Annäherung an S_0 sich wie $O(r)$ verhalten. Daher läßt sich N in ähnlicher Weise wie M behandeln, z. B. gilt im Fall eines Gleichgewichtsellipsoids als Ausgangsfigur

$$\frac{\partial N'}{\partial x'_\alpha} = \frac{1}{\omega}\frac{x'_\alpha}{r'^2}\int_{S_\tau} \sum x'_\gamma \frac{\partial Q'}{\partial x'_\gamma}\, d\omega = O(r), \qquad \frac{\partial N}{\partial x_\alpha} = O(r), \tag{88}$$

wie man diesmal sogar ganz direkt sieht, und dies Resultat gilt wieder allgemein. Da im Zentrum $N = 0$ ist, so ist $N = O(r^2)$.

§ 5.

Auflösung.

Wir nehmen an, es gelten die Ungleichheiten

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right| \leqq \Omega \leqq \varepsilon_0, \quad |\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\Omega r \text{ in } T+S, \quad |\lambda|, |\alpha|, |\mathfrak{r}_j| \leqq \Omega_1. \tag{89}$$

Da $\lim_{r\to 0} M = P(x_\alpha^0)$, gleich dem Wert von P im Zentrum S_0 ist, verschwindet dort $P - M$, sowie $P_0 - M_0$ in der Bezeichnung (72); dasselbe gilt, wie wir eben schon bemerkt haben, von N. Ferner wegen (1) von U_α, also von der ganzen rechten Seite R in (49). Die Ableitungen erster Ordnung von P sind in $T+S$ (mit Einschluß von S_0) stetig. Wir wollen nun die Parameter (t_α) so einrichten, daß die rechte Seite in S_0 die Ableitungen

$$\left.\frac{\partial R}{\partial x_\beta}\right|^0 = 0 \tag{90}$$

besitzt. Man hat dazu nur zu fordern (vgl. (72))

$$\sum_\alpha U^0_{\alpha\beta} t_\alpha = \frac{\partial P}{\partial x_\beta}\Big|^0 - \mathsf{T}_0 \sum_\alpha U^0_{\alpha\beta} x^0_\alpha \qquad (\beta = 1, 2, 3), \tag{91}$$

und dieses Gleichungssystem läßt sich nach t_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ auflösen[25]), da in S_0 die Hessesche Determinante

$$\det(U^0_{\alpha\beta}) < 0 \tag{92}$$

ist, nach Voraussetzung (2). Wir erhalten so

$$t_\gamma = \mathsf{T}_\gamma\{\lambda, \alpha, \mathfrak{x}_j, \zeta\} \tag{93}$$

als Funktionale, die der Ungleichheit

$$|\mathsf{T}_\gamma| \leqq A_\gamma(\Omega_1 + (\Omega_1 + \Omega)\,\Omega) \qquad (A_\gamma, \ldots \text{konstant}) \tag{94}$$

genügen. Diese T_γ setzen wir für t_γ in P und damit auch in M ein, dann gilt für $-\sum \mathsf{T}_\alpha U_\alpha - \mathsf{T}_0 \psi p + P = P^*$ wegen (91)

$$\left|\frac{\partial P^*}{\partial x_\alpha}\right| \leqq A^*(\Omega_1 + (\Omega_1 + \Omega)\,\Omega)\,r; \tag{95}$$

denn nach den Feststellungen von Herrn Lichtenstein[26]) besitzt P und damit P^* partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer Lipschitzbedingung genügen. Da weiter für M, $M_0 = -\mathsf{T}_0 \frac{3v}{\omega}$ und N die Ungleichheiten (72), (85) bestehen, präziser

$$\left|\frac{\partial M}{\partial x_\alpha}\right|, \left|\frac{\partial M_0}{\partial x_\alpha}\right|, \left|\frac{\partial N}{\partial x_\alpha}\right| \leqq A_*(\Omega_1 + (\Omega_1 + \Omega)\,\Omega)\,r, \tag{96}$$

und $R = P^* - M - M_0 + N$ ist, so wird schließlich

$$\left|\frac{\partial R}{\partial x_\alpha}\right| \leqq A(\Omega_1 + (\Omega_1 + \Omega)\,\Omega)\,r, \qquad |R| \leqq \sqrt{3}\,A(\Omega_1 + (\Omega_1 + \Omega)\,\Omega)\,r^2, \tag{97}$$

letzteres, da ja R in S_0 verschwindet.

Gerade diese auch für komplexwertiges ζ gültigen Ungleichheiten (97), die aber jetzt ohne Symmetrievoraussetzungen abgeleitet sind, gestatten alle weiteren Betrachtungen so wie in der Abhandlung von Herrn Lichtenstein durchzuführen. Man setzt also

$$\overset{\nu}{\psi}\overset{\nu}{\zeta} = R\{\overset{\nu-1}{\mathsf{T}_1}, \overset{\nu-1}{\mathsf{T}_2}, \overset{\nu-1}{\mathsf{T}_3}, \lambda, \alpha, \mathfrak{x}_j, \overset{\nu-1}{\zeta}\} \qquad (\overset{0}{\zeta} \equiv 0,\ \nu = 1, 2, \ldots), \tag{98}$$

wo die Funktionale T_γ mit der vorhergehenden Approximation $\overset{\nu-1}{\zeta}$ gebildet sind. Für genügend kleine Beträge von Ω_1 bekommt man so, wie sich zeigen läßt, in der Grenze

$$\zeta = \lim_{\nu \to \infty} \overset{\nu}{\zeta} = \mathfrak{P}(\lambda, \alpha, \mathfrak{x}_j); \tag{99}$$

---

[25]) Mittels sukzessiver Approximationen, da die t_α auch auf der rechten Seite von (91) vorkommen, vgl. (12).

[26]) Loc. cit. [1]) S. 503.

die Funktion ζ ist in $T+S$ stetig, verschwindet im Zentrum S_0 und hat in $T+S$ beschränkte und höchstens mit Ausnahme von S_0 stetige partielle Ableitungen erster Ordnung:

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right| \leqq \varepsilon_0, \quad |\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon_0 r; \tag{100}$$

in der Potenzentwicklung $\mathfrak{P}$ nach $\lambda, \alpha, \mathfrak{r}_j$ sind die Koeffizienten stetige Funktionen in $T+S$ mit beschränkten und eventuell exklusiv S_0 stetigen Ableitungen erster Ordnung. Die Funktion ζ genügt zusammen mit den Parametern $\mathfrak{r}_j$ der Gleichung (49) in dem Sinne, daß in R für t_γ nach (93) die Funktionale $\mathsf{T}_\gamma\{\lambda, \alpha, \mathfrak{r}_j, \zeta\}$ einzusetzen sind.

Nun müssen wir in den Gleichungen des § 3 wieder rückwärts gehen. Da wegen (36), (47) das auf der rechten Seite von (48) stehende Funktional auf S verschwindet, kann man es gleich $s - \frac{C}{\bar{C}}\bar{s}$ setzen und zu (31) gelangen. Sodann geht man auf die Oberfläche S und erhält wegen (41) statt (27) und (26) zwei Beziehungen (27*) und (26*), in denen statt $\mathfrak{r}_j$ der mit (38) gebildete Ausdruck

$$\mathfrak{r}_j^* = \mathfrak{r}_j - \Phi_j \tag{101}$$

steht. Aus der entsprechenden Gleichung (24*) schließt man in bekannter Weise[27])

$$\bar{L}(\delta) - \bar{\Phi} = \sum_j \Big(\mathfrak{r}_j^* + \int_S f\psi\,\delta\,u_j\,d\sigma\Big)\,\bar{\psi}\,\bar{u}_j = \bar{\psi}\sum\Phi_j u_j. \tag{102}$$

Nebenbei bemerkt ist also

$$\mathfrak{r}_j + \int_S f\psi\,\delta u_j\,d\sigma = 2\,\Phi_j. \tag{103}$$

Ich denke jetzt den Körper $T_1 + S_1$, der aus dem um $(t_\alpha) = (\mathsf{T}_\alpha)$ verschobenen Körper $\dot{T}+\dot{S}$ entsteht, indem auf den Flächen $\dot{S}_r$ jeweils die Abstandsfunktion ζ aufgetragen wird. Daß dieser Körper $T_1 + S_1$ eine Gleichgewichtsfigur bildet, ist nicht gesagt, wohl aber ergibt sich aus (102), (20) die Formel

$$U_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) - \bar{C}_1 = \bar{\psi}\sum\Phi_j\,\bar{u}_j. \tag{104}$$

Durch Multiplikation von (104) mit $f\bar{c}_1$ bzw. $f\gamma_1 = f(\bar{x}_1\bar{b}_1 - \bar{y}_1\bar{a}_1)$, Integration über S_1 und nachfolgende Umwandlung der links auftretenden Oberflächenintegrale nach dem Gaußschen Satz in Volumintegrale, die den verschwindenden resultierenden Vektor bzw. das verschwindende resultierende Moment der (inneren) Newtonschen Gravitationskräfte von T_1 darstellen,

[27]) Vgl. loc. cit. [8]) S. 207 f.

folgen schließlich in $\lambda, \alpha, \mathfrak{r}_j$ die beiden Identitäten

$$\sum_j \int_S f\psi\, c_1\, \bar{u}_j\, d\sigma_1 \cdot \Phi_j = 0,$$
$$\sum_j \int_S f\psi\, \gamma_1\, \bar{u}_j\, d\sigma_1 \cdot \Phi_j = 0. \tag{105}$$

Sie gestatten, falls T keine Rotationssymmetrie um die z-Achse besitzt, Φ_1 und Φ_2 durch die übrigen Φ_j $(j = 3, \ldots, m)$ linear auszudrücken; falls T Rotationssymmetrie besitzt, gestattet die erste Identität (105) den auf die dann allein vorhandene Nullösung u_1 bezüglichen Ausdruck Φ_1 durch die übrigen Φ_j $(j = 2, \ldots, m)$ linear auszudrücken.

Die *nichttrivialen* Verzweigungsgleichungen $\Phi_j = 0$ $(j = 3, \ldots, m$ bzw. $j = 2, \ldots, m)$, in denen für ζ die Potenzentwicklung (99) nach $\lambda, \alpha, \mathfrak{r}_j$ einzusetzen ist, nach den nichttrivialen Parametern $\mathfrak{r}_j$ $(j = 3, \ldots, m$ bzw. $j = 2, \ldots, m)$ aufzulösen (bei bestimmten $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ bzw. $\mathfrak{r}_1$), ist ein Problem für sich, das in jedem einzelnen Fall behandelt werden muß. Hat man es aber gelöst, so ist man fertig: man hat dann eine Gleichgewichtsfigur in der Nachbarschaft von $T + S$ und selbstverständlich dann gleich auch die ganze von $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ bzw. $\mathfrak{r}_1$ abhängige Schar der durch Translation längs der z-Achse und durch Rotation um die z-Achse daraus hervorgehenden Gleichgewichtsfiguren.

Insbesondere sind im regulären Fall $\Phi_1 = 0$ (und eventuell $\Phi_2 = 0$) identisch in $\lambda, \alpha, \mathfrak{r}_1$ (und $\mathfrak{r}_2$) erfüllt.

Leipzig, den 3. November 1932.

(Eingegangen am 5. November 1932.)

Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre.

(Dritte Abhandlung[1]).)

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Einleitung.

Es sei r ganz, $r \geqq 5$;

$$Q = Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{r} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

sei eine positiv definite quadratische Form[2]) mit der Determinante D. Wenn $x > 0$ (in der Folge wird stets $x > 0$ vorausgesetzt), so sei $A(x) = A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$. Das Volumen dieses Ellipsoides ist

$$V(x) = V_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}. \tag{1}$$

Endlich sei

$$\mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x); \quad R(x) = R_Q(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |\mathsf{P}_Q(y)|\,dy. \tag{2}$$

In Mw I und Mw II habe ich die O-Ω-Probleme für $R(x)$ untersucht; hier will ich eine andere Reihe von Problemen behandeln, wobei ich

[1]) Die erste und zweite Abhandlung sind in dieser Zeitschrift **33** (1931), S. 62–84 und S. 85–97 erschienen; sie werden weiter mit Mw I, Mw II zitiert. Außerdem beachte man meine Abhandlungen „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Math. Annalen **100** (1928), S. 699–721; Math. Annalen **101** (1929), S. 136–146; The Tôhoku Mathematical Journal **30** (1929), S. 354–371; sie werden weiter der Reihe nach mit Gp I, Gp II, Gp III zitiert.

[2]) Mit sonst beliebigen reellen Koeffizienten.

mich meistens auf die Formen folgender einfacher Gestalt beschränke[3]):

$$Q(u) = \alpha_1(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \ldots + u_r^2)$$
$$(\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ r = r_1 + r_2,\ r_1 \geqq 4,\ r_2 \geqq 4).$$

Um eine bequeme Ausdrucksweise zu erreichen, führe ich folgende Bezeichnungen ein, von welchen die drei ersteren allgemein geläufig sind.

Es seien $f(x)$, $g(x)$ für hinreichend große x definiert, $g(x) > 0$ für hinreichend große x.

Die Beziehung

$$f(x) = O(g(x)), \quad \text{bzw. } f(x) = o(g(x)), \quad \text{bzw. } f(x) = \Omega(g(x))$$

sei gleichbedeutend mit

$$\limsup_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty, \quad \text{bzw. } \limsup_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0, \quad \text{bzw. } \limsup_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} > 0.$$

Ebenso die Beziehung

$$f(x) = \underline{O}(g(x)), \quad \text{bzw. } f(x) = \underline{o}(g(x)), \quad \text{bzw. } f(x) = \underline{\Omega}(g(x))$$

sei gleichbedeutend mit

$$\liminf_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty, \quad \text{bzw. } \liminf_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0, \quad \text{bzw. } \liminf_{x=\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} > 0.$$

Die Symbole O, o, Ω beziehen sich also sozusagen auf die maximale Größenordnung, die Symbole $\underline{O}$, $\underline{o}$, $\underline{\Omega}$ auf die minimale Größenordnung von $f(x)$ bei wachsendem x.

In dieser Abhandlung will ich nun eine Reihe von $\underline{O}$-$\underline{\Omega}$-Sätzen über $R(x)$ beweisen und werde diese Resultate mit den (meistens bekannten) O-o-Ω-Sätzen vergleichen. Der folgende Satz zeigt noch keinen Unterschied zwischen dem O-Ω-Problem und dem $\underline{O}$-$\underline{\Omega}$-Problem:

Satz 1. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 *ganz*; $r = r_1 + r_2$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *rational*;

(3) $\quad Q(u) = \alpha_1(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \ldots + u_r^2)$.

Dann ist

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right), \tag{4}$$

$$R_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right), \tag{5}$$

$$R_Q(x) = \underline{O}\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right), \tag{6}$$

$$R_Q(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right). \tag{7}$$

[3]) Ich formuliere auch die Resultate meistens nur für solche Formen, obwohl sie teilweise etwas allgemeiner gelten.

$R_Q(x)$ verhält sich also in diesem Fall sehr regulär: es gibt zwei positive Zahlen a_1, a_2, so daß für alle hinreichend großen x

$$a_1 x^{\frac{r}{2}-1} < R_Q(x) < a_2 x^{\frac{r}{2}-1}$$

gilt. Der Satz 1 ist nicht neu; (4) ist in der dritten Behauptung des Hauptsatzes aus Mw I[4]), (7) im Satz 3 aus Mw I enthalten; (6) folgt offenbar aus (4); (5) aus (7).

Wenn wir die Voraussetzung der Rationalität von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ fallen lassen, bekommen wir folgenden Satz:

Satz 2. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 *ganz*, $r_1 + r_2 = r$; *für* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ *sei* $Q(u)$ *durch* (3) *gegeben.*

Behauptung 1. *Für alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-2}\right).$$

Behauptung 2. *Für alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{r}{2}-2}\right).$$

Behauptung 3. *Für fast alle*[5]) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right) \quad \textit{für jedes } \varepsilon > 0.$$

Behauptung 4. *Für fast alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = \underline{O}\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right) \quad \textit{für jedes } \varepsilon > 0.$$

Die Behauptung 1 folgt natürlich aus der Behauptung 2 und die Behauptung 4 aus der Behauptung 3. Übrigens ist die Behauptung 3 nicht neu[6]), sie wird aber in der Folge mitbewiesen werden.

---

[4]) Übrigens ist nach Herrn A. Walfisz $P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$, woraus sofort (4) folgt. Über die Geschichte der O-Ω-Probleme für $P_Q(x)$ vgl. die Einleitung zu Mw I oder noch besser A. Walfisz, Über einige neuere Ergebnisse der Gitterpunktlehre, Prace matematyczno-fizyczne **36** (1928–1929), S. 107–135.

[5]) Die Behauptung 3 ist folgendermaßen zu verstehen: Es gibt im Cartesischen Raume der Punkte $[\alpha_1, \alpha_2]$ (mit den Koordinaten α_1, α_2) eine Punktmenge N vom Lebesgueschen Maß Null, die folgende Eigenschaft besitzt: wenn $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ und wenn der Punkt $[\alpha_1, \alpha_2]$ nicht zu N gehört, so ist für die Form (3) $R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Analog sind die Worte „fast alle“ in allen übrigen Fällen zu verstehen.

[6]) In Gp I, Satz 2 (Spezialfall $\sigma = 2$) wurde nämlich bewiesen: für fast alle $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ ist $P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right)$ für jedes $\varepsilon > 0$, woraus natürlich die Behauptung 3 folgt.

Der Fall „$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ rational“ wurde durch den Satz 1 erledigt; der Fall „$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ irrational“ wurde durch den Satz 2 nur für *„fast alle“* α_1, α_2 erledigt (und dazu noch nur „bis auf x^ε“); wenn wir nach Resultaten suchen, die für *alle* irrationalen $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ gelten, kommen wir zu folgenden Sätzen, in welchen sich zum erstenmal ein scharfer Unterschied zwischen dem O-o-Ω-Problem und dem $\underline{O}$-$\underline{\Omega}$-Problem zeigt:

Satz 3. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, r_1, r_2 *ganz*; $r_1 + r_2 = r$.

Behauptung 1. *Wenn* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *irrational, so gilt für die Form* (3)

$$R_Q(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Behauptung 2. *Es sei* $\varphi(x) \to +\infty$ *für* $x \to +\infty$; *dann gibt es zwei Zahlen* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ *mit irrationalem* $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *so, daß für die Form* (3) *die Abschätzung*

$$R_Q(x) = \Omega\left(\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{\varphi(x)}\right)$$

gilt.

Satz 4. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 *ganz*; $r = r_1 + r_2$, $z = \min(r_1, r_2)$.

Behauptung 1. *Wenn* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *irrational, so gilt für die Form* (3) *die Abschätzung*

$$R_Q(x) = \underline{O}\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{z-2}{z}+\varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Behauptung 2. *Es gibt zwei Zahlen* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ *mit irrationalem* $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *so, daß für die Form* (3) *die Abschätzung*

$$R_Q(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{r}{r+2}} \cdot \frac{1}{\log x}\right)$$

gilt.

Für rationales $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ gilt nach Satz 1

$$0 < \liminf_{x=\infty} \frac{R_Q(x)}{x^{\frac{r}{2}-1}} \leqq \limsup_{x=\infty} \frac{R_Q(x)}{x^{\frac{r}{2}-1}} < \infty;$$

für irrationales $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ ist zwar nach der Behauptung 1 des Satzes 3 $\lim_{x=\infty} R_Q(x) : x^{\frac{r}{2}-1} = 0$, aber die Konvergenz kann nach der Behauptung 2 des Satzes 3 beliebig langsam sein, wenn man α_1, α_2 geeignet wählt; das O-Ω-Verhalten von $R_Q(x)$ bei irrationalem $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ schließt sich dem Verhalten bei rationalem $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ sozusagen stetig an. Ganz anders liegt die Sache bei dem

$\underline{O}$-$\underline{\Omega}$-Problem, wo man nach der Behauptung 1 des Satzes 4 stets sogar einen kleineren Exponenten als $\frac{r}{2}-1$ bekommt. Ich bemerke noch, daß die Behauptung 1 des Satzes 3 nicht neu ist; nach Gp II gilt nämlich in diesem Fall $P_Q(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$, also um so mehr $R_Q(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$.

Für spätere Zwecke wollen wir noch eine unmittelbare Folgerung des Satzes 4 hervorheben. Für ganze $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$ $(r_1+r_2=r, \operatorname{Min}(r_1, r_2)=z)$ sei $g(r_1, r_2)$ die untere Grenze derjenigen Zahlen a, für welche

$$R_Q(x) = \underline{O}(x^a)$$

ist für jede Form (3) mit $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ und mit irrationalem $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Dann ist nach Satz 4

$$\frac{r}{2}-1-\frac{z-2}{z} \geqq g(r_1, r_2) \geqq \frac{r}{2}-1-\frac{r}{r+2},$$

also insbesondere

Satz 4a. $$\lim_{\substack{r_1=\infty \\ r_2=\infty}} \left(g(r_1, r_2) - \left(\frac{r}{2}-2\right)\right) = 0.$$

Wir wollen uns noch eine andere Frage stellen. Es sei $Q(u)$ durch (3) gegeben, wo $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, $r = r_1 + r_2$; dann sei $f_1 = f_1(Q)$ die untere Grenze derjenigen Zahlen a, für welche $R_Q(x) = O(x^a)$; analog sei $f_2 = f_2(Q)$ die untere Grenze derjenigen Zahlen a, für welche $R_Q(x) = \underline{O}(x^a)$. (Also ist bei jedem $\varepsilon > 0$:

$$R_Q(x) = O(x^{f_1+\varepsilon}), \quad R_Q(x) = \Omega(x^{f_1-\varepsilon}); \quad R_Q(x) = \underline{O}(x^{f_2+\varepsilon}), \quad R_Q(x) = \underline{\Omega}(x^{f_2-\varepsilon})).$$

Es ist stets $f_2 \leqq f_1$ und für den Verlauf von $R_Q(x)$ ist es sicher von Bedeutung, ob das Gleichheitszeichen gilt oder nicht[7]). Diese Frage wollen wir beantworten, wir müssen aber noch eine Definition vorausschicken. Es sei β eine reelle Irrationalzahl; wir bezeichnen mit $\nu(\beta)$ die obere Grenze aller Zahlen a, die folgende Eigenschaft haben: Es gibt eine Folge von Paaren ganzer Zahlen s_1, t_1; s_2, t_2; s_3, t_3 so, daß bei wachsendem n

$$t_n \to +\infty, \quad \left|\beta - \frac{s_n}{t_n}\right| = O\left(\frac{1}{t_n^{2+a}}\right).$$

(Aus den Elementen der Theorie der Kettenbrüche folgt, daß stets

---

[7]) Wenn $f_1(Q) = f_2(Q)$, so ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$x^{f_1-\varepsilon} < R_Q(x) < x^{f_1+\varepsilon}$$

von einem x an: die Größenordnung von $R_Q(x)$ bei wachsendem x ist gewissermaßen „stabil". Wenn dagegen $f_2(Q) < f_1(Q)$, so ist für jedes $\varepsilon > 0$ immer wieder $R_Q(x) > x^{f_1-\varepsilon}$ und immer wieder $R_Q(x) < x^{f_2+\varepsilon}$: Die Größenordnung von $R_Q(x)$ „schwankt" bei wachsendem x.

$0 \leqq \nu(\beta) \leqq \infty$; und umgekehrt zu jedem ν mit $0 \leqq \nu \leqq \infty$ gibt es eine reelle Irrationalzahl β mit $\nu(\beta) = \nu$; offenbar ist $\nu\left(\frac{1}{\beta}\right) = \nu(\beta)$.) Und wir werden zeigen:

Satz 5. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 *ganz*; $r_1 + r_2 = r$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$; $Q(u)$ *sei durch* (3) *gegeben.*

Behauptung. *Dann und nur dann ist* $f_1(Q) = f_2(Q)$, *wenn entweder* $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *rational oder* $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 0$ *ist.*

Wir werden noch mehr beweisen; wir werden nämlich f_1 bestimmen und für f_2 eine obere Schranke finden:

Satz 6. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 *ganz*; $r = r_1 + r_2$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *irrational*, $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \nu$; $Q(u)$ *sei durch* (3) *gegeben. Dann ist*

$$f_1(Q) = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}$$

$\left(\text{für } \nu = \infty \text{ ist } \frac{1}{\nu+1} = 0 \text{ zu setzen}\right)$.

Satz 7. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 *ganz*; $r = r_1 + r_2$, $z = \mathrm{Min}(r_1, r_2)$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *irrational*, $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \nu$; $Q(u)$ *sei durch* (3) *gegeben. Dann ist*

$$\frac{r}{2} - 2 \leqq f_2(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{z-2}{z - \frac{2}{\nu+1}}$$

(für $\nu = \infty$ ist $\frac{2}{\nu+1} = 0$ zu setzen; die Ungleichung $f_2(Q) \geqq \frac{r}{2} - 2$ folgt aus der Behauptung 2 des Satzes 2).

Durch die Sätze 1, 6, 7 wird der Satz 5 bewiesen sein; denn aus Satz 1 folgt $f_1(Q) = f_2(Q) = \frac{r}{2} - 1$, wenn $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ rational ist. Aus Satz 6 und 7 folgt $f_1(Q) = f_2(Q) = \frac{r}{2} - 2$ für $\nu = 0$. Aus Satz 6 und 7 folgt $f_2(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{z-2}{z} < \frac{r}{2} - 1 = f_1(Q)$ für $\nu = \infty$. Für $0 < \nu < \infty$ folgt endlich aus Satz 6 und 7

$$f_2(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{z-2}{z - \frac{2}{\nu+1}} < \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1} = f_1(Q);$$

es ist nämlich

$$\frac{1}{\nu+1} < \frac{z-2}{z - \frac{2}{\nu+1}},$$

d. h.

$$z - \frac{2}{\nu+1} - (z-2)(\nu+1) < 0$$

für $0 < \nu < \infty$, $z \geqq 4$; denn für $\nu = 0$ ist die linke Seite

$$z - \frac{2}{\nu+1} - (z-2)(\nu+1)$$

gleich Null und für $\nu > 0$ ist ihre Ableitung nach ν gleich

$$\frac{2}{(\nu+1)^2} - (z-2) < 2 - (z-2) \leqq 0.$$

Bei dieser Gelegenheit — weil es keine Mühe mehr macht — beweise ich noch einen Satz, der sich auf $P_Q(x)$ bezieht und dem die Abhandlung Gp III gewidmet war. Es sei $f(Q)$ die untere Grenze derjenigen Zahlen a, für welche $P_Q(x) = O(x^a)$ ist. Dann gilt der

Satz 8. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 *ganz*; $r_1 + r_2 = r$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *irrational*, $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \nu$; $Q(u)$ *sei durch* (3) *gegeben. Dann ist*

$$f(Q) = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}$$

$\left(\text{für } \nu = \infty \text{ ist } \frac{1}{\nu+1} = 0 \text{ zu setzen}\right)$.

Wir wollen noch einige Worte über die Formen der Gestalt

$$(8) \quad Q(u) = \alpha_1(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \ldots + u_{r_1+r_2}^2) + \alpha_3(u_{r_1+r_2+1}^2 + u_{r_1+r_2+2}^2 + \ldots + u_r^2)$$

sagen. Analog zum Satz 2 gilt hier der

Satz 9. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, $r_3 \geqq 4$; r_1, r_2, r_3 *ganz*; $r_1 + r_2 + r_3 = r$; *für* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ *sei* $Q(u)$ *durch* (8) *definiert.*

Behauptung 1. *Für alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-3}\right).$$

Behauptung 2. *Für alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = \underline{\Omega}\left(x^{\frac{r}{2}-3}\right).$$

Behauptung 3. *Für fast alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Behauptung 4. *Für fast alle* $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ *ist*

$$R_Q(x) = \underline{O}\left(x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Man sieht, daß die Zahl $\frac{r}{2}-3$ im Satz 9 genau dieselbe Rolle spielt wie die Zahl $\frac{r}{2}-2$ im Satz 2. Wir wollen nun eine Funktion $g(r_1, r_2, r_3)$ analog zu $g(r_1, r_2)$ definieren. Für ganze $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, $r_3 \geqq 4$ sei $g(r_1, r_2, r_3)$ die untere Grenze derjenigen Zahlen a, die folgende Eigenschaft haben: Wenn $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ und wenn keine Relation

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \qquad (k_1, k_2, k_3 \text{ ganz}, k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 > 0)$$

gilt[8]), so ist für die Form (8)

$$R_Q(x) = \underline{O}(x^a).$$

In Analogie mit dem Satz 4a könnte man erwarten, daß

$$\lim_{\substack{r_1=\infty,\ r_2=\infty,\\ r_3=\infty}} \left(g(r_1, r_2, r_3) - \left(\frac{r}{2}-3\right)\right) = 0.$$

Dies ist aber nicht der Fall, denn es gilt der

Satz 10. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, $r_3 \geqq 4$; r_1, r_2, r_3 *ganz*, $r = r_1 + r_2 + r_3$. *Dann ist*

$$g(r_1, r_2, r_3) \geqq \frac{r}{2} - 2.$$

Der Satz 10 zusammen mit dem Satz 4a deutet auf einen tiefen Unterschied zwischen den Formen (3) und den Formen (8) hin. Den wahrscheinlichen Grund dieses Unterschieds wird der Leser bei dem Beweis des Satzes 10 kennen lernen.

Der Beweis der angeführten Sätze beruht hauptsächlich auf den folgenden Hauptsätzen:

Hauptsatz 1. Voraussetzungen und Bezeichnungen. *Es sei* $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$; r_1, r_2 *ganz*; $r = r_1 + r_2$, $z = \mathrm{Min}(r_1, r_2)$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ *irrational*;

$$Q(u) = \alpha_1(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \ldots + u_r^2).$$

Es seien $q_0, q_1, q_2, \ldots$ *die Näherungsnenner der Zahl* $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. *Für* $x > 1$ *werde die ganze Zahl* $w = w(x)$ *durch* $q_w \leqq x < q_{w+1}$ *definiert. Es sei* $\varepsilon > 0$.

Behauptung. *Für wachsendes* x *ist*

$$(9) \qquad P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right).$$

---

[8]) Diese Bedingung ist ein genaues Analogon der Bedingung „$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ irrational“ bei der Definition von $g(r_1, r_2)$; denn statt „Es ist $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ irrational“ kann man auch sagen „Es ist $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ und es gilt keine Relation

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0 \qquad (k_1, k_2 \text{ ganz}, k_1^2 + k_2^2 > 0)“.$$

Bemerkung 1. Wegen $q_w \leqq x$ darf man in der Klammer rechts in (9) das Glied $x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}$ weglassen.

Bemerkung 2. Mit $c_1, c_2, c_3, \ldots$ bezeichnen wir im folgenden positive Zahlen, die nur von $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2, \varepsilon$ abhängen.

Bemerkung 3. Wenn $\alpha > 0$ eine irrationale Zahl ist, so besitzt sie eine eindeutig bestimmte regelmäßige Kettenbruchentwicklung

$$\alpha = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \ldots}}} \qquad \begin{pmatrix} b_i \text{ ganz für } i \geqq 0, \\ b_0 \geqq 0,\ b_j > 0 \text{ für } j \geqq 1 \end{pmatrix}.$$

Die Näherungszähler x_n und die Näherungsnenner y_n der Zahl α sind folgendermaßen erklärt:

$$x_0 = b_0,\ y_0 = 1;\ x_1 = b_0 b_1 + 1,\ y_1 = b_1;\ x_{n+1} = b_{n+1} x_n + x_{n-1},$$
$$y_{n+1} = b_{n+1} y_n + y_{n-1} \qquad (n \geqq 1).$$

Daraus folgt erstens

$$0 \leqq x_0 < x_1 \leqq x_2 < x_3 < x_4 < \ldots, \quad 1 = y_0 \leqq y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots,$$

zweitens

$$x_{n+2} \geqq 2 x_n, \quad y_{n+2} \geqq 2 y_n \qquad (n \geqq 0).$$

Also ist offenbar für wachsendes x und für $a > 0$

$$\sum_{y_n \leqq x} y_n^a = O(x^a), \quad \sum_{y_n \geqq x} y_n^{-a} = O(x^{-a}), \quad \sum_{y_n \leqq x} 1 = O(\log x)$$

und analog für die x_n. Weiter ist bekanntlich

$$(x_n, y_n) = 1, \quad \frac{1}{2 y_n y_{n+1}} \leqq \frac{1}{y_n (y_{n+1} + y_n)} < \left| \alpha - \frac{x_n}{y_n} \right| < \frac{1}{y_n y_{n+1}} \quad (n \geqq 0)$$

und wenn für zwei ganze Zahlen p, q mit $q > 0$ gilt $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$, so ist notwendig $\frac{p}{q} = \frac{x_n}{y_n}$ für irgendein $n \geqq 0$.

Wenn $\alpha > 1$, so ist $b_0 > 0$ und

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \ldots}}}.$$

Also: der n-te Näherungszähler von α ist gleich dem $(n+1)$-ten Näherungsnenner von $\frac{1}{\alpha}$ und der n-te Näherungsnenner von α ist gleich dem $(n+1)$-ten Näherungszähler von $\frac{1}{\alpha}$. Alle diese Eigenschaften werden wir oft brauchen. Die Näherungszähler von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ werden wir in dieser Abhandlung stets mit p_n, die Näherungsnenner von $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ mit q_n, die Näherungszähler von $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ mit π_n, die Näherungsnenner von $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ mit ϱ_n bezeichnen.

Hauptsatz 2. *Dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie im Hauptsatz* 1.

Behauptung.

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{r}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right).$$

Hauptsatz 3. *Dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie im Hauptsatz* 1.

Behauptung. *Für* $x > c_1$ *ist*

$$R_Q(x) > c_2\left(x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{r}{2}} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q_w}\right).$$

Wir werden im § 2 die Sätze 1 bis 10 beweisen unter der Voraussetzung, daß die drei Hauptsätze bereits bewiesen sind; im § 3 werden wir den Beweis der beiden ersten Hauptsätze, im § 4 den Beweis des Hauptsatzes 3 durchführen.

§ 2.

Beweis der Sätze 1 bis 10.

In diesem Paragraphen setzen wir voraus, daß die Hauptsätze 1, 2, 3 bereits bewiesen sind. Den Satz 1 brauche ich nicht zu beweisen, da er bereits bekannt ist.

Beweis der Behauptung 1 und 2 des Satzes 2. Für rationales $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ sind sie durch den Satz 1 bewiesen. Für irrationales $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ ist nach dem Hauptsatz 3

$$R_Q(x) > c_2 \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q_w} \geqq c_2 x^{\frac{r}{2}-2} \quad \text{für} \quad x > c_1,$$

womit die Behauptung 2 und also um so mehr die Behauptung 1 bewiesen ist.

Beweis des Satzes 3. Die Behauptung 1 brauche ich nicht zu beweisen, da sie bereits bekannt ist. Die Behauptung 2 beweise ich folgendermaßen: Wir setzen $\alpha_1 = 1$ und in dem Kettenbruch

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots$$

wählen wir die Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ sukzessive so, daß für hinreichend große v gilt $q_v < \varphi(q_{v+1})$. Dann ist nach dem Hauptsatz 3 ($x = q_w$ gesetzt)

$$R_Q(q_w) > c_2 q_w^{\frac{r}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_{w-1}} > c_2 \frac{q_w^{\frac{r}{2}-1}}{\varphi(q_w)}$$

für hinreichend große w, w. z. b. w.

Beweis der Sätze 6, 8. Wir bemerken zuerst: Nach den elementarsten Eigenschaften der Kettenbrüche ist $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$ gleich der unteren Grenze derjenigen Zahlen a, für welche $q_{n+1} = O(q_n^{a+1})$ (bei wachsendem n). Es sei also $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \nu$; wir beweisen zuerst die Ungleichung

$$f(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}. \tag{10}$$

Für $\nu = \infty$ ist nichts zu beweisen, da nach Gp II $f(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1$ ist. Es sei also $0 \leqq \nu < \infty$, $a > \nu$, $\varepsilon > 0$, also $q_{n+1} = o(q_n^{a+1})$. Dann ist nach dem Hauptsatz 1 (man beachte $q_w \leqq x < q_{w+1}$, also $q_w > q_{w+1}^{\frac{1}{1+a}} > x^{\frac{1}{1+a}}$ für $x > c_3$)

$$\begin{aligned}
P_Q(x) &= O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{r}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w}\right) \\
&= O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \frac{q_{v+1}}{x} \cdot \frac{1}{q_v} + x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{a+1}+\varepsilon}\right) \\
&= O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} q_{v+1}^{1-\frac{1}{a+1}} + x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{a+1}+\varepsilon}\right) \\
&= O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} q_w^{1-\frac{1}{a+1}} + x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{a+1}+\varepsilon}\right) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{a+1}+\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $a > \nu$, $\varepsilon > 0$; also ist (10) bewiesen. Aus (10) folgt aber auch $f_1(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}$.

Wir beweisen jetzt

$$f_1(Q) \geqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}. \tag{11}$$

Für $\nu = 0$ ist nichts zu beweisen, da nach Satz 2, Behauptung 1, $f_1(Q) \geqq \frac{r}{2} - 2$ gilt. Es sei also $0 < \nu \leqq \infty$, $0 < a < \nu$. Dann gibt es unendlich viele solche w, so daß $q_{w+1} > q_w^{1+a}$. Für jedes solche w setzen wir $x_w = q_w^{1+a}$ (man beachte $q_w \leqq x_w < q_{w+1}$); dann ist nach dem Hauptsatz 3 für hinreichend große solche w

$$R_Q(x_w) > c_2 \frac{x_w^{\frac{r}{2}-1}}{q_w} = c_2 x_w^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{a+1}};$$

also ist $f_1(Q) \geqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{a+1}$ für jedes a mit $0 < a < \nu$; daraus folgt aber (11) und aus (11) folgt offenbar $f(Q) \geqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}$, womit die Sätze 6. 8 bewiesen sind.

Beweis der Behauptungen 3, 4 des Satzes 2. Bekanntlich ist $\nu(\alpha) = 0$ für fast alle $\alpha > 0$; daher bilden offenbar auch diejenigen Wertepaare $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, für welche $\nu\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) > 0$ ist, eine Menge vom (zweidimensionalen) Maß Null. Also ist nach Satz 6 für fast alle $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ und für jedes $\varepsilon > 0$

$$R_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right), \quad \text{also auch} \quad R_Q(x) = \underline{O}\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right),$$

w. z. b. w.

Wir sollen also noch (da der Satz 5 aus den Sätzen 1, 6, 7 folgt) die Sätze 4, 7, 9, 10 beweisen.

Beweis der Behauptung 1 des Satzes 4. Die Voraussetzungen des Satzes 4 seien erfüllt, es sei $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ irrational, $\varepsilon > 0$. Jedem ganzen $t > c_4$ ordnen wir die Zahl $x_t = q_t^{\frac{z}{z-2}}$ zu. Aus dem Hauptsatz 2 folgt bei ganzzahlig wachsendem t

$$R_Q(x_t) = O\left(x_t^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\left(\sum_{0 \leqq v < w}\left(\frac{q_{v+1}}{x_t}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{1}{q_w}\right)\right),$$

wo w durch $q_w \leqq x_t < q_{w+1}$ definiert ist; wegen $q_t = x_t^{1-\frac{2}{z}} < x_t$ ist also $w \geqq t$. Also ist

$$\sum_{0 \leqq v < w}\left(\frac{q_{v+1}}{x_t}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{1}{q_w} \leqq \frac{1}{x_t^{\frac{z}{2}-1}} \sum_{0 \leqq v < t} q_{v+1}^{\frac{z}{2}-1} + \sum_{t \leqq v < w} \frac{1}{q_v} + \frac{1}{q_w}$$

$$= O\left(\frac{q_t^{\frac{z}{2}-1}}{x_t^{\frac{z}{2}-1}} + \frac{1}{q_t}\right) = O\left(x_t^{-1+\frac{2}{z}}\right),$$

w. z. b. w.

Beweis der Behauptung 2 des Satzes 4. Wir setzen $\alpha_1 = 1$ und wählen (ähnlich wie im Beweis der Behauptung 2 des Satzes 3) α_2 so, daß $q_{n+1} > e^{q_n}$ für alle $n \geqq 0$. Dann ist nach dem Hauptsatz 3 für $x > c_5$

$$R_Q(x) > c_2\left(\frac{1}{x}\frac{q_w^{\frac{r}{2}}}{q_{w-1}} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q_w}\right).$$

Für $q_w \leqq x \leqq q_w^{\frac{r+2}{r}}$ ist also

$$R_Q(x) > c_6 \frac{x^{\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{r+2}}}{x \cdot \log x} = c_6 x^{\frac{r}{2}-1-\frac{r}{r+2}} \cdot \frac{1}{\log x};$$

für $q_w^{\frac{r+2}{r}} < x < q_{w+1}$ ist

$$R_Q(x) > c_2 \frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{x^{\frac{r}{r+2}}} > c_3 x^{\frac{r}{2}-1-\frac{r}{r+2}} \cdot \frac{1}{\log x},$$

w. z. b. w.[9])

Beweis des Satzes 7. Für $\nu = \infty$ ist nichts zu beweisen, denn nach Satz 4 gilt $f_2(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{z-2}{z}$. Es sei also $\nu < \infty$, $a > \nu$, $\varepsilon > 0$; dann ist $q_{n+1} = O(q_n^{1+a})$ bei wachsendem n. Jedem ganzen $t > c_7$ ordnen wir die Zahl $x_t = q_t^{\frac{z-\frac{2}{a+1}}{z-2}}$; dann ist nach dem Hauptsatz 2 für ganzzahlig wachsendes t

$$R_Q(x_t) = O\left(x_t^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\left(\sum_{0 \leqq v < w}\left(\frac{q_{v+1}}{x_t}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{1}{q_w}\right)\right).$$

Dabei ist $q_w \leqq x_t < q_{w+1}$, $x_t > q_t$, also $w \geqq t$. Also ist

$$\sum_{0 \leqq v < w}\left(\frac{q_{v+1}}{x_t}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{1}{q_w} = O\left(\frac{1}{x_t^{\frac{z}{2}-1}} \sum_{0 \leqq v < t} \frac{q_{v+1}^{\frac{z}{2}-1}}{q_{v+1}^{\frac{1}{a+1}}} + \sum_{t \leqq v < w} \frac{1}{q_v} + \frac{1}{q_w}\right)$$

$$= O\left(q_t^{\frac{z}{2}-1-\frac{1}{a+1}} \cdot x_t^{-\frac{z}{2}+1} + \frac{1}{q_t}\right) = O\left(x_t^{-\frac{z-2}{z-\frac{2}{a+1}}}\right).$$

Für jedes $a > \nu$ und jedes $\varepsilon > 0$ ist also

$$f_2(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 + \varepsilon - \frac{z-2}{z-\frac{2}{a+1}};$$

also ist

$$f_2(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1 - \frac{z-2}{z-\frac{2}{\nu+1}}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Beweis der Sätze 9, 10. Die Behauptungen 3, 4 des Satzes 9 brauche ich nicht zu beweisen; denn in Gp I, Satz 2 (Spezialfall $\sigma = 3$) habe ich bewiesen, daß für fast alle $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ sogar

$$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon}\right)$$

ist; die Behauptung 1 des Satzes 9 folgt aus der Behauptung 2 des Satzes 9,

[9]) Offenbar läßt sich die Behauptung noch verschärfen, wenn man die q_n noch schneller wachsen läßt.

so daß es genügt, die Behauptung 2 des Satzes 9 und den Satz 10 zu beweisen. Es liege also eine Form (8) mit $r_i \geqq 4$, $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $r = r_1 + r_2 + r_3$ vor. Nach dem Dirichletschen Fächerprinzip lassen sich jedem $x > 0$ drei ganze Zahlen $q = q(x) > 0$, $p = p(x)$, $t = t(x)$ zuordnen, so daß

$$\left| q\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - p \right| < \frac{1}{x}, \quad \left| q\frac{\alpha_3}{\alpha_1} - t \right| < \frac{1}{x}, \quad q \leqq ([x]+1)^2;$$

$q(x)$ wähle ich dabei möglichst klein, $p(x)$ und $t(x)$ nach einer beliebigen Vorschrift. Dann setze ich

$$Q_x(u) = \frac{\alpha_1}{q}(q(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + p(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_{r_1+r_2}^2) + t(u_{r_1+r_2+1}^2 + \ldots + u_r^2));$$

offenbar ist

$$|Q(u) - Q_x(u)| \leqq c_8 \frac{Q(u)}{qx}. \tag{12}$$

In der Folge sei stets $x > c_9$. Wenn $0 < l$, $l + 1 < \frac{qx}{3c_8}$, l ganz, so gilt folgendes: Wenn

$$\alpha_1 \frac{l+\frac{1}{3}}{q} \leqq Q(u) \leqq \alpha_1 \frac{l+\frac{2}{3}}{q}, \tag{13}$$

so ist nach (12)

$$\alpha_1 \frac{l}{q} < Q_x(u) < \alpha_1 \frac{l+1}{q}.$$

Für ganze u_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ ist $Q_x(u)$ gleich einem ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\alpha_1}{q}$; im Bereich (13) liegen also keine Gitterpunkte. Also ist $A_Q(y)$ konstant im Intervall

$$\alpha_1 \frac{l+\frac{1}{3}}{q} \leqq y \leqq \alpha_1 \frac{l+\frac{2}{3}}{q}; \tag{14}$$

für diese y ist daher nach (1), (2)

$$\frac{dP_Q(y)}{dy} = -\frac{dV_Q(y)}{dy} = -c_{10} y^{\frac{r}{2}-1} < -c_{11}\left(\frac{l}{q}\right)^{\frac{r}{2}-1}.$$

Diejenigen y des Intervalls (14), für welche

$$|P_Q(y)| < \frac{c_{11}\alpha_1}{12q}\left(\frac{l}{q}\right)^{\frac{r}{2}-1}$$

ist, füllen daher höchstens ein Intervall aus, dessen Länge höchstens $\frac{\alpha_1}{6q}$ ist. Also ist

$$\int_{\frac{\alpha_1 l}{q}}^{\frac{\alpha_1(l+1)}{q}} |P_Q(y)|\, dy > \frac{c_{11}\alpha_1^2}{72q^2}\left(\frac{l}{q}\right)^{\frac{r}{2}-1}.$$

Daraus folgt aber für $x > c_{12}$

$$R_Q(x) = \frac{1}{x}\int_0^x |P_Q(y)|\,dy > \frac{1}{x}\,c_{13}\frac{1}{q^{\frac{r}{2}+1}}\sum l^{\frac{r}{2}-1},$$

wo rechts über die ganzen l mit $0 < l$, $l+1 < \frac{qx}{3c_8}$, $l+1 < \frac{qx}{\alpha_1}$ summiert wird. Das ergibt für $x > c_{14}$

$$R_Q(x) > c_{15}\frac{x^{\frac{r}{2}-1}}{q}. \tag{15}$$

Daraus folgt: Da $q = q(x) = O(x^2)$, so ist

$$R_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-3}\right),$$

womit die Behauptung 2 des Satzes 9 bewiesen ist.

Andererseits: Nach einem Satze des Herrn Khintchine[10]) kann man die Zahlen $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$ so wählen, daß

1. keine Relation

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0\,(k_1, k_2, k_3 \text{ ganz}, k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 > 0)$$

gilt,

2. für jedes $x > c_{16}$ die Ungleichung

$$q = q(x) < x\log x$$

gilt.

Für die entsprechende Form $Q(u)$ ist also nach (15)

$$R_Q(x) = \Omega\left(\frac{x^{\frac{r}{2}-2}}{\log x}\right),$$

womit offenbar der Satz 10 bewiesen ist.

---

[10]) Der betreffende Satz lautet (A. Khintchine, Über eine Klasse linearer diophantischen Approximationen, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **50** (1926), S. 170–195, Satz II): Es sei $\psi(t)$ eine stetige, positive, beständig zunehmende Funktion des positiven Argumentes t, und $\psi(t) \to +\infty$ für $t \to +\infty$. Dann lassen sich zwei linear unabhängige reelle Zahlen θ_1, θ_2 finden von folgender Beschaffenheit: Für jedes genügend große $t > 0$ können ganze Zahlen $q > 0$, p, r derart gewählt werden, daß

$$|q\theta_1 - p| < \frac{1}{t}, \quad |q\theta_2 - r| < \frac{1}{t}, \quad q < t\psi(t)$$

ist. Dabei bedeutet die Aussage „θ_1, θ_2 sind linear unabhängig", daß es keine Relation $a\theta_1 + b\theta_2 + c = 0$ gibt mit ganzen, nicht sämtlich verschwindenden a, b, c. Die Zahlen θ_1, θ_2 können ohne Beschränkung der Allgemeinheit positiv vorausgesetzt werden, da sie ohne Veränderung von q um eine ganze Zahl vergrößert werden können.

Der Satz II, welcher die simultanen Approximationen *zweier* Zahlen betrifft, hat kein Analogon in der Theorie der diophantischen Approximationen *einer* Zahl, wie Herr Khintchine daselbst (Satz I) gezeigt hat. Dieser Unterschied spiegelt sich in unserer Abhandlung in dem Gegenteil zwischen dem Satz 4a und dem Satz 10 wieder.

§ 3.

Beweis der Hauptsätze 1, 2.

Wir wollen zunächst zeigen, daß der Hauptsatz 1 aus folgendem Hilfssatz folgt:

Hilfssatz 1. *Dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie im Hauptsatz* 1. *Dazu sei noch γ durch*

$$\varrho_\gamma \leqq x < \varrho_{\gamma+1}$$

definiert[11]).

Behauptung. *Für wachsendes x ist*

$$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right.$$

$$\left. + x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq \mu < \gamma} \left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{\varrho_\mu} + \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{\varrho_\gamma}\right).$$

Es seien die Voraussetzungen des Hauptsatzes 1 erfüllt; wir setzen für einen Augenblick voraus, daß der Hilfssatz 1 bereits bewiesen ist. Nach der Bemerkung 3 ist entweder $\varrho_\mu = p_{\mu-1}$ für alle $\mu > 0$ oder $\varrho_\mu = p_{\mu+1}$ für alle $\mu \geqq 0$ (je nachdem $\alpha_1 < \alpha_2$ oder $\alpha_1 > \alpha_2$). Für $x > c_{17}$ ist $\gamma > 0$. Es ist erstens (da $z \geqq 4$)

$$x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \cdot \left(\frac{\varrho_1}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{\varrho_0} = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right). \tag{16}$$

Zweitens: Für $\mu > 0$ ist $c_{18} < \frac{\pi_\mu}{\varrho_\mu} < c_{19}$; also[12])

$$x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{\substack{0<\mu<\gamma \\ \varrho_{\mu+1} < \frac{x}{c_{19}}}} \left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \frac{1}{\varrho_\mu} = O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \frac{1}{q_v}\right). \tag{17}$$

Weiter

$$x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{\substack{0<\mu<\gamma \\ \varrho_{\mu+1} \geqq \frac{x}{c_{19}}}} \left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \frac{1}{\varrho_\mu} = O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon} \sum_{\frac{c_{18}}{c_{19}} x < q_{v+1} < c_{19} x} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \frac{1}{q_v}\right)$$

---

[11]) $p_n, q_n, \pi_n, \varrho_n$ wurden in der Bemerkung 3 (§ 1) eingeführt; diese Bemerkung werden wir jetzt reichlich ausnutzen.

[12]) Man beachte $c_{18}\varrho_\mu < \pi_\mu < c_{19}\varrho_\mu$; $\pi_\mu = q_v$, wo entweder stets $v = \mu + 1$ oder $v = \mu - 1$. Aus $\varrho_{\mu+1} < c_{19}^{-1} x$ folgt $q_{v+1} < x$, also $v < w$.

(denn aus $\mu < \gamma$ folgt $q_{v+1} = \pi_{\mu+1} < c_{19}\varrho_{\mu+1} \leqq c_{19}x$); die Summe rechts hat höchstens c_{20} Glieder (da $q_{n+2} \geqq 2q_n$). Wenn in einem solchen Summanden $q_{v+1} > x$, so ist $v \geqq w$ und dann ist

$$x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\frac{1}{q_v} \leqq c_{19}^{\frac{z}{2}-1}\, x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\cdot\frac{1}{q_w}.$$

Wenn aber in einem solchen Summanden $q_{v+1} \leqq x$ ist, so ist $v < w$ und das Glied $x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}(q_{v+1}x^{-1})^{\frac{z}{2}-1}q_v^{-1}$ tritt in der Summe

$$x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\cdot\sum_{0\leqq v<w}\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\frac{1}{q_v}$$

auf. Also ist

$$(18)\quad x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\sum_{\substack{0<\mu<\gamma\\ \varrho_{\mu+1}\geqq\frac{x}{c_{19}}}}\left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\frac{1}{\varrho_\mu} = O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\sum_{0\leqq v<w}\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\frac{1}{q_v}+\frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w}\right).$$

Endlich ist

$$\frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{\varrho_\gamma} < c_{21}\frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_v},$$

wo

$$q_v < c_{19}\varrho_\gamma \leqq c_{19}x, \qquad q_{v+1} > c_{18}\varrho_{\gamma+1} > c_{18}x.$$

Wenn $q_{v+1} > x$, so ist $v \geqq w$, also

$$(19)\qquad \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{\varrho_\gamma} < c_{21}\frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w};$$

wenn aber $q_{v+1} \leqq x$, so ist $v < w$, also

$$(20)\qquad \frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{\varrho_\gamma} < c_{21}\frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_v}\left(\frac{q_{v+1}}{c_{18}x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \qquad (\text{wo } v<w).$$

Es gilt also (16), (17), (18) und entweder (19) oder (20). Also ist

$$x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\sum_{0\leqq\mu<\gamma}\left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\cdot\frac{1}{\varrho_\mu}+\frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{\varrho_\gamma}$$
$$= O\left(x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}\sum_{0\leqq v<w}\left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1}\cdot\frac{1}{q_v}+\frac{x^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_w}+x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}\right);$$

aus dem Hilfssatz 1 folgt also in der Tat der Hauptsatz 1.

Wir zeigen nun weiter, daß der Hilfssatz 1 aus folgendem Hilfssatz folgt:

Hilfssatz 2. *Dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Hilfssatz* 1.

Behauptung.

$$\int_x^{x+\frac{1}{x}} A_Q(y)\,dy = \pm \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{0\leqq v<w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \frac{1}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_w} \right.$$

$$\left. + x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{0\leqq \mu<\gamma} \left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \frac{1}{\varrho_\mu} + \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{\varrho_\gamma} \right).$$

(Diese Formel soll gelten: erstens wenn auf beiden Seiten das Vorzeichen + zweitens wenn auf beiden Seiten das Vorzeichen — gewählt wird; und analog im folgenden.)

Zur Abkürzung setzen wir bis zum Ende dieses Paragraphen

$$F(x) = x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \left(\sum_{0\leqq v<w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + \frac{1}{q_w} + \sum_{0\leqq \mu<\gamma} \left(\frac{\varrho_{\mu+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \frac{1}{\varrho_\mu} + \frac{1}{\varrho_\gamma} + \frac{1}{x} \right).$$

Gesetzt, der Hilfssatz 2 sei wahr; dann ist, da $A_Q(x)$ eine nicht abnehmende Funktion ist,

$$A_Q(x) \leqq x \int_x^{x+\frac{1}{x}} A_Q(y)\,dy = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + O(x\,F(x)),$$

$$A_Q(x) \geqq x \int_{x-\frac{1}{x}}^{x} A_Q(y)\,dy = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} + O(x\,F(x));$$

das ist aber genau die Behauptung des Hilfssatzes 1. (Man beachte (1), (2) und $D = \alpha_1^{r_1}\cdot\alpha_2^{r_2}$.) Um also den Hauptsatz 1 zu beweisen, genügt es, den

Beweis des Hilfssatzes 2 zu erbringen. Es seien also die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt.

Wir setzen $\theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s}$ für $\Re(s) > 0$; es seien

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

diejenigen Zahlen, die sich in der Form

$$\lambda_n = \alpha_1 (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{r_1}^2) + \alpha_2 (u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \dots + u_r^2)$$

mit ganzen u_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ darstellen lassen; a_n sei die Anzahl derartiger Darstellungen der Zahl λ_n. Dann ist offenbar für $x > 0$, $\Re(s) > 0$

$$\theta^{r_1}(\alpha_1 s)\theta^{r_2}(\alpha_2 s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad A_Q(x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n,$$

also

$$\int_0^x A_Q(y)\,dy = \sum_{\lambda_n \leqq x} (x - \lambda_n) a_n.$$

Aus der bekannten Formel (bei geradlinigem Integrationsweg)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{Ts} \frac{ds}{s^2} = \mathrm{Max}(T, 0) \qquad (a > 0,\ T \text{ reell})$$

folgt also für $x > 0$, $a > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \cdot e^{xs} \cdot \frac{ds}{s^2} = \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n (x - \lambda_n) = \int_0^x A_Q(y)\,dy,$$

da der Integrand offenbar gliedweise integriert werden darf. Also ist für $x > 1$ [13])

$$\int_x^{x \pm \frac{1}{x}} A_Q(y)\,dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \theta^{r_1}(\alpha_1 s)\theta^{r_2}(\alpha_2 s)\, e^{xs}\left(e^{\pm\frac{s}{x}} - 1\right)\frac{ds}{s^2}. \tag{21}$$

Wir setzen dauernd $A = \mathrm{Max}\left(\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}\right)$ und schätzen zunächst das Integral

$$I_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}-i\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\frac{A}{\sqrt{x}}} \theta^{r_1}(\alpha_1 s)\theta^{r_2}(\alpha_2 s)\, e^{xs}\left(e^{\pm\frac{s}{x}} - 1\right)\frac{ds}{s^2}$$

ab; nach einer leichten, aber etwas umständlichen Rechnung [14]) findet man (man beachte $r \geqq 8$)

$$I_1(x) \mp \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} = O\left(x^{\frac{r}{4}-1}\right) + O\left(x^{\frac{r}{2}-3}\right) = O(F(x)),$$

---

[13]) Bis zum Ende des Beweises sei von nun an $x > c_{29}$.

[14]) Diese Rechnung ist in Gp II, S. 139, Zeile 2 v. u. bis S. 141, Zeile 7 v. u. für die allgemeinere Form $Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \ldots + \alpha_r u_r^2$ durchgeführt, wenn man dort speziell $z = \frac{1}{x}$ setzt.

also das gewünschte Hauptglied und ein O-Glied der gewünschten Größenordnung. Wenn wir noch beachten, daß der Integrand rechts in (21) für konjugiert komplexe Werte von s konjugiert komplexe Werte annimmt, sehen wir, daß es für den Beweis des Hilfssatzes 2 genügt, wenn wir die Formel

$$(22) \qquad \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} \theta^{r_1}(\alpha_1 s)\theta^{r_2}(\alpha_2 s)e^{xs}\left(e^{\pm\frac{s}{x}}-1\right)\frac{dt}{s^2} = O(F(x)) \qquad \left(s=\frac{1}{x}+it\right)$$

beweisen. Hier ist erstens

$$|e^{xs}| = e, \quad \left|\frac{1}{s}\right| < \frac{1}{t}, \quad \left|e^{\pm\frac{s}{x}}-1\right| < c_{23};$$

zweitens ist nach dem Mittelwertsatz

$$e^{\pm\frac{s}{x}}-1 = e^{\pm\frac{1}{x^2}}\left(\cos\frac{t}{x} \pm i\sin\frac{t}{x}\right)-1$$

$$= \left(1\pm\frac{1}{x^2}e^{\pm\frac{\delta_1}{x^2}}\right)\left(1-\frac{t}{x}\sin\delta_2\frac{t}{x} \pm i\frac{t}{x}\cos\delta_3\frac{t}{x}\right)-1$$

$$(0<\delta_i<1 \text{ für } i=1,2,3),$$

also

$$\left|e^{\pm\frac{s}{x}}-1\right| < c_{24}\frac{1}{x^2}+c_{25}\frac{t}{x} < c_{26}\frac{t}{x}.$$

Es genügt also, wenn wir statt (22) die Formel

$$(23) \qquad \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\infty} |\theta^{r_1}(\alpha_1 s)\theta^{r_2}(\alpha_2 s)| \operatorname{Min}\left(\frac{t}{x}, 1\right)\frac{dt}{t^2} = O(F(x))$$

beweisen (s soll bis zum Ende des Beweises $\frac{1}{x}+it$ bedeuten).

Beweis von (23). Wenn $x>1$, so nenne ich die Zahl $\frac{h}{k}$ eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt, wenn $h\geqq 0$, $0<k\leqq\sqrt{x}$, $(h,k)=1$. Wenn ich einen Bruch $\frac{h}{k}$ aufschreibe und ihn eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt nenne, verstehe ich darunter immer, daß der Bruch schon in seiner reduzierten Gestalt aufgeschrieben ist, d. h. daß $h\geqq 0$, $0<k\leqq\sqrt{x}$, $(h,k)=1$. Zwei Fareypunkte (und ebenso später zwei Medianten) nenne ich benachbart, wenn zwischen ihnen kein Fareypunkt (bzw. keine Mediante) liegt. Dabei bezeichne ich als Medianten alle Zahlen $\frac{h+h'}{k+k'}$, wo $\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$ zwei benachbarte Fareypunkte sind. Wenn $\frac{h}{k}$ ein Fareypunkt mit $h>0$ ist,

so sei $\mathfrak{B}_{h,k}$ dasjenige linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, welches den Punkt $\frac{h}{k}$ enthält und für Endpunkte zwei benachbarte Medianten hat. Wenn $I=\langle a, b)$ und $\delta>0$, so bedeute δI das Intervall $\langle \delta a, \delta b)$. Die kleinste Mediante ist $\frac{0+1}{1+[\sqrt{x}]}<\frac{1}{\sqrt{x}}$; wenn also bei festem j $(j=1,2)$ der Bruch $\frac{h}{k}$ alle Fareyzahlen mit $h>0$ durchläuft, so überdeckt die Vereinigungsmenge der Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ sicher das ganze Intervall $\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{B}_{h,k}=\left\langle \frac{h}{k}-\frac{\theta'}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k}+\frac{\theta''}{k\sqrt{x}}\right), \tag{24}$$

wo $\frac{1}{2}\leqq\theta'\leqq 1$, $\frac{1}{2}\leqq\theta''\leqq 1$.

Zu jedem Punkt t des Intervalls $t>\frac{A}{\sqrt{x}}$, der mit keinem Punkt

$$\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k} \qquad (h>0,\ 0<k\leqq\sqrt{x},\ (h,k)=1,\ j=1,2) \tag{25}$$

zusammenfällt, gibt es also erstens genau zwei Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1,k_1}$, $\frac{2\pi}{\alpha_2}\mathfrak{B}_{h_2,k_2}$, in deren Durchschnitt der Punkt t liegt und zweitens genau zwei ganze Zahlen n_1, n_2, so daß

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi}{\alpha_1 2^{n_1+1}k_1\sqrt{x}}<\left|t-\dfrac{2\pi}{\alpha_1}\dfrac{h_1}{k_1}\right|\leqq\dfrac{2\pi}{\alpha_1 2^{n_1}k_1\sqrt{x}}, \\ \dfrac{2\pi}{\alpha_2 2^{n_2+1}k_2\sqrt{x}}<\left|t-\dfrac{2\pi}{\alpha_2}\dfrac{h_2}{k_2}\right|\leqq\dfrac{2\pi}{\alpha_2 2^{n_2}k_2\sqrt{x}}; \end{cases} \tag{26}$$

nach (24) ist $n_1\geqq 0$, $n_2\geqq 0$. Umgekehrt: Wenn sechs ganze Zahlen $h_1, k_1, h_2, k_2, n_1, n_2$ mit

$$h_1>0,\quad h_2>0,\quad 0<k_1\leqq\sqrt{x},\quad 0<k_2\leqq\sqrt{x},\quad (h_1,k_1)=1, \tag{27}$$
$$(h_2,k_2)=1,\quad n_1\geqq 0,\quad n_2\geqq 0$$

gegeben sind, so bedeute

$$S(h;k;n)=S(h_1,h_2;k_1,k_2;n_1,n_2)$$

die Menge derjenigen t, welche im Durchschnitt der Intervalle

$$\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty\right),\quad \frac{2\pi}{\alpha_1}\mathfrak{B}_{h_1,k_1},\quad \frac{2\pi}{\alpha_2}\mathfrak{B}_{h_2,k_2}$$

liegen und die Ungleichungen (26) erfüllen. Offenbar überdeckt die Vereinigungsmenge aller Mengen $S(h;k;n)$ [15]) schlicht genau das Intervall

[15]) Von welchen freilich einige leer sein können.

$\left(\frac{A}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$ mit Ausnahme der abzählbar vielen Punkte (25). Die zu beweisende Beziehung (23) ist also mit der Beziehung

$$(28) \qquad \sum_{\substack{h_1, k_1 \\ h_2, k_2 \\ n_1, n_2}} \int_{S(h;k;n)} |\theta^{r_1}(\alpha_1 s)\theta^{r_2}(\alpha_2 s)| \operatorname{Min}\left(\frac{t}{x}, 1\right)\frac{dt}{t^2} = O(F(x))$$

äquivalent; der Summationsbereich ist dabei durch (27) gegeben.

Da sich die Formel (23) nicht ändert, wenn wir in ihr α_1, r_1 mit α_2, r_2 vertauschen, dürfen und wollen wir uns auf der linken Seite von (28) auf diejenigen $S(h; k; n)$ beschränken, für welche gilt

$$(29) \qquad 2^{n_1} k_1 \geqq 2^{n_2} k_2.$$

Es sei nun $l; m_1, m_2; n_1, n_2$ ein System von nichtnegativen ganzen Zahlen; wir wollen sagen, daß die Menge $S(h; k; n) = S(h_1, h_2; k_1, k_2; n_1, n_2)$ zur Klasse $[l; m; n] = [l; m_1, m_2; n_1, n_2]$ gehört, wenn

$$(30) \qquad 2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}, \quad 2^{m_1} \leqq k_1 < 2^{m_1+1}, \quad 2^{m_2} \leqq k_2 < 2^{m_2+1}.$$

Jede Menge $S(h; k; n)$ gehört also genau einer Klasse $[l; m; n]$ an, wobei wir wegen (27), (29) noch die Einschränkung

$$(31) \qquad 2^{m_1} \leqq \sqrt{x}, \quad 2^{m_2} \leqq \sqrt{x}, \quad 2^{m_2+n_2} \leqq 2^{m_1+n_1}$$

machen dürfen.

Endlich vereinigen wir die Klassen in drei Oberklassen $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ folgendermaßen: die Klasse $[l; m; n]$ gehöre zur Oberklasse $\{0\}$ bzw. $\{1\}$ bzw. $\{2\}$, je nachdem

$$(32) \qquad 2^{m_2+n_2} \leqq 2^{m_1+n_1} < \sqrt{x}$$

bzw.

$$(33) \qquad 2^{m_2+n_2} < \sqrt{x} \leqq 2^{m_1+n_1}$$

bzw.

$$(34) \qquad \sqrt{x} \leqq 2^{m_2+n_2} \leqq 2^{m_1+n_1}$$

ist.

Es sei nun t ein Punkt der Menge $S(h; k; n)$, die zur Klasse $[l; m; n]$ gehört; dann ist erstens nach (26)

$$\left| t - \frac{2\pi}{\alpha_1}\frac{h_1}{k_1} \right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_1 k_1 \sqrt{x}},$$

also (da $h_1 > 0$)

$$c_{27}\frac{h_1}{k_1} < t < c_{28}\frac{h_1}{k_1},$$

also

$$(35) \qquad c_{29}\, 2^{l-m_1} < t < c_{30}\, 2^{l-m_1}.$$

Zweitens ist $s = \frac{1}{x} + ti$, t in $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h_j,k_j}$, also [16])

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c_{31}}{\sqrt{k_j}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}+\left(t-\frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h_j}{k_j}\right)^2}} \quad \text{für } j = 1, 2.$$

Daraus folgt nach (26), (30) für $j = 1, 2$

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c_{32}}{2^{\frac{m_j}{2}}} \operatorname{Min}\left(x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{m_j}{2}+\frac{n_j}{2}}\right). \tag{36}$$

Nach (26) ist das Maß von $S(h; k; n)$ kleiner als

$$\frac{c_{33}}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}}.$$

Diesen Umstand und die Ungleichungen (35), (36) benutzen wir zur Abschätzung der Integrale in (28). Wir bezeichnen noch mit $N(l; m; n)$ die Anzahl der nichtleeren Mengen $S(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ und bekommen sofort folgendes Resultat: um (28) zu beweisen, genügt es, die Formeln

$$\sum_{\{0\}} x^{\frac{r}{4}-\frac{1}{2}} \frac{2^{n_1\frac{r_1}{2}+n_2\frac{r_2}{2}}}{2^{n_1+l}} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \cdot N(l; m; n) = O(F(x)), \tag{37}$$

$$\sum_{\{1\}} x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{1}{2}} \frac{2^{n_2\frac{r_2}{2}}}{2^{n_1+l+m_1\frac{r_1}{2}}} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-}, \frac{1}{x}\right) \cdot N(l; m; n) = O(F(x)), \tag{38}$$

$$\sum_{\{2\}} x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n_1+l+m_1\frac{r_1}{2}+m_2\frac{r_2}{2}}} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \cdot N(l; m; n) = O(F(x)) \tag{39}$$

zu beweisen. Dabei bedeutet $\sum_{\{\tau\}}$ für $\tau = 0, 1, 2$, daß über alle Klassen der Oberklasse $\{\tau\}$ summiert werden soll.

Unsere nächste Aufgabe besteht also darin, für $N(l; m; n)$ eine geeignete obere Schranke zu finden. Zu diesem Zweck beweisen wir folgenden Hilfssatz, der im wesentlichen von Herrn Behnke [17]) herrührt:

Hilfssatz 3. *Für reelles β sei $\psi(\beta) = \beta - [\beta]$. Es sei $L > 0$, $M > 0$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ seien die im Hauptsatz 1 auftretenden Zahlen.*

---

[16]) Vgl. z. B. Gp I, S. 708, Formel (13).

[17]) Zur Theorie der diophantischen Approximationen, Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität 3 (1924), S. 261–318; vgl. insbes. die Sätze IV und V; einen verwandten Hilfssatz habe ich auch in Gp III (Hilfssatz 1) angewendet.

Die Anzahl der ganzen Zahlen ζ mit $\psi\left(\zeta\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)<L$, $\frac{M}{4}\leqq\zeta<M$ werde mit $A(L, M)$ bezeichnet.

Behauptung. 1. *Wenn es ein ganzes $t\geqq 0$ gibt, so daß*

$$q_t<\frac{1}{8L},\quad q_t q_{t+1}>\frac{M}{8L},\quad q_t<M,$$

so ist

$$A(L, M)\leqq\frac{M}{q_t}+8LM.$$

2. *Sonst ist*

$$A(L, M)\leqq 8LM.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $L<\frac{1}{8}$ (sonst wäre nämlich $A(L, M)<M\leqq 8LM$). Wir setzen zur Abkürzung $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\alpha$ und bezeichnen mit $z_1<z_2<z_3<\ldots<z_\nu$ diejenigen ganzen Zahlen ζ, für welche

$$0<\zeta<M,\quad \psi(\zeta\alpha)<L$$

gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\nu>0$ (denn sonst wäre $A(L, M)=0\leqq 8LM$). Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall. Es gibt ein ganzes j mit $1\leqq j<\nu$ so, daß $\psi(z_j\alpha)>\psi(z_{j+1}\alpha)$. Wir setzen $z_j=f$, $z_{j+1}=g$, so daß also

$$0<f<g<M,\quad \psi(g\alpha)<\psi(f\alpha)<L.$$

Dann ist $0<g-f<M$, $\psi((g-f)\alpha)>1-L$. Wir konstruieren eine Folge von ganzen positiven Zahlen $v_1, v_2, v_3, \ldots$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $0<v_{i+1}-v_i<M$ $(i=1, 2, \ldots)$, $0<v_1<M$.

2. Für jedes i $(i=1, 2, 3, \ldots)$ gilt eine von den Ungleichungen $\psi(v_i\alpha)<L$, $\psi(v_i\alpha)>1-L$.

Das geschieht folgendermaßen: wir setzen $v_1=z_1$; wenn ein v_i $(i\geqq 1)$ bereits konstruiert ist, so konstruieren wir v_{i+1} folgendermaßen: Wenn $\psi(v_i\alpha)<L$, so sei $v_{i+1}=v_i+(g-f)$; wenn aber $\psi(v_i\alpha)>1-L$, so sei $v_{i+1}=v_i+z_1$. Diese Folge hat offenbar die verlangten Eigenschaften.

Aus $v_1, v_2, v_3, \ldots$ greifen wir nun eine Teilfolge $w_1, w_2, w_3, \ldots$ heraus, so daß $2nM<w_n<(2n+1)M$ für $n=1, 2, \ldots$ (das geht wegen $0<v_{i+1}-v_i<M$, $0<v_1<M$). Endlich konstruieren wir die Folge

$$(40)\quad \begin{cases} w_1+z_1,\ w_1+z_2, \ldots, w_1+z_\nu,\quad w_2+z_1,\ w_2+z_2, \ldots, w_2+z_\nu, \\ \qquad w_3+z_1,\ w_3+z_2, \ldots, w_3+z_\nu,\ w_4+z_1, \ldots; \end{cases}$$

für jedes Glied dieser Folge ist offenbar entweder $\psi((w_n+z_i)\alpha)<2L$ oder $\psi((w_n+z_i)\alpha)>1-L$. Weiter ist offenbar (40) eine wachsende Folge.

Für $X > 0$ sei $B(X)$ die Anzahl derjenigen Glieder der Folge (40), die kleiner als X sind; offenbar ist

$$B(X) = \frac{\nu}{2M} X + o(X) \tag{41}$$

(für wachsendes X). Weiter sei $C(X)$ (für $X > 0$) die Anzahl derjenigen ganzen positiven Zahlen $\zeta < X$, welche mindestens eine (also genau eine) von den Ungleichungen $\psi(\zeta\alpha) < 2L$, $\psi(\zeta\alpha) > 1 - L$ erfüllen. Offenbar ist

$$B(X) \leqq C(X) \tag{42}$$

und da α irrational ist, so ist nach einem Satz vom Herrn Weyl[18])

$$C(X) = 3LX + o(X). \tag{43}$$

Aus (41), (42), (43) folgt aber

$$A(L, M) \leqq \nu \leqq 6LM \leqq 8LM.$$

2. Fall. Der erste Fall tritt nicht ein; also ist entweder $\nu = 1$ oder

$$\psi(z_1\alpha) < \psi(z_2\alpha) < \ldots < \psi(z_\nu\alpha). \tag{44}$$

Ich behaupte: Alle z_i $(1 \leqq i \leqq \nu)$ sind ganzzahlige Vielfache von z_1 (für $\nu = 1$ besagt diese Behauptung nichts). Denn es sei schon bewiesen, daß $z_\varrho = g_\varrho z_1$ (g_ϱ ganz) für $\varrho = 1, 2, \ldots, \sigma$, wo σ eine ganze Zahl ist, $1 \leqq \sigma < \nu$. Dann ist nach (44)

$$\psi((z_{\sigma+1} - z_\sigma)\alpha) = \psi(z_{\sigma+1}\alpha) - \psi(z_\sigma\alpha) < \psi(z_{\sigma+1}\alpha) < L,$$

$0 < z_{\sigma+1} - z_\sigma < M$, also $z_{\sigma+1} - z_\sigma = z_\tau$ für ein τ mit $1 \leqq \tau \leqq \sigma$, also $z_{\sigma+1} = z_\sigma + z_\tau = (g_\sigma + g_\tau) z_1$, w. z. b. w.

Weiter behaupten wir:

$$\psi(z_\nu\alpha) = \frac{z_\nu}{z_1}\psi(z_1\alpha).$$

Denn sonst wäre $\frac{z_\nu}{z_1}\psi(z_1\alpha) > 1$, also würde es unter den Zahlen

$$\psi(z_1\alpha), \quad 2\psi(z_1\alpha), \quad 3\psi(z_1\alpha), \ldots, \frac{z_\nu}{z_1}\psi(z_1\alpha)$$

eine *erste*, sagen wir $\eta\psi(z_1\alpha)$, geben, die größer als 1 wäre. Es wäre also $\eta > 1$, $\eta z_1 \leqq z_\nu$, $1 < \eta\psi(z_1\alpha) < 1 + \psi(z_1\alpha)$, also $\psi(\eta z_1\alpha) < \psi(z_1\alpha)$, was wegen $0 < \eta z_1 \leqq z_\nu < M$ mit (44) im Widerspruch steht. Für $1 \leqq i \leqq \nu$ ist also $i\psi(z_1\alpha) \leqq \nu\psi(z_1\alpha) \leqq \frac{z_\nu}{z_1}\psi(z_1\alpha) = \psi(z_\nu\alpha) < L$, also $\psi(iz_1\alpha) = i\psi(z_1\alpha) < L$, also $z_i = iz_1$. Also ist $\nu\psi(z_1\alpha) = \psi(z_\nu\alpha) < L$, $\nu < \frac{L}{\psi(z_1\alpha)}$. Wenn $\psi(z_1\alpha) \geqq \frac{1}{8M}$, so ist also $A(L, M) \leqq \nu < 8LM$; wenn

[18]) Vgl. z. B. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Annalen 77 (1916), S. 313—352.

aber $\psi(z_1\alpha) < \frac{1}{8M}$, so ist bei passendem ganzen u_1

$$0 < z_1\alpha - u_1 < L, \quad 0 < z_1\alpha - u_1 < \frac{1}{8M},$$

also

$$\left|\alpha - \frac{u_1}{z_1}\right| < \frac{1}{8Mz_1} < \frac{1}{8z_1^2},$$

also $u_1 = lp_t$, $z_1 = lq_t$ (l ganz positiv) für irgend ein ganzes $t \geqq 0$. Weiter ist

$$0 < q_t\alpha - p_t = \frac{1}{l}\ (z_1\alpha - u_1) \leqq z_1\alpha - u_1 < L,$$

also $\psi(q_t\alpha) < L$, also $q_t = z_1$ (wegen $q_t \leqq z_1$); also ist $q_t < M$. Da die z_ν Vielfache von q_t sind, $z_\nu < M$, so ist sicher $A(L, M) \leqq \nu \leqq \frac{M}{q_t}$. Wenn $q_t \geqq \frac{1}{8L}$, so ist also wieder $A(L, M) \leqq 8LM$. Wenn endlich $q_t q_{t+1} \leqq \frac{M}{8L}$, so ist

$$L > \psi(z_\nu\alpha) = \nu\psi(q_t\alpha) > \nu q_t \cdot \frac{1}{2q_t q_{t+1}}$$

oder

$$L > \psi(z_\nu\alpha) > \frac{z_\nu}{2q_t q_{t+1}},$$

also

$$z_\nu < 2q_t q_{t+1} L \leqq \frac{M}{4},$$

also $A(L, M) = 0 \leqq 8LM$.

Wir haben also in der Tat in allen Fällen die Ungleichung $A \leqq 8LM$, ausgenommen, wenn für irgend ein ganzes $t \geqq 0$

$$q_t < M, \quad q_t < \frac{1}{8L}, \quad q_t q_{t+1} > \frac{M}{8L}$$

ist; in diesem Ausnahmefall ist entweder $A(L, M) \leqq 8LM$ oder $A(L, M) \leqq \frac{M}{q_t}$, je nachdem der Fall 1 oder der Fall 2 eintritt. Damit ist aber der Hilfssatz 3 bewiesen.

Hilfssatz 4. *Es sei* $L > 0$, $M > 0$; $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ *seien die im Hauptsatz* 1 *auftretenden Zahlen. Die Anzahl der ganzen Zahlen* ζ *mit* $\psi\left(\zeta\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) > 1 - L$, $\frac{M}{4} \leqq \zeta < M$ *werde mit* $A'(L, M)$ *bezeichnet.*

Behauptung. 1. *Wenn es ein ganzes* $t \geqq 0$ *gibt, so daß*

$$q_t < \frac{1}{8L}, \quad q_t q_{t+1} > \frac{M}{8L}, \quad q_t < M,$$

so ist

$$A'(L, M) \leqq \frac{M}{q_t} + 8LM.$$

2. *Sonst ist*

$$A'(L, M) \leqq 8LM.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $L < \frac{1}{8}$ (da sonst $A'(L, M) < M \leqq 8LM$) und $M > 1$ (da sonst $A'(L, M) = 0 \leqq 8LM$). Es sei

$$\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \ldots \qquad \begin{pmatrix} b_i \text{ ganz } (i \geqq 0); \\ b_0 \geqq 0,\ b_j > 0\ (j \geqq 1) \end{pmatrix};$$

dann ist

$$b_0 + 1 - \alpha = \frac{1}{1} + \frac{1}{b_1 - 1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \ldots \quad \text{bzw.} \quad b_0 + 1 - \alpha = \frac{1}{b_2 + 1} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_4} + \ldots,$$

je nachdem $b_1 > 1$ oder $b_1 = 1$ ist[19]). Die Folge der Näherungsnenner $q_0', q_1', q_2', \ldots$ von $b_0 + 1 - \alpha$ ist also, wie der Leser sofort nachrechnet, für $b_1 > 1$ mit der Folge

$$q_0, q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \cdots$$

und für $b_1 = 1$ mit der Folge

$$q_1, q_2, q_3, q_4, \cdots$$

identisch. Jedes (geordnete) Paar q_v', q_{v+1}' ist also mit einem Paar q_t, q_{t+1} identisch, mit Ausnahme des Paares q_0', q_1' im Falle $b_1 > 1$ (wo $q_0' = 1$, $q_1' = q_0 = 1$). Da $\psi(\zeta(b_0 + 1 - \alpha)) = 1 - \psi(\zeta\alpha)$, so gilt nach dem Hilfssatz 3: Es ist $A'(L, M) \leqq 8LM$, außer wenn es ein Paar q_v', q_{v+1}' gibt, so daß

$$q_v' < \frac{1}{8L}, \quad q_v' q_{v+1}' > \frac{M}{8L}, \quad q_v' < M; \tag{44}$$

in diesem Fall ist $A'(L, M) \leqq \frac{M}{q_v'} + 8LM$. Wenn aber (44) gilt, so ist $q_v' q_{v+1}' > 1$, also ist nicht $q_v' = q_{v+1}' = 1$, also ist das Paar q_v', q_{v+1}' mit einem Paar q_t, q_{t+1} identisch, womit der Hilfssatz 4 bewiesen ist.

Wir wollen nun für $N(l; m; n)$ (wo die nichtnegativen ganzen Zahlen l, m_1, m_2, n_1, n_2 die Beziehungen (31) erfüllen) folgende Abschätzung beweisen[20]):

Behauptung I. *Wenn es ein ganzes $v \geqq 0$ gibt, so daß*

$$q_v < c_{34} 2^{n_2 - m_1} \sqrt{x}, \quad q_v q_{v+1} > c_{35} 2^{l + m_2 + n_2 - m_1} \sqrt{x}, \quad q_v < c_{36} 2^{l + m_2}. \tag{45}$$

so ist

$$N(l; m; n) < c_{37} \frac{2^{(l+m_2)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}}{q_v} + c_{37} 2^{m_1 + (m_2 + l)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right) - n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

---

[19]) O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (Leipzig und Berlin 1913), S. 65, Beispiel.

[20]) Alles freilich für $x > c_{33}$.

Behauptung II. *Sonst ist*

$$N(l; m; n) < c_{37}\, 2^{m_1+(m_2+l)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)-n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Beweis. Wenn eine Menge $S(h; k; n)$ der Klasse $[l; m; n]$ nicht leer sein soll, so muß es mindestens ein reelles t geben, welches (26) erfüllt; also muß (wegen (30) und $2^{m_2+n_2} \leqq 2^{m_1+n_1}$)

$$\left| \frac{h_1}{k_1} \frac{2\pi}{\alpha_1} - \frac{h_2}{k_2} \frac{2\pi}{\alpha_2} \right| < \frac{c_{99}}{2^{n_2} k_2 \sqrt{x}}$$

sein; also muß sein

$$(46) \qquad \left| h_1 k_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - h_2 k_1 \right| < \frac{c_{38}\, 2^{m_1+1}}{2^{n_2}\sqrt{x}}, \quad 2^{l+m_2} \leqq h_1 k_2 < 2^{l+m_2+2}.$$

Nach den Hilfssätzen 3, 4 (mit

$$L = \frac{c_{38}\, 2^{m_1+1}}{2^{n_2}\sqrt{x}}, \quad M = 2^{l+m_2+2})$$

haben wir also folgendes Resultat:

1. Wenn es ein ganzes $v \geqq 0$ mit (45) gibt, so haben wir für $h_1 k_2$ höchstens

$$c_{39} \frac{2^{l+m_2}}{q_v} + c_{39}\, 2^{l+m_2+m_1-n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Möglichkeiten.

2. Sonst haben wir für $h_1 k_2$ höchstens

$$c_{39}\, 2^{l+m_2+m_1-n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Möglichkeiten.

Jedem Wert von $h_1 k_2$ entsprechen aber nach (46) höchstens c_{40} Werte von $h_2 k_1$ (da $2^{m_1} \leqq \sqrt{x}$) und es ist $h_2 k_1 < c_{41}\, 2^{l+m_2}$. Wenn endlich $h_1 k_2$, $h_2 k_1$ gegeben sind, so haben wir für h_1, k_2, h_2, k_1 höchstens $c_{42}\, 2^{\frac{\varepsilon}{4}(l+m_2)}$ Möglichkeiten, da bekanntlich die Anzahl der Teiler der ganzen Zahl X gleich $O(X^\eta)$ ist für jedes $\eta > 0$. Damit sind offenbar die Behauptungen I, II bewiesen.

Ich bemerke noch, daß aus (45) folgt

$$(47) \qquad q_{v+1} > c_{43}\, 2^{n_2-m_1} \sqrt{x}.$$

Wir werden nun die Formeln (37), (38), (39) und damit auch den Hilfssatz 2 beweisen.

Beweis von (37)[21]. Die Summe links in (37) ist höchstens gleich $c_{44}(\Sigma_1+\Sigma_2)$, wo

$$\Sigma_1 = x^{\frac{r}{4}-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{l, m_1, m_2 \\ n_1, n_2}} 2^{n_1\frac{r_1}{2}+n_2\frac{r_2}{2}-n_1-l} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \cdot 2^{m_1+(m_2+l)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)-n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\Sigma_2 = x^{\frac{r}{4}-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{v, l, m_1, m_2 \\ n_1, n_2}} 2^{n_1\frac{r_1}{2}+n_2\frac{r_2}{2}-n_1-l} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{2^{(l+m_2)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}}{q_v}.$$

In Σ_1 ist der Summationsbereich durch (31), (32) gegeben, in Σ_2 summiert man über alle ganzen $v \geqq 0$ und für jedes v ist der Summationsbereich von l, m_1, m_2, n_1, n_2 durch (31), (32), (47) gegeben. Das ergibt erstens

$$\Sigma_1 = x^{\frac{r}{4}-1} \sum_{\substack{m_1, m_2, \\ n_1, n_2}} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)+m_1+m_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)} \cdot \left(\frac{1}{x} \sum_{2^l < 2^{m_1} x} 2^{l\frac{\varepsilon}{4}} + 2^{m_1} \sum_{2^l \geqq 2^{m_1} x} 2^{-l\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{4}-2+\frac{\varepsilon}{4}} \sum_{\substack{m_1, m_2, \\ n_1, n_2}} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)+m_1\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)+m_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{m_1, m_2} 2^{-m_1\left(\frac{r_1}{2}-2\right)-m_2\left(\frac{r_2}{2}-2\right)}\right) = O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon}\right) = O(F(x))$$

(man beachte, daß $\frac{r_j}{2} - 2 \geqq 0$ und daß die letzte Summe höchstens $O(\log^2 x)$ Glieder hat; solche Bemerkungen werden wir oft gebrauchen).

Zweitens: Jedes feste v liefert folgenden Beitrag zu Σ_2:

$$\frac{x^{\frac{r}{4}-\frac{1}{2}}}{q_v} \sum_{\substack{m_1, m_2, \\ n_1, n_2}} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\frac{r_2}{2}+m_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)} \cdot \left(\frac{1}{x} \sum_{2^l < 2^{m_1} x} 2^{l\frac{\varepsilon}{4}} + 2^{m_1} \sum_{2^l \geqq 2^{m_1} x} 2^{-l\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)}\right)$$

$$< c_{45} \frac{x^{\frac{r}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{4}}}{q_v} \sum_{\substack{m_1, m_2, \\ n_1, n_2}} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\frac{r_2}{2}+m_1\frac{\varepsilon}{4}+m_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}$$

$$< c_{46} \frac{x^{\frac{r}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{m_1, m_2, n_1, n_2} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\frac{r_2}{2}+m_2} = Z_{1,v}.$$

[21]) Die Summationsbuchstaben v, l, m_1, m_2, n_1, n_2 bedeuten ganze nichtnegative Zahlen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon < 1$.

Für $v \geqq w$, d. h. für $q_{v+1} > x$ ist

$$Z_{1,v} < c_{47} \frac{x^{\frac{r}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \cdot \sqrt{x} \cdot \log x \cdot \sum_{n_1, n_2} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)} < c_{48} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v}.$$

Für $v < w$ bekommen wir, wenn $r_1 \geqq r_2$ (man beachte (47))

$$Z_{1,v} < c_{49} \frac{x^{\frac{r}{4}-1+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{n_1, n_2, m_1} 2^{n_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)} < c_{50} \frac{x^{\frac{r}{4}+\frac{r_1}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{n_2, m_1} \frac{2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)}}$$

$$< c_{51} \frac{x^{\frac{r}{4}+\frac{r_1}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_2}{2}-1} \sum_{m_1} 2^{m_1\left(\frac{r_2}{2}-\frac{r_1}{2}\right)} < c_{52} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \quad (\text{da } z = r_2).$$

Für $v < w$, $r_1 < r_2$ bekommen wir endlich

$$Z_{1,v} < c_{53} \frac{x^{\frac{r}{4}+\frac{r_1}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{n_2, m_1} \frac{2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)}} < c_{54} \frac{x^{\frac{r}{4}+\frac{r_1}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_1}{2}-1} \sum_{n_2} 2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{r_1}{2}\right)}$$

$$< c_{55} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \quad (\text{da } z = r_1).$$

Also ist

$$\Sigma_2 \leqq \sum_{v=0}^{\infty} Z_{1,v} = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{v \geqq w} \frac{1}{q_v}\right) = O(F(x))$$

$\left(\text{denn} \sum_{v \geqq w} \frac{1}{q_v} = O\left(\frac{1}{q_w}\right)\right)$. Damit ist aber (37) bewiesen.

Beweis von (38)[21]). Die Summe links in (38) ist kleiner als $c_{56}(\Sigma_3 + \Sigma_4)$, wo

$$\Sigma_3 = x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{l, m_1, m_2 \\ n_1, n_2}} \frac{2^{n_2\frac{r_2}{2}}}{2^{n_1+m_1\frac{r_1}{2}+l}} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \cdot 2^{m_1+(m_2+l)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)-n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\Sigma_4 = x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{v, l, m_1, m_2 \\ n_1, n_2}} \frac{2^{n_2\frac{r_2}{2}}}{2^{n_1+m_1\frac{r_1}{2}+l}} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{2^{(l+m_2)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}}{q_v}.$$

Dabei ist der Summationsbereich in Σ_3 durch (31), (33) gegeben; in Σ_4 summiert man über alle $v \geqq 0$ und bei festem v über alle l, m_1, m_2, n_1, n_2

mit (31), (33), (47). Es ist also erstens

$$\Sigma_3 = x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-1} \sum_{\substack{m_1,m_2,\\ n_1,n_2}} \frac{2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)+m_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}}{2^{n_1+m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)}} \left(\frac{1}{x} \sum_{2^l < 2^{m_1}x} 2^{l\frac{\varepsilon}{4}} + 2^{m_1} \sum_{2^l \geqq 2^{m_1}x} 2^{-l\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)} \right)$$

$$= O\left(x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-2+\frac{\varepsilon}{4}} \sum_{\substack{m_1,m_2\\ n_1,n_2}} \frac{2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)+m_2}}{2^{n_1+m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)}} \cdot 2^{\frac{\varepsilon}{4}(m_1+m_2)} \right)$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\frac{\varepsilon}{4}} \sum_{m_1,m_2} \frac{1}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-2-\frac{\varepsilon}{4}\right)+m_2\left(\frac{r_2}{2}-2-\frac{\varepsilon}{4}\right)}} \right) = O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon}\right) = O(F(x)).$$

Zweitens: Jedes feste v liefert folgenden Beitrag zu Σ_4:

$$\frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{1}{2}}}{q_v} \sum_{\substack{m_1,m_2,\\ n_1,n_2}} \frac{2^{n_2\frac{r_2}{2}+m_2\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}}{2^{n_1+m_1\frac{r_1}{2}}} \left(\frac{1}{x} \sum_{2^l < 2^{m_1}x} 2^{l\frac{\varepsilon}{4}} + 2^{m_1} \sum_{2^l \geqq 2^{m_1}x} 2^{-l\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)} \right)$$

$$c_{57} \frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{4}}}{q_v} \sum_{\substack{m_1,m_2,\\ n_1,n_2}} \frac{2^{n_2\frac{r_2}{2}+m_2}}{2^{n_1+m_1\frac{r_1}{2}}} 2^{\frac{\varepsilon}{4}(m_1+m_2)} < c_{58} \frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{n_2,m_1} \frac{2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)}} = Z_{2,v}.$$

Für $v \geqq w$ ist also

$$Z_{2,v} < c_{59} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v}.$$

Für $v < w$, $r_1 \geqq r_2$ ist

$$Z_{2,v} < c_{60} \frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_2}{2}-1} \sum_{m_1} 2^{m_1\left(\frac{r_2}{2}-\frac{r_1}{2}\right)} < c_{61} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \quad (\text{da } z = r_2).$$

Für $v < w$, $r_1 < r_2$ ist

$$Z_{2,v} < c_{62} \frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_1}{2}-1} \sum_{n_2} 2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-\frac{r_1}{2}\right)} < c_{63} \frac{x^{\frac{r_1}{4}+\frac{r_2}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_1}{2}-1}$$

$$< c_{63} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \quad (\text{da } z = r_1).$$

Also

$$\Sigma_4 \leqq \sum_{v=0}^{\infty} Z_{2,v} = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{v \geqq w} \frac{1}{q_v} \right) = O(F(x)).$$

Damit ist (38) bewiesen.

Beweis von (39)[21]. Die Summe links in (39) ist kleiner als $c_{64}(\Sigma_5+\Sigma_6)$, wo

$$\Sigma_5 = x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{l,m_1,m_2,\\ n_1,n_2}} \frac{1}{2^{n_1+l+m_1\frac{r_1}{2}+m_2\frac{r_2}{2}}} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \cdot 2^{m_1+(m_2+l)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)-n_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\Sigma_6 = x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{v,l,m_1,m_2,\\ n_1,n_2}} \frac{1}{2^{n_1+l+m_1\frac{r_1}{2}+m_2\frac{r_2}{2}}} \cdot \operatorname{Min}\left(2^{m_1-l}, \frac{1}{x}\right) \frac{2^{(l+m_2)\left(1+\frac{\varepsilon}{4}\right)}}{q_v}.$$

Dabei ist der Summationsbereich in Σ_5 durch (31), (34) gegeben; in Σ_6 summiert man über alle $v \geqq 0$ und bei festem v über alle l, m_1, m_2, n_1, n_2 mit (31), (34), (47). Es ist also erstens

$$\Sigma_5 = x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{\substack{m_1,m_2,\\ n_1,n_2}} \frac{2^{m_2\frac{\varepsilon}{4}}}{2^{n_1+n_2+m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+m_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}} \left(\frac{1}{x} \sum_{2^l < 2^{m_1} x} 2^{l\frac{\varepsilon}{4}} + 2^{m_1} \sum_{2^l \geqq 2^{m_1} x} 2^{-l\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)} \right)$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{\substack{m_1,m_2,\\ n_1,n_2}} \frac{1}{2^{n_1+n_2+m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+m_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}} \right) = O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{m_1,m_2} \frac{1}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-2\right)+m_2\left(\right.}} \right.$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{2}-3+\varepsilon}\right) = O(F(x)).$$

Zweitens: Jedes feste v liefert folgenden Beitrag zu Σ_6:

$$\frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}}}{q_v} \sum_{\substack{m_1,m_2,\\ n_1,n_2}} \frac{2^{m_2\frac{\varepsilon}{4}}}{2^{n_1+m_1\frac{r_1}{2}+m_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}} \left(\frac{1}{x} \sum_{2^l < 2^{m_1} x} 2^{l\frac{\varepsilon}{4}} + 2^{m_1} \sum_{2^l \geqq 2^{m_1} x} 2^{-l\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)} \right)$$

$$< c_{65} \frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{\substack{m_1,m_2,\\ n_1,n_2}} \frac{1}{2^{n_1+m_1\frac{r_1}{2}+m_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}}$$

$$< c_{66} \frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{m_1,m_2,n_2} \frac{1}{2^{n_2+m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+m_2\frac{r_2}{2}}} = Z_{3,v}.$$

Für $v \geqq w$ ist

$$Z_{3,v} < c_{67} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{m_1,m_2} \frac{1}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)+m_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}} < c_{68} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v}.$$

Für $v < w$, $r_1 \geqq r_2$ ist

$$Z_{3,v} < c_{69} \frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \sum_{m_1, m_2} \frac{2^{n_2\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}}{2^{m_1\left(\frac{r_1}{2}-1\right)}}$$

$$< c_{70} \frac{x^{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{4}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_2}{2}-1} \sum_{m_1} 2^{m_1\left(\frac{r_2}{2}-\frac{r_1}{2}\right)}$$

$$< c_{71} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \quad (\text{da } z = r_2).$$

Für $v < w$, $r_1 < r_2$ ist

$$Z_{3,v} < c_{72} \frac{x^{\frac{r}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_1}{2}-1} \sum_{m_2, n_2} \frac{1}{2^{n_2\frac{r_1}{2}+m_2\frac{r_2}{2}}}$$

$$< c_{73} \frac{x^{\frac{r_1}{4}+\frac{r_2}{2}-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{r_1}{2}-1} \sum_{m_2} 2^{m_2\left(\frac{r_1}{2}-\frac{r_2}{2}\right)}$$

$$< c_{74} \frac{x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon}}{q_v} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \quad (\text{da } z = r_1).$$

Also ist

$$\Sigma_6 \leqq \sum_{v=0}^{\infty} Z_{3,v} = O\left(x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{0 \leqq v < w} \left(\frac{q_{v+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_v} + x^{\frac{r}{2}-2+\varepsilon} \sum_{v \geqq w} \frac{1}{q_v}\right) = O(F(x)).$$

Damit ist aber auch (39) bewiesen.

Beweis des Hauptsatzes 2. Die Voraussetzungen des Hauptsatzes 2 seien erfüllt. Es sei $x > q_1$. Dann ist

$$\int_0^{q_1} |P_Q(y)|\, dy = c_{75}.$$

Nach (9) ist für $1 \leqq v \leqq w$, $q_v \leqq y < q_{v+1}$ (w ist durch $q_w \leqq x < q_{w+1}$ definiert)

$$|P_Q(y)| < c_{76}\left(y^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+\varepsilon} \sum_{0 \leqq t < v} \frac{q_{t+1}^{\frac{z}{2}-1}}{q_t} + \frac{y^{\frac{r}{2}-1+\varepsilon}}{q_v}\right),$$

als erstens für $1 \leqq v < w$

$$\int_{q_v}^{q_{v+1}} |P_Q(y)|\, dy < c_{77}\left(q_{v+1}^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon} \sum_{0 \leqq t < w} \frac{q_{t+1}^{\frac{z}{2}-1}}{q_t} + \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}+\varepsilon}}{q_v}\right),$$

zweitens

$$\int_{q_w}^{x} |P_Q(y)|\,dy < c_{78}\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon} \sum_{0\leqq t<w} \frac{q_{t+1}^{\frac{z}{2}-1}}{q_t} + \frac{x^{\frac{r}{2}+\varepsilon}}{q_w}\right).$$

Also ist

$$\int_0^x |P_Q(y)|\,dy = O\left(1+\left(\sum_{1\leqq v<w} q_{v+1}^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon} + x^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon}\right)\right.$$
$$\left. \times \sum_{0\leqq t<w} \frac{q_{t+1}^{\frac{z}{2}-1}}{q_t} + \sum_{1\leqq v<w} \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}+\varepsilon}}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}+\varepsilon}}{q_w}\right).$$

Es ist aber

$$\sum_{1\leqq v<w} q_{v+1}^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon} = O\left(q_w^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon}\right) = O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon}\right),$$

$$\sum_{1\leqq v<w} \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}+\varepsilon}}{q_v} = O\left(x^{\frac{r}{2}-\frac{z}{2}+1+\varepsilon} \sum_{0\leqq v<w} \frac{q_{v+1}^{\frac{z}{2}-1}}{q_v}\right).$$

Also

$$\int_0^x |P_Q(y)|\,dy = O\left(1+x^{\frac{r}{2}+\varepsilon} \sum_{0\leqq t<w} \left(\frac{q_{t+1}}{x}\right)^{\frac{z}{2}-1} \cdot \frac{1}{q_t} + \frac{x^{\frac{r}{2}+\varepsilon}}{q_w}\right),$$

womit offenbar der Hauptsatz 2 bewiesen ist.

§ 4.

Beweis des Hauptsatzes 3.

Die Voraussetzungen des Hauptsatzes 3 seien erfüllt. Wir zeigen zuerst: *Es gibt ein* c_{79} *mit* $\alpha_1 c_{79} < 1$, *so daß für jedes ganze* $v \geqq 0$ *und jedes ganze* l *mit*

(48) $$l > 0, \quad l+1 < c_{79}\, q_v\, q_{v+1}$$

gilt

(49) $$\int_{\alpha_1 \frac{l}{q_v}}^{\alpha_1 \frac{l+1}{q_v}} |P_Q(y)|\,dy > c_{80}\, \frac{l^{\frac{r}{2}-1}}{q_v^{\frac{r}{2}+1}}.$$

Wir setzen $Q_v(u) = \alpha_1\left(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2 + \frac{p_v}{q_v}\left(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2\right)\right)$; also ist

(50) $$|Q(u) - Q_v(u)| \leqq c_{81} \frac{Q(u)}{q_v\, q_{v+1}}$$

(wo wir c_{81} so groß wählen, daß $\frac{\alpha_1}{3\,c_{81}} < 1$).

Es sei l ganz, $l>0$, $l+1<\frac{1}{3c_{81}}q_v q_{v+1}=c_{79}q_v q_{v+1}$; wenn

$$\alpha_1\frac{l+\frac{1}{3}}{q_v}<Q(u)<\alpha_1\frac{l+\frac{2}{3}}{q_v}, \tag{51}$$

so ist nach (50)

$$\alpha_1\frac{l}{q_v}<Q_v(u)<\alpha_1\frac{l+1}{q_v}.$$

Für ganze u_i $(i=1,2,\ldots,r)$ ist aber $Q_v(u)$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{\alpha_1}{q_v}$; also liegen im Gebiet (51) keine Gitterpunkte. Für

$$\alpha_1\frac{l+\frac{1}{3}}{q_v}<y<\alpha_1\frac{l+\frac{2}{3}}{q_v} \tag{52}$$

ist also $A_Q(y)$ konstant, also ist nach (1), (2)

$$\frac{d\,\mathsf{P}_Q(y)}{dy}=-c_{82}y^{\frac{r}{2}-1}<-c_{83}\left(\frac{l}{q_v}\right)^{\frac{r}{2}-1}.$$

Diejenigen y des Intervalls (52), für welche

$$|\mathsf{P}_Q(y)|<\frac{\alpha_1}{12q_v}c_{83}\left(\frac{l}{q_v}\right)^{\frac{r}{2}-1}$$

ist, füllen daher höchstens ein Intervall aus, dessen Länge höchstens $\frac{\alpha_1}{6q_v}$ ist. Also ist

$$\int\limits_{\alpha_1\frac{l+\frac{1}{3}}{q_v}}^{\alpha_1\frac{l+\frac{2}{3}}{q_v}}|\mathsf{P}_Q(y)|\,dy\geqq\frac{\alpha_1}{6q_v}\cdot\frac{\alpha_1}{12q_v}c_{83}\left(\frac{l}{q_v}\right)^{\frac{r}{2}-1},$$

womit (49) bewiesen ist.

Es sei nun $q_w\leqq x<q_{w+1}$, $w\geqq 2$. Es sei $v_0=0$ oder $v_0=1$, je nachdem w gerade oder ungerade ist. Dann ist (in der Folge beachte man $\alpha_1 c_{79}<1$)

$$\int\limits_0^{\alpha_1 c_{79}q_w}|\mathsf{P}_Q(y)|\,dy\geqq\sum_{\substack{v_0\leqq v<w\\ v\equiv v_0\,(\mathrm{mod}\,2)}}\int\limits_{\alpha_1 c_{79}q_v}^{\alpha_1 c_{79}q_{v+2}}|\mathsf{P}_Q(y)|\,dy.$$

Weiter ist nach (49)

$$\int\limits_{\alpha_1 c_{79}q_v}^{\alpha_1 c_{79}q_{v+2}}|\mathsf{P}_Q(y)|\,dy\geqq\sum_{\substack{l+1<c_{79}q_v q_{v+1}\\ l>c_{79}q_v^2}}\int\limits_{\alpha_1\frac{l}{q_v}}^{\alpha_1\frac{l+1}{q_v}}+\sum_{\substack{l+1<c_{79}q_{v+1}q_{v+2}\\ l>c_{79}q_{v+1}^2}}\int\limits_{\alpha_1\frac{l}{q_{v+1}}}^{\alpha_1\frac{l+1}{q_{v+1}}}$$

$$>c_{80}\left(\frac{1}{q_v^{\frac{r}{2}+1}}\sum_{\substack{l+1<c_{79}q_v q_{v+1}\\ l>c_{79}q_v^2}}l^{\frac{r}{2}-1}+\frac{1}{q_{v+1}^{\frac{r}{2}+1}}\sum_{\substack{l+1<c_{79}q_{v+1}q_{v+2}\\ l>c_{79}q_{v+1}^2}}l^{\frac{r}{2}-1}\right)=T.$$

Nun ist $q_{v+2} \geqq 2q_v$, also

A. entweder $q_{v+1} > \sqrt{2}\, q_v$, $q_{v+2} > \sqrt{2}\, q_{v+1}$,

B. oder $q_{v+1} > \sqrt{2}\, q_v$, $q_{v+2} \leqq \sqrt{2}\, q_{v+1}$,

C. oder $q_{v+1} \leqq \sqrt{2}\, q_v$, und dann notwendig $q_{v+2} \geqq \sqrt{2}\, q_{v+1}$.

Im Fall A ist für $v > c_{84}$

$$T > c_{85}\left(\frac{(q_v q_{v+1})^{\frac{r}{2}}}{q_v^{\frac{r}{2}+1}} + \frac{(q_{v+1} q_{v+2})^{\frac{r}{2}}}{q_{v+1}^{\frac{r}{2}+1}}\right) = c_{85}\left(\frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v} + \frac{q_{v+2}^{\frac{r}{2}}}{q_{v+1}}\right).$$

Im Fall B ist für $v > c_{84}$

$$T > c_{86}\frac{(q_v q_{v+1})^{\frac{r}{2}}}{q_v^{\frac{r}{2}+1}} = c_{86}\left(\frac{q_{v+1}}{q_v}\right) q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1} \geqq c_{86}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{q_{v+1}}{q_v} q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1} + \frac{q_{v+2}}{q_{v+1}}\cdot\left(\frac{q_{v+2}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{r}{2}-1}\right)$$

$$> c_{87}\left(\frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v} + \frac{q_{v+2}^{\frac{r}{2}}}{q_{v+1}}\right).$$

Im Fall C ist für $v > c_{84}$

$$T > c_{88}\frac{(q_{v+1} q_{v+2})^{\frac{r}{2}}}{q_{v+1}^{\frac{r}{2}+1}} = c_{88}\left(\frac{q_{v+2}}{q_{v+1}}\right)^{\frac{r}{2}} q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1} \geqq c_{88}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\frac{q_{v+2}}{q_{v+1}}\right)^{\frac{r}{2}} q_{v+1}^{\frac{r}{2}-1} + \left(\frac{q_{v+1}}{q_v}\right)^{\frac{r}{2}} q_v^{\frac{r}{2}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} c_{88}\left(\frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v} + \frac{q_{v+2}^{\frac{r}{2}}}{q_{v+1}}\right).$$

Also ist für $w > c_{84} + 2$

$$\int_0^{\alpha_1 c_{79} q_w} |P_Q(y)|\, dy > c_{89} \sum_{c_{84}+1 < v < w} \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v}. \tag{53}$$

Wir unterscheiden nun wieder drei Fälle:

H. $x < 2q_w$,

K. $2q_w \leqq x < \alpha_1 c_{79} q_{w+1}$,

L. $2q_w \leqq x$ und zugleich $\alpha_1 c_{79} q_{w+1} \leqq x < q_{w+1}$.

Im Fall H ist

$$\frac{x^{\frac{r}{2}}}{q_w} < (2q_w)^{\frac{r}{2}} \cdot \frac{1}{q_{w-1}}. \tag{54}$$

Im Fall K ist nach (49)

$$\int_{\alpha_1 c_{79} q_w}^{x} |P_Q(y)|\,dy \geqq c_{80} \frac{1}{q_w^{\frac{r}{2}+1}} \sum_{\substack{\alpha_1 \frac{l}{q_w} > \alpha_1 c_{79} q_w \\ \alpha_1 \frac{l+1}{q_w} < x}} l^{\frac{r}{2}-1} > c_{90} \frac{x^{\frac{r}{2}}}{q_w} \tag{55}$$

für $x > c_{91}$ $\left(\text{man beachte } \frac{x q_w}{\alpha_1} > 2 c_{79} q_w^2\right)$.

Im Fall L ist nach (49) (man beachte, daß in diesem Fall $q_{w+1} > 2 q_w$)

$$\int_{\alpha_1 c_{79} q_w}^{x} |P_Q(y)|\,dy \geqq \int_{\alpha_1 c_{79} q_w}^{\alpha_1 c_{79} q_{w+1}} |P_Q(y)|\,dy \geqq c_{80} \cdot \frac{1}{q_w^{\frac{r}{2}+1}} \sum_{\substack{\frac{l}{q_w} > c_{79} q_w \\ \frac{l+1}{q_w} < c_{79} q_{w+1}}} l^{\frac{r}{2}-1} > c_{92} \frac{q_{w+1}^{\frac{r}{2}}}{q_w} > c_{92} \frac{x^{\frac{r}{2}}}{q_w}$$

für $x > c_{93}$.

Nach (53), (54), (55), (56) ist für $x > c_{94}$

$$\int_0^x |P_Q(y)|\,dy > c_{95} \left(\sum_{c_{94}+1 < v < w} \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}}}{q_w} \right).$$

Weiter ist aber

$$\sum_{v \leqq c_{94}+1} \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v} = c_{96},$$

während $\frac{x^{\frac{r}{2}}}{q_w} \geqq x^{\frac{r}{2}-1}$. Also ist für $x > c_{97}$

$$\int_0^x |P_Q(y)|\,dy > c_{98} \left(\sum_{0 \leqq v < w} \frac{q_{v+1}^{\frac{r}{2}}}{q_v} + \frac{x^{\frac{r}{2}}}{q_w} \right),$$

womit der Hauptsatz 3 bewiesen ist.

Prag, den 15. Mai 1932.

(Eingegangen am 18. Mai 1932.)

Über die statistische Unabhängigkeit der asymptotischen Verteilungsfunktionen inkommensurabler Partialschwingungen.

Von

Aurel Wintner in Baltimore.

Die Bohrsche Entdeckung über den Zusammenhang der Theorie der diophantischen Approximationen bzw. des Kronecker-Weylschen Satzes mit der Theorie der Dirichletschen Reihen und insbesondere der Riemannschen Zetafunktion kann bekanntlich im wesentlichen dahin gedeutet werden, daß die Glieder der unendlichen Reihe in Gebieten, die zu der imaginären Achse parallel sind (d. h. Streifen oder Geraden), sich asymptotisch sozusagen „unabhängig", nämlich derart verhalten, *als ob* es sich nicht um eine Funktionenreihe einer einzigen Veränderlichen, sondern um eine Potenzreihe mit unendlich vielen unabhängigen Variablen handeln würde. Im nachstehenden wird an Hand eines relativ einfachen, aber, wie es scheint, ausschlaggebenden Problems gezeigt, daß dieser mehr qualitative Begriff der Unabhängigkeit unter Umständen durch einen exakten, d. h. quantitativen ersetzt werden kann. [Zusatz bei der Korrektur: Der komplexwertige Fall kann, wie ich inzwischen gefunden habe, unter Benutzung diesmal zweidimensionaler Stieltjesscher Integrale durchaus analog behandelt werden.] Des näheren wird es sich um folgendes handeln (vgl. eine vorläufige Mitteilung in dem Journ. London Math. Soc., 1932).

Vor einiger Zeit habe ich im Anschluß an eine gelegentliche matrizentheoretische Bemerkung von Herrn Heisenberg gezeigt, daß zu jeder reellwertigen fastperiodischen Funktion[1])

$$x(t) \sim \sum_k r_k \cos \lambda_k (t - \delta_k) \qquad (r_k > 0) \tag{1}$$

eine asymptotische Verteilungsfunktion existiert, die in jedem Gebiete der reellen x-Achse für die relative Häufigkeit der Werte $x = x(t)$ eine zu

[1]) H. Bohr, Acta Math. 45 (1925), S. 29–127.

$-\infty < t < +\infty$ gehörige Grenzwahrscheinlichkeit festlegt und außerdem die in der Statistik üblichen Momenteneigenschaften aufweist[2]). Im nachstehenden wird nun gezeigt, daß, sobald für die Frequenzen die Prämisse des Kronecker-Weylschen Satzes, nämlich die lineare Unabhängigkeit der λ_k, erfüllt ist, die asymptotische Verteilungsfunktion von $x(t)$ aus den asymptotischen Verteilungsfunktionen der (endlich oder unendlich vielen) Partialschwingungen

$$p_k(t) = r_k \cos \lambda_k (t - \delta_k) \qquad (r_k > 0) \tag{2}$$

sich genau nach demselben *Additionstheorem* herleitet, das im Rahmen der v. Misesschen Häufigkeitstheorie[3]) geradezu als ein Bestandteil der Definition für die Unabhängigkeit der verschiedenen, einer Summenbildung unterworfenen Partialkollektive betrachtet werden kann (während es nach der herkömmlichen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als ein für „unabhängige" Partialkollektive beweisbarer Satz gilt). Nebenbei ergibt sich eine rekursive Rechenvorschrift zur expliziten Herstellung der asymptotischen Verteilungsfunktion der Summe (1), da doch die asymptotischen Verteilungsfunktionen der Partialschwingungen (2) unmittelbar hingeschrieben werden können. Es sei hier an den Bohrschen Satz[1]) erinnert, wonach die positive Reihe

$$\sum_k r_k \tag{3}$$

konvergieren muß, wenn die Funktion (1) fastperiodisch ist und linearunabhängige Frequenzen hat. Dabei heißen die Frequenzen λ_k, wie üblich, linear-unabhängig, wenn ihre (evtl. unendliche) Folgen keine endlich vielen Zahlen enthält, zwischen welchen eine homogen-lineare Beziehung mit ganzzahligen, nicht durchweg verschwindenden Koeffizienten besteht. Diese Bedingung kann z. B. erfüllt sein, wenn

$$\lambda_k = \gamma + k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4}$$

gilt, wobei γ irgendeine reelle Irrationalzahl bedeutet. Der Fall (4) kommt nach Fuchs und Floquet bei jedem homogenen linearen Differentialsystem mit periodischen Koeffizienten vor, sofern der charakteristische Exponent, nämlich $\gamma\sqrt{-1}$, rein-imaginär und nicht rational ist.

In der Statistik bezeichnet man eine Funktion $\sigma = \sigma(\xi)$ als eine Verteilungsfunktion, wenn sie für $-\infty < \xi < +\infty$ reellwertig erklärt ist, nirgends abnimmt, für $\xi \to -\infty$ verschwindet und für $\xi \to +\infty$ gegen 1 strebt:

---

[2]) A. Wintner, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 290–319.

[3]) R. v. Mises, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen in der Statistik und theoretischen Physik, Leipzig und Wien, 1931. Vgl. insbes. S. 93 und S. 175 ff., S. 218 ff.

$$0 = \sigma(-\infty) \leqq \sigma(\xi_1) \leqq \sigma(\xi_2) \leqq \sigma(+\infty) = 1 \qquad (\xi_1 < \xi_2) \tag{5}$$

(so daß es also höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen gibt) und wenn außerdem das Verhalten von σ für $\xi \to \infty$ derart ist, daß alle Momente

$$\mu_n(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^n \, d\sigma(\xi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

existieren. Hierfür ist jedenfalls hinreichend die Existenz einer Zahl $R > 0$ derart, daß

$$\sigma(\xi) \equiv 0, \quad \xi \leqq -R; \qquad \sigma(\xi) \equiv 1, \quad \xi \geqq R \tag{7}$$

gilt und daher

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots d\sigma(\xi) = \int_{-R}^{+R} \ldots d\sigma(\xi) \tag{8}$$

wird. Im nachstehenden wird die Bedingung (7) stets erfüllt sein, was die Vornahme einer Vertauschung von Grenzübergängen von vornherein rechtfertigt. Es gilt z. B.[4])

$$\mu_n(\sigma) = i^n F^{(n)}(0; \sigma) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{9}$$

wobei

$$F = F(z; \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} \, d\sigma(\xi) \tag{10}$$

die Laplace-Fouriersche Transformierte von σ und $F^{(n)}$ die n-te Ableitung von $F = F(z)$ bedeutet.

Sind

$$\sigma_1(\xi), \sigma_2(\xi), \ldots, \sigma_N(\xi) \tag{11}$$

N Verteilungsfunktionen, so ist auch ihre (nur scheinbar unsymmetrische) „Faltung“ [5])

$$\sigma(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_1(\xi - \eta_1) \, d\sigma_2(\eta_1 - \eta_2) \ldots d\sigma_N(\eta_{N-1}), \tag{12}$$

also z. B. für $N = 2$ die Funktion

$$\sigma(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_1(\xi - \eta) \, d\sigma_2(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_2(\xi - \eta) \, d\sigma_1(\eta) \tag{13}$$

eine Verteilungsfunktion, die zugleich mit den Funktionen (11) der Endlichkeitsbedingung (7) genügt. Die scheinbar komplizierte Bildung (12) vereinfacht sich erheblich beim Übergang zu dem durch (10) festgelegten

---

[4]) Die Funktion (10) ist übrigens eine ganze transzendente Funktion; vgl. (21).

„Unterbereich", da aus (12) und (10) nach einfachen Umformungen, die wegen (7) gewiß legal sind, bekanntlich[5])

$$F(z, \sigma) = \prod_{k=1}^{N} F(z; \sigma_k) \tag{14}$$

gefolgert werden kann. Insbesondere gilt also nach der Leibnizschen Regel

$$F^{(n)}(0, \sigma) = \Big[\sum_{k=1}^{N} F(0; \sigma_k)\Big]^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

also nach (9)

$$\mu_n(\sigma) = \Big[\sum_{k=1}^{N} \mu(\sigma_k)\Big]^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{16}$$

wobei der Exponent n symbolisch zu verstehen ist, so daß z. B. für $N = 2$

$$\mu_n(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mu_{n-j}(\sigma_1)\, \mu_j(\sigma_2) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

gilt.

Sind zwei der Bedingung (7) genügende Verteilungsfunktionen σ_1, σ_2 derart, daß

$$\mu_n(\sigma_1) = \mu_n(\sigma_2) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{18}$$

ist, so gilt

$$\sigma_1(\xi + 0) = \sigma_2(\xi + 0), \quad \sigma_1(\xi - 0) = \sigma_2(\xi - 0) \tag{19}$$

für alle ξ, d. h.

$$\sigma_1(\xi) = \sigma_2(\xi) \tag{19}'$$

an allen Stetigkeitsstellen der σ (also bis auf eine höchstens abzählbare ξ-Menge), mit anderen Worten das Momentenproblem ist „bestimmt" (determiné). Für die „Bestimmtheit" des Hamburgerschen Momentenproblems (6) ist nämlich nach einem Carlemanschen Satz[6]) hinreichend, daß die positive Reihe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{\mu_{2n}}} \tag{20}$$

divergiert, und diese Bedingung ist hier offenbar erfüllt, da doch nach (6), (8) und (5)

$$0 < \mu_{2n} \leqq R^{2n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{21}$$

---

[5]) Vgl. G. Doetsch, Math. Annalen 89 (1923), S. 192 ff.

[6]) T. Carleman, C. R. 174 (1922), S. 1527–1530, und Wiss. Vorträge, gehalten am 5. skand. Math.-Kongr. in Helsingfors 1923, S. 186–187.

gilt. Aus dem Carlemanschen Ergebnis folgt auch, daß wenn nur *eine* der beiden Verteilungsfunktionen σ_1, σ_2, die die gemeinsamen Momente (18) haben, der Bedingung (7) genügt, die andere *von selbst* diese Bedingung erfüllen muß. Nimmt man aber eine Bedingung (7) für beide Verteilungsfunktionen σ_1, σ_2 an, so ist für den Nachweis von (19) die Heranziehung der tiefergehenden Carlemanschen Hilfsmittel überflüssig, man kommt vielmehr bereits mit dem Weierstraßschen Approximationssatz durch[7])

Wegen (21) sind die Prämissen des sogenannten zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung[8]) reichlich erfüllt, wenn es sich um eine Folge $\{\sigma_l(\xi)\}$ von Verteilungsfunktionen handelt, die die Bedingung (7) mit einem von dem Index l unabhängigen R befriedigen. Es ist aber wegen (7) wiederum überflüssig, diese feineren Hilfsmittel heranzuziehen, der fragliche Grenzwertsatz („Stetigkeit des Momentenproblems") folgt hier vielmehr mit Rücksicht auf die Bestimmtheit des Momentenproblems bereits aus dem Hellyschen Auswahlsatz[9]) sowie aus dem Hellyschen Satz über gliedweise Stieltjessche Integration[9]), und zwar sogar in der folgenden Fassung: Erfüllen die Verteilungsfunktionen $\sigma_l(\xi)$ eine Bedingung

$$\sigma_l(\xi) \equiv 0, \quad \xi \leqq -R; \qquad \sigma_l(\xi) \equiv 1, \quad \xi \geqq R, \tag{22}$$

wobei die positive Zahl R beliebig groß, aber unabhängig von dem Zeiger l ist, der auch ein kontinuierlicher Parameter sein darf, existiert ferner bei jedem festen Werte von n der Grenzwert

$$\lim_{l=+\infty} \mu_n(\sigma_l) = \mathfrak{M}_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{23}$$

so gibt es eine Verteilungsfunktion $\sigma(\xi)$ derart, daß für jedes n

$$\mu_n(\sigma) = \mathfrak{M}_n \tag{24}$$

und an allen Stetigkeitsstellen ξ von $\sigma(\xi)$

$$\lim_{l=+\infty} \sigma_l(\xi) = \sigma(\xi) \tag{25}$$

gilt.

Es bezeichne $x(t)$ eine für $-\infty < t < +\infty$ erklärte, reellwertige, beschränkte, meßbare Funktion, l eine positive Zahl, und man setze[10])

$$m_l = \operatorname*{fin\,inf}_{-l \leqq t \leqq l} x(t), \qquad M_l = \operatorname*{fin\,sup}_{-l \leqq t \leqq l} x(t), \tag{26}$$

---

[7]) Vgl. F. Haussdorff, Math. Zeitschr. **16** (1923), S. 222–223.

[8]) Vgl. die abschließenden Ergebnisse der Herren M. Fréchet und J. Shohat, Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), S. 533–543.

[9]) E. Helly, Wiener Sitzungsber. **121** (1912), S. 265–297.

[10]) fin sup = Weierstraßsche obere Grenze (Kamke).

so daß

$$m_h \leqq m_l \leqq M_l \leqq M_h \qquad (l < h) \tag{27}$$

und

$$\lim_{l=+\infty} m_l = m, \quad \lim_{l=+\infty} M_l = M \tag{28}$$

gilt, wobei m die untere; M die obere Grenze von $x(t)$ für $-\infty < t < +\infty$ bedeutet[11]). Es bezeichne ferner ξ eine reelle Zahl und $\operatorname{mes}[x < \xi]_l$ das Lebesguesche Maß der Menge derjenigen t, die zwischen $-l$ und $+l$ liegen und die Bedingung $x(t) < \xi$ erfüllen:

$$[x < \xi]_l: \quad -l \leqq t \leqq +l, \quad x(t) < \xi, \tag{29}$$

es sei endlich $\sigma_l(\xi)$ die Funktion

$$\sigma_l(\xi) = \frac{\operatorname{mes}[x<\xi]_l}{2l} \qquad (-\infty < \xi < +\infty), \tag{30}$$

so daß nach (26)

$$\sigma_l(\xi) \equiv 0, \quad \xi < m_l; \quad \sigma_l(\xi) \equiv 1, \quad \xi > M_l \tag{31}$$

ist und offenbar

$$\sigma_l(\xi_1) \leqq \sigma_l(\xi_2) \qquad (\xi_1 < \xi_2), \tag{32}$$

endlich

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} (x(t))^n\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^n\, d\sigma_l(\xi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{33}$$

gilt, da doch die Lebesgueschen Näherungssummen des linker Hand stehenden Ausdruckes nach der Definition von $\sigma_l(\xi)$ mit den Stieltjesschen Näherungssummen des rechter Hand stehenden Integrals übereinstimmen. Die Funktion $\sigma_l(\xi)$ mißt mit Rücksicht auf (30) und (29) einfach die zu $-l \leqq t \leqq +l$ gehörige *relative Häufigkeit* der Funktion $x(t)$ in dem Gebiete $x < \xi$.

Es sei nun für $x(t)$ außer der Annahme des vorigen Absatzes auch die Bedingung erfüllt, daß die Grenzwerte

$$\mathfrak{M}(x^n) = \lim_{l=+\infty} \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} (x(t))^n\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{34}$$

---

[11]) Für eine fastperiodische Funktion (1) mit linear-unabhängigen Frequenzen folgt aus dem Kroneckerschen Approximationssatz und aus der Konvergenz der Reihe (3) ohne Mühe, daß

$$M = \sum_k r_k = -m$$

ist.

existieren (wofür die Fastperiodizität von $x(t)$ zwar hinreichend, aber keinesfalls notwendig ist). Dann sind alle Prämissen des zentralen Grenzwertsatzes (24) und (25) befriedigt. Denn einerseits sind die Bedingungen (12) und (5) wegen (28), (31) und (32) durch ein von l unabhängiges R erfüllt, und andererseits kann (34) mit Rücksicht auf (33) und (6) in der Gestalt

$$\lim_{l=+\infty} \mu_n(\sigma_l) = \mathfrak{M}(x^n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{35}$$

geschrieben werden, so daß (23) durch $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}(x^n)$ befriedigt wird. Nach (24) und (25) gibt es daher eine Verteilungsfunktion $\sigma(\xi)$ derart, daß für alle n

$$\mu_n(\sigma) = \mathfrak{M}(x^n) \tag{36}$$

und an allen Stetigkeitsstellen[12]) der monotonen Funktion $\sigma(\xi)$

$$\lim_{l=+\infty} \sigma_l(\xi) = \sigma(\xi) \tag{37}$$

gilt. Es folgt aus (27), (28), (29) und (31), daß die Funktion (37) den Bedingungen

$$\sigma(\xi) \equiv 0, \quad \xi < m; \quad \sigma(\xi) \equiv 1, \quad \xi > M \tag{38}$$

genügt. — Die dabei zugrunde gelegten Voraussetzungen für $x(t)$ sind, wie schon erwähnt, reichlich erfüllt, wenn die reelle Funktion eine fastperiodische ist[12]).

Der Grenzübergang (37) ordnet zu jeder fastperiodischen Funktion $x(t)$ eine monotone Funktion $\sigma(\xi)$ zu, die allerdings nur an ihren Stetigkeitsstellen definiert ist und an ihren höchstens abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen beliebig, etwa durch $\sigma(\xi) = \sigma(\xi + 0)$, festgelegt werden kann (der Wert von σ an den Unstetigkeitsstellen ist für die Stieltjessche Integration sowieso belanglos). Da die Existenz des Grenzwertes (37) mit Rücksicht auf (29) und (30) dahin gedeutet werden kann, daß die Funktion $x(t)$ eine zu $-\infty < t < +\infty$ gehörige *durchschnittliche Verweilzeit* in dem Gebiete $x(t) < \xi$ besitzt (wenigstens sofern ξ nicht zu einer eventuell exzeptionellen, höchstens abzählbaren Punktmenge gehört), so wollen wir $\sigma(\xi)$ die *asymptotische Verteilungsfunktion* von $x(t)$ nennen und durch den entsprechenden großen Buchstaben bezeichnen, also z. B. durch $X(\xi)$ für $x(t)$, durch $X_N(\xi)$ für $x_N(t)$, durch $P_k(\xi)$ für $p_k(t)$. Da nach (2), (30) und (37) offenbar

---

[12]) Es ist von Bohr gezeigt worden, daß der Grenzwert (37) an eventuellen Unstetigkeitsstellen von σ auch dann nicht zu existieren braucht, wenn $x(t)$ fastperiodisch ist; s. Danske Vid. Selk. Medd. **10** (1930), Nr. 10.

$$P_k(\xi) \equiv 0 \qquad (-\infty < \xi < -r_k),$$

$$P_k(\xi) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\xi}{r_k} \qquad (-r_k \leqq \xi \leqq r_k), \tag{39}$$

$$P_k(\xi) \equiv 1 \qquad (r_k < \xi < +\infty)$$

gilt, wobei der Zweig

$$0 \leqq \arccos \eta \leqq \pi \tag{40}$$

gemeint ist, so hat $P_k(\xi)$ keine Unstetigkeitsstellen und daher erst recht keine exzeptionellen Stellen (für welche der Grenzwert (37) nicht existiert).

Es sei noch erwähnt, daß $X(\xi)$ auf eine stetige Weise von $x(t)$ abhängt, indem folgendes behauptet werden kann: Konvergiert eine reelle Folge von fastperiodischen Funktionen $x_j(t)$ gleichmäßig $(-\infty < t < +\infty)$ gegen $x(t)$, so gilt

$$\lim_{j=+\infty} X_j(\xi) = X(\xi) \tag{41}$$

an allen Stetigkeitsstellen von $X(\xi)$. Denn einerseits folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz, daß

$$\lim_{j=+\infty} \mathfrak{M}(x_j^n) = \mathfrak{M}(x^n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{42}$$

gilt, was nach (36) in der Gestalt

$$\lim_{j=+\infty} \mu_n(X_j) = \mu_n(X) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{43}$$

geschrieben werden kann, und andererseits ist die Folge $\{x_j(t)\}$ gleichmäßig beschränkt, so daß durch die Verteilungsfunktionen $X_j(\xi)$ mit Rücksicht auf (38) auch die Bedingung (22) befriedigt wird und daher beide Prämissen von (25) erfüllt sind.

Wir wollen nun zeigen, daß, wenn

$$p_1(t),\ p_2(t),\ \ldots,\ p_N(t) \tag{44}$$

N Partialschwingungen (2) mit linear-unabhängigen Frequenzen λ_k bezeichnen, die asymptotische Verteilungsfunktion $X_N(\xi)$ der Superposition

$$x_N(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k(t) \tag{45}$$

sich aus den asymptotischen Verteilungsfunktionen (39) der Partialschwingungen (44) nach dem Additionstheorem (12) der Verteilungsfunktionen *von statistisch unabhängigen Kollektiven* herleitet, d. h. daß

$$X_N(\xi) = \varrho(\xi) \tag{46}$$

gilt, wenn $\varrho(\xi)$ durch

$$(47)\qquad \varrho(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}P_1(\xi-\eta_1)\,dP_2(\eta_1-\eta_2)\cdots dP_N(\eta_{N-1})$$

definiert wird. Da zugleich mit den Funktionen (11) auch ihre Faltung (12) eine der Bedingung (7) genügende *stetige* Verteilungsfunktion darstellt[5]), so ist (47) wegen (39) gewiß eine der Bedingung (7) genügende stetige Verteilungsfunktion. Ferner ist $X_N(\xi)$ die asymptotische Verteilungsfunktion einer fastperiodischen Funktion und genügt daher ebenfalls der Bedingung (7). Mit Rücksicht auf den im Zusammenhang mit (18) erwähnten Bestimmtheitssatz ist daher die Behauptung (46) völlig äquivalent mit

$$(48)\qquad \mu_n(X_N)=\mu_n(\varrho)\qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

was nach (47), (12) und (16) auch in der Gestalt

$$(49)\qquad \mu_n(X_N)=\Big[\sum_{k=1}^{N}\mu(P_k)\Big]^n\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

und daher nach (36) und (45) als

$$(50)\qquad \mathfrak{M}\Big(\Big(\sum_{k=1}^{N}p_k\Big)^n\Big)=\Big[\sum_{k=1}^{N}\mathfrak{M}(p_k)\Big]^n\qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

geschrieben werden kann, wobei z. B. für $N=2$

$$(51)\qquad \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\mathfrak{M}(p_1^{n-m}p_2^m)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\mathfrak{M}(p_1^{n-m})\,\mathfrak{M}(p_2^m)\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

gedacht ist; vgl. (17).

Setzt man

$$(52)\qquad c_{1j}(t)=\cos\lambda_1 j(t-\delta_1),\qquad c_{2l}(t)=\cos\lambda_2 l(t-\delta_2)$$
$$(j,l=0,1,2,\ldots),$$

wobei die beiden reellen Zahlen λ_1,λ_2 linear-unabhängig sind, so gilt für das Produkt $c_{1j}\cdot c_{2l}$ offenbar

$$(53)\qquad \mathfrak{M}(c_{1j}c_{2l})=0\quad\text{für}\quad j+l>0\qquad (j,l=0,1,2,\ldots),$$

d. h. wenn nicht beide Zeiger j,l verschwinden. Bezeichnet man nun mit $\alpha_j^{(m)}$ die durch

$$(54)\qquad \cos^m\tau=\sum_{j=0}^{m}\alpha_j^{(m)}\cos j\tau\qquad (m=0,1,2,\ldots)$$

festgelegten Fourierschen Koeffizienten der ganzzahligen Potenzen der Kosinusfunktion, so gilt nach (2) und (52)

$$(55)\qquad p_1^{n-m}p_2^m=r_1^{n-m}r_2^m\sum_{j=0}^{n-m}\sum_{l=0}^{m}\alpha_j^{(n-m)}\alpha_l^{(m)}c_{1j}(t)\,c_{2l}(t)$$

und daher nach (53)

$$\mathfrak{M}(p_1^{n-m} p_2^m) = r_1^{n-m} r_2^m \alpha_0^{(n-m)} \alpha_0^{(m)} \mathfrak{M}(c_{10} c_{20}), \tag{56}$$

also nach (52) einfach

$$\mathfrak{M}(p_1^{n-m} p_2^m) = r_1^{n-m} r_2^m \alpha_0^{(n-m)} \alpha_0^{(m)} \qquad (0 \leqq m \leqq n), \tag{57}$$

mithin offenbar[13])

$$\mathfrak{M}(p_1^{n-m}) = r_1^{n-m} \alpha_0^{(n-m)}, \quad \mathfrak{M}(p_2^m) = r_2^m \alpha_0^m \qquad (0 \leqq m \leqq n) \tag{58}$$

und daher nach (57)

$$\mathfrak{M}(p_1^{n-m} p_2^m) = \mathfrak{M}(p_1^{n-m}) \mathfrak{M}(p_2^m) \qquad (0 \leqq m \leqq n), \tag{59}$$

woraus die Richtigkeit von (51) ersichtlich ist. Damit ist (56) allerdings nur für $N = 2$ bewiesen, es ist aber klar, daß der Beweis für jedes N in Kraft bleibt.

Es sei noch erwähnt, daß die damit bewiesene Formel (46) mit Rücksicht auf (47) auch in der Gestalt

$$X_N(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_{N-1}(\xi - \eta)\, dP_N(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_N(\xi - \eta)\, dX_{N-1}(\eta) \tag{60}$$

geschrieben werden kann, wodurch die asymptotischen Verteilungsfunktionen der Teilsummen (45) von (1) mit Rücksicht auf (39) rekursiv bestimmt sind. Die asymptotische Verteilungsfunktion der evtl. unendlichen Summe (1) bestimmt sich dann aus (41), wobei $j = N$ zu setzen ist. Aus der Konvergenz der Reihe (3) folgt übrigens leicht, daß (14) auch für $N = +\infty$ bestehen bleibt, daß also für den Fall einer nicht abbrechenden Reihe (1) die konvergente Produktentwicklung

$$F(z; X) = \prod_{k=1}^{+\infty} F(z; P_k) \tag{61}$$

gilt, wobei nach (10) und (39)

$$F(z; P_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-r_k}^{+r_k} \frac{e^{izx}}{\sqrt{r_k^2 - x^2}}\, dx,$$

d. h.

$$F(z; P_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos z r_k x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z r_k \cos\varphi)\, d\varphi = J_0(z r_k) \tag{62}$$

ist. Daß $X_N(\xi)$ bei jedem N eine stetige Funktion ist, wurde schon betont. Die kürzlich erschienenen Untersuchungen der Herren Bohr und

[13]) Man setze nur in (57) einen der beiden Exponenten gleich Null.

Jessen[14]) über die Riemannsche Zetafunktion legen die Frage nahe, ob auch die Verteilungsfunktion $X(\xi)$ von (1) stetig sein muß, was mit Rücksicht auf die Momentendarstellung (36) auf Grund eines Schoenbergschen Satzes[15]) entschieden werden könnte. [Zusatz bei der Korrektur: Da die partiellen Verteilungsfunktionen (39) stetige, in bezug auf den Nullpunkt symmetrische, rechts von dem Nullpunkt *konvexe* Funktionen sind und daher durch den sukzessiven Faltungsprozeß (60) nach bekannten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in *ebensolche* Funktionen übergeführt werden, so leuchtet die ausnahmslose Stetigkeit der monotonen Grenzfunktion (41) auf Grund des Helly-Blaschkeschen Auswahlsatzes unmittelbar ein.]

Daß die asymptotische Verteilungsfunktion nicht jeder fastperiodischen Funktion durchweg stetig ist, zeigt bereits das Beispiel jeder stetigen periodischen Funktion, die, ohne konstant zu sein, Konstanzstrecken hat. Hingegen kann als eine asymptotische Verschärfung des Bolzano-Weierstraßschen Zwischenwertsatzes über stetige Funktionen bewiesen werden, daß die asymptotische Verteilungsfunktion jeder reellwertigen fastperiodischen Funktion innerhalb des Intervalles

$$m \leqq \xi \leqq M, \tag{63}$$

wobei m bzw. M, wie in (31), die zu $-\infty < t < +\infty$ gehörige untere bzw. obere Grenze der fastperiodischen Funktion $x(t)$ bezeichnet, keine Konstanzstrecke aufweisen kann, d. h. daß die asymptotische „Wahrscheinlichkeitsdichte" von $x(t)$ innerhalb des Wertbereiches von $x(t)$ nirgends verschwindet. Diesen Satz habe ich loc. cit. [2]) aus dem matrizentheoretischen Zusammenhang erhalten. Man kommt aber in Anlehnung an die von Bohr[1]) beim Beweise des Eindeutigkeitssatzes der fastperiodischen Funktionen benutzten Schlußweise auch wie folgt durch:

Da die Funktion $x(t)$ fastperiodisch ist, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge

$$\ldots, l_{-1}^{\varepsilon}, l_0^{\varepsilon}, l_1^{\varepsilon}, \ldots \tag{64}$$

von reellen Zahlen $l_\nu = l_\nu^{\varepsilon}$ und eine von ν unabhängige Zahl $L = L_\varepsilon$ derart, daß einerseits

$$\lim_{\nu=-\infty} l_\nu^{\varepsilon} = -\infty, \quad \lim_{\nu=+\infty} l_\nu^{\varepsilon} = +\infty, \quad 0 < l_{\nu+1}^{\varepsilon} - l_\nu^{\varepsilon} < L_\varepsilon \tag{65}$$
$$(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

und andererseits

$$|x(t + l_\nu^{\varepsilon}) - x(t)| < \varepsilon \quad (-\infty < t < +\infty, \ -\infty < \nu < +\infty) \tag{66}$$

---

[14]) H. Bohr und B. Jessen, Acta Math. **54** (1930), S. 1ff.; **58** (1932), S. 1ff.

[15]) I. Schoenberg, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 761–767.

gilt. Ferner ist $x(t)$ der Fastperiodizität zufolge stetig. Es gibt daher zu jedem inneren Punkt ξ_0 des Wertbereiches (63) eine Zahl t_0 mit

$$x(t_0) = \xi_0, \tag{67}$$

und man kann dann zu jedem hinreichend kleinen $\delta > 0$ eine hinreichend kleine positive Zahl $\tau = \tau(\xi_0, t_0, \delta)$ derart bestimmen, daß

$$|x(t) - \xi_0| < \delta \qquad (t_0 - \tau < t < t_0 + \tau) \tag{68}$$

wird. Aus (66), (67) und (68) folgt $(\varepsilon = \delta)$

$$|x(t + l_\nu^\delta) - x(t_0)| < 2\delta \tag{69}$$

$$\text{für } t_0 - \tau < t < t_0 + \tau \text{ und } \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Vergleicht man nun (69) mit (65), so leuchtet es ein, daß die asymptotische Verteilungsfunktion in der Umgebung der Stelle (67) nicht konstant sein kann. Da aber (67) eine beliebige innere Stelle des Bereiches (63) war, so ist damit die Behauptung bewiesen.

(Eingegangen am 2. Mai 1932.)

Dynamische Systeme und unitäre Matrizen.

Von

Aurel Wintner in Baltimore.

Die Herren Carleman[1]) und Koopman[2]) haben unlängst gleichzeitig und voneinander unabhängig zwischen der Problematik konservativer dynamischer Systeme und der Theorie des Hilbertschen Raumes einen weitgehenden Zusammenhang gefunden. Herr Carleman stützt sich dabei auf seine Theorie der nicht beschränkten Hermiteschen Matrizen[3]), während Herr Koopman die Untersuchungen von Herrn Stone[4]) über unitäre Operatoren verwendet und sich eigentlich an die Schur-Weylsche Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen[5]) anschließt (nur daß dabei die „Vektoren" nicht in einem endlichdimensionalen, sondern in einem funktionalen Raum angesetzt sind). — Unabhängig von Herrn Stone und gleichzeitig mit ihm habe ich eine Spektraltheorie aller unitären Matrizen veröffentlicht[6]), die auf das Herglotzsche trigonometrische Momentenproblem basiert ist (meine Arbeit ist übrigens auch in dem von Herrn Koopman erwähnten Aufsatz des Herrn v. Neumann[7]) zitiert). Da meine Arbeit in Verbindung mit der Hilbert-Hellingerschen Theorie der beschränkten Hermiteschen Matrizen eine vollständige Transformations- bzw. Invariantentheorie der unitären

[1]) T. Carleman, Arkiv for Mat., Astr. och Fys. **22** (1931), B., Nr. 7.

[2]) B. O. Koopman, Proc. Nat. Acad. Wash. **17** (1931), S. 315–318.

[3]) T. Carleman, Sur les équations intégrales singulières, Uppsala, 1923.

[4]) M. H. Stone, Proc. Nat. Acad. Wash. **16** (1930), S. 173–174.

[5]) Vgl. F. Peter und H. Weyl, Math. Annalen **97** (1927), S. 737–755.

[6]) A. Wintner, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 268ff.

[7]) Math. Annalen **102** (1930), S. 377, Fußnote. — Im Zusammenhang mit dieser Fußnote sei hier auch bemerkt, daß die Spektraltheorie der beschränkten normalen Matrizen in derjenigen der unitären und der beschränkten Hermiteschen Matrizen, wie ich schon a. a. O. [6]) erwähnt habe, trivialerweise enthalten ist.

Man kann übrigens in *diesem* Rahmen für eine unitäre Invariantentheorie sogar beliebiger (also nicht normaler) beschränkter Matrizen gewisse Anhaltspunkte gewinnen; vgl. A. Wintner, Amer. Journ. of Math. **54** (1932), S. 145ff.

Matrizen geliefert hat[6]), scheint es wohl wünschenswert, den Koopmanschen Gedankengang im Rahmen der unitären *Matrizen* durchzuführen. Es versteht sich von selbst, daß man an Stelle von abstrakten unitären Operatoren auch mit unitären Matrizen auskommen können muß, da doch jeder unitäre Operator des Hilbertschen Raumes offenbar durch eine unitäre Matrix realisierbar ist, doch scheint mir der Übergang zu unitären Matrizen verschiedene (auch technische) Vorteile zu bieten. — Was die Herleitung der „canonical resolution of the identity" (in meiner Terminologie einfach: Spektralmatrix der unitären Matrix) anlangt, so läuft die Zugrundelegung meiner Methode, wie Herr Weyl[8]) hervorgehoben hat, auf die Betrachtung einer diskreten Abelschen Gruppe hinaus, die durch die ganzzahligen Potenzen des unitären Operators gebildet wird, während die Stonesche Behandlungsweise auf eine einparametrige kontinuierliche Gruppe basiert ist, in welche man die gegebene unitäre Matrix einzubetten hat. — Durch Darstellung des fraglichen Automorphismus (vgl. weiter unten) durch unitäre Matrizen wird übrigens die von mir im Anschluß an Herrn Toeplitz entwickelte Darstellung der Bohrschen fastperiodischen Funktionen durch beschränkte Matrizen[9]) in die allgemeine Dynamik eingeordnet, wie an anderer Stelle näher ausgeführt werden soll[10]). Die dynamischen Systeme mit fastperiodischer allgemeiner Lösung, wie z. B. die bedingtperiodischen Systeme der Separationstheorie und in dem charakteristischen nichtintegrierbaren Fall die grenzperiodischen Systeme von Herrn Birkhoff[11]), sind klassische Beispiele für dynamische Systeme, deren unitäre Matrix von prinzipiellem Interesse ist (vgl. S. 637 weiter unten). Im Zusammenhang mit der Matrizendarstellung[9]) der fastperiodischen Funktionen erkennt man am besten[12]) den engen Anschluß an die Schur-Weylsche Theorie, den ich oben (S. 630) angedeutet habe. — Dementsprechend müssen wir uns auf einen grundlegenden Begriff jener Theorie stützen, d. i. die (unter dem Automorphismus) „invariante Volummessung" [5]).

Auf einer N-dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit Ω sei eine einparametrige Gruppe von eineindeutigen Transformationen G_t von Ω in sich definiert; $-\infty < t < +\infty$. Die Mannigfaltigkeit Ω soll mit einer Volummessung $d\Omega$ derart ausgestattet sein, daß das Gesamtvolumen von Ω endlich ist und daß die Volummessung unter dem Automorphismus G_t invariant bleibt:

$$G_t\, d\Omega = d\Omega; \qquad -\infty < t < +\infty, \tag{1}$$

[8]) H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2. Auflage (1931).
[9]) A. Wintner, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 290ff.
[10]) In diesem Zusammenhang vgl. auch B. O. Koopman, a. a. O. [2]), S. 318.
[11]) G. D. Birkhoff, Acta Math. **50** (1927), S. 359–379.
[12]) H. Weyl, Math. Annalen **97** (1927), S. 338ff.

wobei rechter Hand das Volumen eines beliebigen Raumelementes von Ω, linker Hand aber das Volumen desjenigen Raumelementes von Ω gemeint ist, in welches das erste Raumelement vermöge der Transformation G_t von Ω übergeht. Die Gruppe G_t ist offenbar zyklisch:

$$G_{t_1} G_{t_2} = G_{t_1+t_2}, \tag{2}$$

und es kann angenommen werden, daß die identische Transformation zum Parameterwert $t = 0$ gehört:

$$E = G_0. \tag{3}$$

Ein Punkt der N-dimensionalen Mannigfaltigkeit Ω möge durch x, der Punkt von Ω, in welchen x vermöge des Automorphismus G_t von Ω übergeht, durch

$$x_t = G_t x \qquad (x_0 = x;\ \text{vgl. (3)}) \tag{4}$$

bezeichnet werden. Es bedeute $f(x)$ eine auf Ω meßbare, samt ihrem Quadrat im Lebesgueschen Sinn integrierbare, eindeutige Funktion auf Ω, kurz eine Funktion der Klasse L^2. Alle später vorkommenden Integrale sind auf das Vollgebiet Ω erstreckt zu denken. Durch die Transformation (4) von Ω geht $f(x)$ in eine andere Funktion $G_t f(x)$ des Ortes x auf Ω über, die im Einklang mit (4) durch $f_t(x)$ bezeichnet werden soll:

$$f(x_t) = f(G_t x) = G_t f(x) = f_t(x). \tag{5}$$

Wir setzen voraus, daß zugleich mit $f(x)$ auch $f_t(x)$ stets von der Klasse L^2 ist. Wir wollen nämlich annehmen, daß die eineindeutige Transformation (4) von Ω in sich stetig ist (und zwar sogar in dem Gebiet $(x; t)$ von $N+1$ Dimensionen), und bei Anwendungen auf die Dynamik können sogar Analytizitätsannahmen gemacht werden. Da nach (3) und (5)

$$f(x) = f_0(x) \tag{6}$$

ist, so können wir also sagen, daß $f_t(x)$ bei jedem t eine Funktion der Klasse L^2 sein wird, wenn dies für $t = 0$ der Fall war. Insbesondere gilt für jedes Paar $f(x), g(x)$ von Funktionen der Klasse L^2 die Identität

$$\int f(G_t x)\, g(x)\, d\Omega = \int g(G_{-t} x)\, f(x)\, d\Omega \qquad \left(\int = \int_{\Omega}\right), \tag{7}$$

die man erhält, wenn man vermöge (4) neue Variablen einführt und dabei die Invarianz (1) der Volummessung unter der Transformation (4) sowie den Umstand beachtet, daß wegen (2) und (3) die zu G_t inverse Transformation einfach G_{-t} ist.

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein reellwertiges normiertes und vollständiges Orthogonalsystem auf Ω, also

$$\int f(x)\, g(x)\, d\Omega = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int f(x)\, \varphi_j(x)\, d\Omega\right)\left(\int g(x)\, \varphi_j(x)\, d\Omega\right). \tag{8}$$

Bezeichnet $\{\psi_n(x)\}$ ein anderes ebensolches Funktionensystem und multipliziert man die unendliche Matrix

$$\| \int \psi_n(G_{-t}x)\,\varphi_m(x)\,d\Omega \| \tag{9}$$

rechts mit ihrer transponierten Matrix, so erhält man

$$\Big\| \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\int \psi_n(G_{-t}x)\,\varphi_j(x)\,d\Omega \Big) \Big(\int \psi_m(G_{-t}x)\,\varphi_j(x)\,d\Omega \Big) \Big\|,$$

d. h. wegen (8)

$$\| \int \psi_n(G_{-t}x)\,\psi_m(G_{-t}x)\,d\Omega \|,$$

also, wenn man vermöge der zu (4) inversen Transformation neue Integrationsvariablen einführt und dabei die Invarianteneigenschaft (1) beachtet, einfach

$$\| \int \psi_n(x)\,\psi_m(x)\,d\Omega \|,$$

d. h. die Einheitsmatrix $\| \delta_{nm} \| = \mathfrak{E}$, die sich freilich ergibt, auch wenn man die reelle Matrix (9) nicht von rechts, sondern von links mit ihrer transponierten Matrix multipliziert. Mithin ist (9), also insbesondere ($\varphi = \psi$)

$$\mathfrak{U}_t = \| \int \varphi_n(G_{-t}x)\,\varphi_m(x)\,d\Omega \| \tag{10}$$

oder

$$\mathfrak{V}_t = \| \int \psi_n(G_{-t}x)\,\psi_m(x)\,d\Omega \|, \tag{11}$$

eine unitäre Matrix.

Die Transformation G_t, durch welche die Funktion $f(x)$ der Klasse L^2 in die [wie bei (6) erwähnt, gewiß zu L^2 gehörige] Funktion (5) übergeht, ist mit Rücksicht auf den Fischer-Rieszschen Satz völlig gleichwertig mit der Transformation, die den Vektor

$$\mathfrak{f} = \Big\{ \int f(x)\,\varphi_1(x)\,d\Omega,\ \int f(x)\,\varphi_2(x)\,d\Omega, \ldots \Big\} \tag{12}$$

des Hilbertschen Raumes[13]) in den Vektor

$$\mathfrak{f}_t = \Big\{ \int f_t(x)\,\varphi_1(x)\,d\Omega,\ \int f_t(x)\,\varphi_2(x)\,d\Omega, \ldots \Big\} \tag{13}$$

überführt [der mit Rücksicht auf die bei (6) gemachte Bemerkung ebenfalls ein Vektor des Hilbertschen Raumes ist]. *Diese Transformation des Vektors* (12) *in den Vektor* (13) *wird nun durch eine — von* (6) *unabhängige — unitäre* (also gewiß beschränkte) *Matrix, nämlich durch* (10) *geliefert*:

$$\mathfrak{f}_t = \mathfrak{U}_t \mathfrak{f}_0 \qquad (\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{f};\ \text{vgl. (6)}). \tag{14}$$

---

[13]) Unter dem Hilbertschen Vektorraum ist dabei die Gesamtheit derjenigen unendlichen Zahlenfolgen $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ zu verstehen, für welche die Reihe $\sum |\xi_j|^2$ konvergent ist.

Die n-te Komponente des Vektors, in welchen (12) durch (10) transformiert wird, ist nämlich

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int \varphi_n(G_{-t}x)\,\varphi_j(x)\,d\Omega\right)\left(\int f(x)\,\varphi_j(x)\,d\Omega\right),$$

also nach (8) einfach

$$\int \varphi_n(G_{-t}x)\,f(x)\,d\Omega,$$

d. h. nach (7)

$$\int f(G_t x)\,\varphi_n(x)\,d\Omega,$$

was aber wegen (5) mit der n-ten Komponente des Vektors (13) übereinstimmt. — Freilich ist die einparametrige Schar $\mathfrak{U}_t$ von unitären Matrizen, die wegen (2) eine zyklische Gruppe bilden:

$$\mathfrak{U}_{t_1}\mathfrak{U}_{t_2}=\mathfrak{U}_{t_1+t_2};\qquad \mathfrak{U}_0=\mathfrak{E}\qquad (\text{vgl. (3)}),\tag{15}$$

durch den Automorphismus G_t von Ω noch nicht eindeutig bestimmt, da doch in die Definitionsgleichung (10) außer G_t auch das an sich willkürlich wählbare Orthogonalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ eingeht. Doch läuft diese Unbestimmtheit ausschließlich auf die Willkürlichkeit der Orientierung des kartesischen Achsenkreuzes[14]) hinaus. Man rechnet nämlich durch wiederholte Anwendung der Vollständigkeitsrelation leicht nach, daß die Matrix (10) durch die (wie wir wissen, ebenfalls reell-unitäre) Matrix (9) in (11) transformiert wird. Übrigens ist die Inkompressibilitätsbedingung (1) mit Rücksicht auf die Vollständigkeitsrelation auch notwendig dafür, daß die Transformation unitär ist.

Eine beschränkte Hermitesche Matrix $\mathfrak{H}$ nenne ich *reduziert*, wenn ihr Spektrum eine (nicht notwendig echte) Teilmenge des abgeschlossenen Intervalles $0 \leqq \lambda \leqq 2\pi$ ist, dessen oberer Endpunkt $\lambda = 2\pi$ aber nicht zum Punktspektrum $\mathfrak{H}$ gehört. Der Hauptsatz der Theorie der unitären Matrizen besagt [6]), daß durch die Formel

$$\mathfrak{U}=\exp(i\mathfrak{H})\tag{16}$$

die Mannigfaltigkeit aller reduzierten Hermiteschen Matrizen auf die Mannigfaltigkeit aller unitären Matrizen eineindeutig bezogen wird, wobei die Exponentialmatrix einfach durch die ständig konvergente Potenzreihe der Exponentialfunktion zu erklären ist. — Erst recht würde man alle unitären Matrizen erhalten, wenn $\mathfrak{H}$ in (16) die Mannigfaltigkeit nicht nur der reduzierten, sondern aller beschränkten Hermiteschen Matrizen durchläuft, doch würde dabei die umkehrbare Eindeutigkeit der Parameterdarstellung der unitären Matrizen verloren gehen. Dem entspricht es, daß die von Herrn Koopman verwendete "canonical resolution of the identity" überflüssige Bestandteile enthält, die in Wirklichkeit bei den Stieltjesschen

[14]) Vgl. hierzu Fußnote [13]).

Integrationen in Wegfall kommen, wenigstens wenn man sich auf ganzzahlige Werte des Zeitparameters beschränkt.

Die mit dem Automorphismus G_t von Ω gleichwertige unitäre Matrix ist nach (10) eine Funktion von t, also ist es auch die zu (10) vermöge (16) eindeutig zugeordnete reduzierte Hermitesche Matrix, die wir daher durch $\mathfrak{H}_t$ zu bezeichnen haben:

$$\mathfrak{U}_t = \exp(i\mathfrak{H}_t); \quad -\infty < t < +\infty. \tag{17}$$

Mit $\mathfrak{H}$ (ohne Index) soll von nun an die zu $t=1$ gehörige reduzierte Matrix bezeichnet werden:

$$\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}_t)_{t=1}. \tag{18}$$

Dann läge es nahe, wie folgt zu schließen: „Es gilt

$$\mathfrak{U}_t = \exp(it\mathfrak{H}); \quad -\infty < t < +\infty, \tag{19}$$

aus (17) und (19) folgt aber *nicht*, daß $\mathfrak{H}_t = t\mathfrak{H}$ für alle t gilt. Um dies einzusehen, beachte man zunächst, daß die Funktionalgleichung (15) vermöge (17) in

$$\exp(i\mathfrak{H}_{t_1})\exp(i\mathfrak{H}_{t_2}) = \exp(i\mathfrak{H}_{t_1+t_2}); \quad \exp(i\mathfrak{H}_0) = \mathfrak{E} \tag{15'}$$

übergeht. Nach Herrn Stone [4]) folgt daher [vgl. dabei [6])]

$$\mathfrak{H}_\tau = \tau\mathfrak{H} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau \leqq 1. \tag{20}$$

In der Tat gehört zu einer unitären Matrix nur *ein* reduzierter Exponent; nun ist aber $\mathfrak{H}_t$ bei jedem t, also auch für $t=1$, eine reduzierte Matrix, also ist es wegen (18) auch $\tau\mathfrak{H}$, sofern $0 \leqq \tau \leqq 1$ vorausgesetzt wird (das Spektrum von $t\mathfrak{H}$ ergibt sich nämlich aus demjenigen von $\mathfrak{H}$ durch Streckung im Verhältnis $1:t$, wobei der Nullpunkt der Spektrumsgerade der Fixpunkt ist). Wegen (17) und (20) gilt

$$\mathfrak{U}_\tau = \exp(i\tau\mathfrak{H}); \quad 0 \leqq \tau \leqq 1. \tag{21}$$

Andererseits folgt aus (15) für ganzzahlige Werte von t die Beziehung $\mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}_1^k$, wobei das k rechter Hand ein Exponent ist und $\mathfrak{U}_1 = (\mathfrak{U}_\tau)_{\tau=1}$ mit Rücksicht auf (21) in der Gestalt $\exp(i\mathfrak{H})$ geschrieben werden kann[15]), so daß also

$$\mathfrak{U}_k = \exp(ik\mathfrak{H}); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{22}$$

gilt. Setzt man nun bei beliebigem t

$$t = k + \tau; \quad k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 1), \quad 0 \leqq \tau < 1,$$

so folgt aus (15), (21) und (22)

$$\mathfrak{U}_t = \mathfrak{U}_k\,\mathfrak{U}_\tau = \exp(ik\mathfrak{H})\exp(i\tau\mathfrak{H}) = \exp(i[k+\tau]\mathfrak{H}) = \exp(it\mathfrak{H}),$$

womit (19) bewiesen ist. Demnach kann die kontinuierliche Gruppe G_t

[15]) $\tau = 1$ ist doch in (21) noch erlaubt. — Wir werden (21) gleich auch für $0 \leqq \tau < 1$ in Anspruch nehmen.

durch die von t unabhängige reduzierte Matrix (18) charakterisiert werden". In Wirklichkeit steht es aber nicht fest, daß die rechte Seite der Gleichung (19) auch für nicht ganzzahlige Werte des Zeitparameters mit der a priori gegebenen linken Seite tatsächlich übereinstimmt, so daß wir die Existenz eines allgemein gültigen Hermiteschen Faktors direkt aus der Theorie von Herrn Stone übernehmen müßten. Um dies zu vermeiden, wollen wir uns in vollem Einklang mit klassischen Untersuchungen von Poincaré, Levi-Civita und Birkhoff von nun an auf ganzzahlige Werte des Zeitparameters beschränken. Übrigens ist (18) nicht eine ganz beliebige reduzierte Matrix, da doch die unitären Matrizen (10) bei unseren Annahmen reell sind. Die Mannigfaltigkeit der reduzierten Hermiteschen Matrizen, die vermöge der eineindeutigen Parameterdarstellung (16) zu *reellen* unitären (d. h. orthogonalen) Matrizen gehören, ist durch Herrn Martin in seiner bei mir entstandenen Dissertation bestimmt worden[16]). —

Bezeichnet $a(z)$ eine der Einfachheit halber ganze Funktion der Veränderlichen z, so daß also die Matrix $a(\mathfrak{H})$ bei jeder beschränkten Matrix $\mathfrak{H}$ direkt, durch eine ständig konvergente Potenzreihe erklärbar ist, so besitzt die Spektralmatrix

$$\|\sigma_{nm}(\lambda)\|; \qquad -\infty < \lambda < +\infty$$

der beschränkten Hermiteschen Matrix $\mathfrak{H}$ nach Hilbert die kennzeichnende Eigenschaft, daß für jedes $a(z)$ die „Momentenbedingung"

$$a(\mathfrak{H}) = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda)\, d\sigma_{nm}(\lambda) \right\|$$

erfüllt ist[17]). Setzt man hier insbesondere

$$a(z) = \exp(i\,t\,z),$$

wobei die Zahl t einen beliebigen festen Wert hat, so folgt wegen (19)

$$\mathfrak{U}_t = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, d\sigma_{nm}(\lambda) \right\|; \qquad -\infty < t < +\infty. \tag{23}$$

Da unsere Matrix (18) reduziert ist, d. h. in ihrem Spektrum keinen Punkt der beiden Halbgeraden $\lambda < 0$, $\lambda > 2\pi$ und dabei den Punkt $\lambda = 2\pi$ nicht in ihrem (eventuellen) Punktspektrum enthält, so sind die Elemente $\sigma_{nm}(\lambda)$ ihrer Spektralmatrix sowohl für $\lambda < 0$ als auch für $\lambda > 2\pi$ unabhängig von λ und außerdem für $\lambda = 2\pi$ gewiß stetig[17]). Dies besagt aber, daß (23) sich auf

$$\mathfrak{U}_t = \left\| \int_{0-0}^{2\pi-0} e^{it\lambda}\, d\sigma_{nm}(\lambda) \right\|; \qquad -\infty < t < +\infty \tag{24}$$

reduziert.

---

[16]) M. Martin, Amer. Journ. of Math. **54** (1932), S. 579–631.

[17]) Vgl. etwa a. a. O. [6]).

In dem speziellen Fall, daß (18) kein Streckenspektrum besitzt, geht (24) in

$$\mathfrak{U}_t = \| \sum_{\nu} e^{i\lambda_\nu t} \Delta_\nu \sigma_{nm} \|; \qquad -\infty < t < +\infty \tag{25}$$

über, wobei $\Delta_\nu \sigma_{nm}$ den Sprung von $\sigma_{nm}(\lambda)$ an der Stelle $\lambda = \lambda_\nu$ bezeichnet und λ_ν das (eventuell überall dichte) Punktspektrum von (18) durchläuft. Mithin sind dann (und offenbar nur dann) die Elemente der Matrix $\mathfrak{U}_t$ im eigentlichen Bohrschen Sinne fastperiodische Funktionen von t, da doch die Funktion $\sigma_{nm}(\lambda)$ stets von beschränkter Schwankung ist, also die Summe ihrer Sprünge absolut konvergent sein muß.

Kennt man einmal die Matrix (18) und damit (25) bzw. (24), so bestimmen sich die Komponenten (19) des zeitabhängigen, unbekannten Vektors (13) aus den bekannten Komponenten des zu $t = 0$ gehörigen Anfangszustandes (12) vermöge der in bezug auf die Unbekannten aufgelösten linearen Gleichungen (14); der Fischer-Rieszsche Satz liefert dann aus (13) die Funktion $f_t(x)$ selbst.

Zur Orientierung betreffs der Anwendung auf die Dynamik sei noch folgendes erwähnt[18]): Von Wichtigkeit ist vor allem der Fall, daß der an sich willkürliche „Anfangszustand" $f(x) = x$, d. h. der Anfangszustand einer Koordinate bzw. eines Impulses ist; dann gehört $f(x)$ gewiß zur Klasse L^2. Vorausgesetzt ist dabei, daß es sich z. B. um ein kanonisches konservatives System handelt und daß die Energiekonstante einen Wert besitzt, bei welchem die Energiefläche bei passender Wahl der Variablen etwa singularitätenfrei ist und ein endliches Stück des Phasenraumes umschließt. Die Mannigfaltigkeit Ω (vgl. S. 631) ist dann einfach diese Energiefläche und der Automorphismus G_t die durch die Differentialgleichungen gelieferte zeitabhängige eineindeutige Transformation der Energiefläche in sich, so daß die invariante Volummessung (1) nach der Theorie der Integralinvarianten kanonischer Systeme von vornherein festgelegt ist[19]). Haben die Bewegungsgleichungen reelle Singularitäten, so hat man sie vorher im Sinne von Thiele zu regularisieren. Die Herstellung von G_t [oder von $\mathfrak{U}_t$, d. h. von (18) bzw. $\| \sigma_{nm}(\lambda) \|$] läuft freilich meist auf die Herstellung der allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichungen hinaus. Übrigens wird durch den Koopmanschen Ansatz dem ganzen isoenergetischen Phasenraum nur ein einziges, d. h. von den Integrationskonstanten unabhängiges Frequenzspektrum zugeordnet, was dessen dynamische Realität in Frage ziehen könnte.

---

[18]) Vgl. B. O. Koopman, a. a. O. [2]).

[19]) Vgl. etwa T. Levi-Civita, Hamb. Abh. 6 (1928), S. 323 ff.

(Eingegangen am 4. Juli 1932.)

Bemerkung zum Eindeutigkeitssatz der Laplaceschen Transformierten.

Von

Aurel Wintner in Baltimore.

Nach einem für die Theorie der Laplaceschen Transformation grundlegenden Satz kann eine etwa für $\Re(z) \geqq 0$ absolut konvergenten Laplacesche Unterfunktion[1]) $L(z)$ nur dann in allen Punkten der *äquidistanten* Folge

$$z = n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

verschwinden, wenn die (stetige) Oberfunktion[1]) und daher auch $L(z)$ selbst identisch verschwindet. Der Beweis beruht nach Lerch[2]) auf dem Weierstraßschen Approximationssatz. Im nachstehenden soll darauf hingewiesen werden, daß die recht spezielle, nämlich *arithmetisch scharfe* Nullstellenbedingung (1) ohne weiteres durch die allgemeinere:

$$z = \nu_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

ersetzt werden kann, wobei die Nullstellenfolge

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots \nu_n \to +\infty \tag{3}$$

nur der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\nu_n} = +\infty \tag{4}$$

zu genügen hat. Es genügt also z. B., daß $L(z)$ für alle Primzahlen verschwindet. Doch soll die Ganzzahligkeit der ν_n nicht vorausgesetzt werden.

[1]) G: Doetsch, Math. Annalen 89 (1923), S. 194ff.

[2]) M. Lerch, Acta Math. 27 (103), S. 345ff.; vgl. E. Landau, Rend. Palermo 25 (1908), S. 337ff.

Wir gehen aus von dem folgenden Satz von Herrn Müntz[3]): Damit die Zahlenfolge (3) die Eigenschaft hat, daß es zu jeder für $0 \leqq x \leqq 1$ erklärten stetigen Funktion $f(x)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine lineare Verbindung

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^{\nu_n}; \qquad c_n = c_n(\varepsilon; f), \quad N = N(\varepsilon; f) \tag{5}$$

der Potenzen

$$1 = x^{\nu_0},\ x^{\nu_1},\ x^{\nu_2}, \ldots \qquad (x^{\nu_n} \geqq 0,\ 0 \leqq x \leqq 1) \tag{6}$$

gibt derart, daß

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \qquad 0 \leqq x \leqq 1 \tag{7}$$

wird, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingung (4) erfüllt ist. — Wir benötigen nur die zweite Hälfte dieses Satzes, in der der Weierstraßsche Approximationssatz enthalten ist ($\nu_n = n$).

Es läßt sich zunächst folgendes behaupten: Ist $\psi(x)$ eine für $0 \leqq x \leqq 1$ erklärte einseitig stetige Funktion von beschränkter Schwankung derart, daß für alle n

$$\int_0^1 x^{\nu_n}\, d\psi(x) = 0 \qquad (x^{\nu_n} \geqq 0) \tag{8}$$

gilt, wobei die Folge (3) der Bedingung (4) genügt, so ist

$$\psi(x) \equiv \psi(0); \qquad 0 \leqq x \leqq 1. \tag{9}$$

Man setze nämlich

$$\Lambda(g(x)) = \int_0^1 g(x)\, d\psi(x), \tag{10}$$

so daß (8) in $\Lambda(x^{\nu_n}) = 0$ übergeht. Aus (5) und (10) folgt daher $\Lambda(P(x)) = 0$, also wegen (7) offenbar auch $\Lambda(f(x)) = 0$, wobei $f(x)$ eine willkürliche, für $0 \leqq x \leqq 1$ erklärte stetige Funktion bedeutet. Setzt man insbesondere $f(x) = x^n$, so folgt, daß alle (zu dem *endlichen* Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gehörigen) Stieltjesschen Momente von $\psi(x)$ verschwinden, womit (9) bekanntlich[4]) bewiesen ist[5]).

Der weitere Teil des Beweises für die Hinlänglichkeit der Bedingungen (3) und (4) verläuft wie in dem äquidistanten Spezialfall, nämlich wie folgt: Ist $\varphi(t)$ eine einseitig stetige Funktion von beschränkter Schwankung in dem Bereich $0 \leqq t < +\infty$, so ist $\varphi(-\log x)$ offenbar eine ebensolche Funktion in dem Bereich $0 \leqq x \leqq 1$ und umgekehrt. Mithin geht das Integral

[3]) Ch. H. Müntz, Festschrift für H. A. Schwarz, Berlin, 1914, S. 303–312.

[4]) Siehe z. B. F. Haußdorf, Math. Zeitschrift **16** (1923), S. 222–223.

[5]) Vgl. hierzu F. Riesz, Ann. de l'Éc. Norm. Sup. (3) **28** (1911), S. 51ff.

$$L(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\, d\varphi(t); \quad \Re(z) \geqq 0 \tag{11}$$

durch Variablenvertauschung in ein Integral $A(x^z)$ über, wobei die Bezeichnung (10) benutzt wird. Gilt also $L(z) = 0$ für jedes $z = \nu_n$, so ist die Bedingung (8) erfüllt, es gilt daher (9), also offenbar auch

$$\varphi(t) \equiv \varphi(0); \quad 0 \leqq t < +\infty, \tag{12}$$

d. i. der Eindeutigkeitssatz.

Aus dem Beweis ist übrigens mit Rücksicht auf die bisher nicht benutzte erste Hälfte des Müntzschen Satzes leicht zu erkennen, daß die Bedingung (4) von (12) nicht weiter verschärft werden kann, sofern man sich auf reelle Nullstellen beschränkt.

(Eingegangen am 17. Juni 1932.)

Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis.

Der von Herrn Domherrn Dr. Dr. Ing. Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig gestiftete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der Mathematischen Wissenschaften“ in Höhe von RM. 500.— ist für das Jahr 1932 durch das Preisgericht je zur Hälfte Herrn Prof. Dr. Emil Artin in Hamburg und Frl. Prof. Dr. Emmy Noether in Göttingen für ihre gesamten wissenschaftlichen Leistungen zuerkannt worden.

Über die Niveaukurven logarithmischer Flächenpotentiale.

Von

Władysław Nikliborc in Lwów (Lemberg)*), z. Zt. in Leipzig.

---

1. Es sei S eine geschlossene, konvexe Kurve, T das durch S begrenzte Gebiet, $V(P)$ das von T herrührende Flächenpotential

$$V(P) = \int_T \log \frac{1}{r_{PM}} d\sigma_M .$$

Die Herren Banach und Stożek haben einst die Frage gestellt, *ob die Niveaukurven der Funktion* $V(P)$ (d. h. die durch die Gleichung $V(x, y) = \text{konst.}$ erklärten Kurven) *auch konvex seien.*

In den folgenden Zeilen wird ein Satz bewiesen, der diese Frage (im bejahenden Sinne) teilweise löst, zum Teil aber viel weiter reicht.

Es sei nämlich eine beliebige endliche Anzahl beschränkter Gebiete T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, deren Gesamtheit mit T bezeichnet wird, gegeben. Es sei weiter $f(M)$ eine in T nicht identisch verschwindende[1]), nichtnegative, integrable Funktion. Wir betrachten das Flächenpotential

$$V(P) = \int_T f(M) \log \frac{1}{r_{PM}} d\sigma_M .$$

Es sei P ein beliebiger, im Außengebiete von T liegender Punkt. Wir betrachten die Stützgeraden von T, die durch P gehen, bezeichnen mit φ denjenigen von den beiden Stützgeraden durch P eingeschlossenen Winkel, in welchem T liegt. φ wird der Winkel, unter welchem T vom Punkte P aus gesehen wird, genannt. Wir betrachten weiter den geometrischen Ort C derjenigen Punkte, von welchen aus T unter dem

---

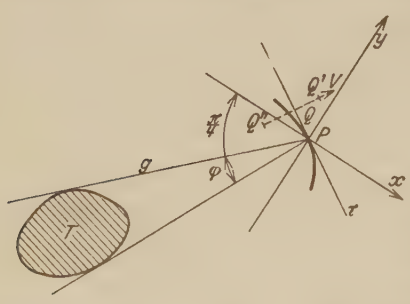
*) International Education Board Fellow (Rockefeller Foundation).

[1]) Darunter wird verstanden, daß das Maß der Menge $E(f > 0)$ positiv ist.

Winkel von 45 Grad gesehen wird. Wie leicht festzustellen ist, ist C eine geschlossene, doppelpunktlose Kurve. Demnach teilt sie die Ebene in ein inneres und in ein äußeres Gebiet.

Wir betrachten nun diejenigen Niveaukurven, die ganz in diesem Außengebiete verlaufen. (Dies trifft für die Kurve $V(x, y) = c$ stets zu, sobald $c < c_0$ ist, unter c_0 eine bestimmte Zahl verstanden.) Wir behaupten, *daß alle diese Kurven konvex sind.*

2. Um dies zu beweisen, betrachten wir einen beliebigen Punkt P, welcher in dem Außengebiet von C liegt. Es sei g eine der beiden durch P gezogenen Stützgeraden von T. Offenbar ist der Winkel φ, unter welchem T aus P gesehen wird, kleiner als $\frac{\pi}{4}$.



Wir legen jetzt ein rechtwinkliges Koordinatensystem durch P als Koordinatenursprung derart, daß die x-Achse mit g den Winkel von 45 Grad einschließt; dabei wählen wir als x-Achse nur diejenige dieser Geraden, welche durch diejenige Drehung der Geraden g um P entsteht, bei der T mit g keine gemeinsamen Punkte besitzt. (Vgl. Figur.)

Demnach besitzt auch die x-Achse mit T keine gemeinsamen Punkte. Das gleiche gilt natürlich für die y-Achse, da ja $\varphi < \frac{\pi}{4}$ ist. Bei entsprechender Orientierung der Achsen gilt offenbar $\xi < 0$, $\eta < 0$ für jeden Punkt (ξ, η) von T. Aber noch mehr! Die Gerade g ist eine Stützgerade von T; ihre Gleichung lautet offenbar $\eta - \xi = 0$, so daß $\eta - \xi$ für alle (ξ, η) in T ein konstantes Vorzeichen besitzt. Wenn insbesondere die Achsen so gerichtet sind, wie wir es auf der Figur dargestellt haben, gilt $\eta - \xi \leqq 0$ für alle Punkte von T.

3. Es gelten offenbar im Außengebiet von T die folgenden Formeln:

$$V_x = -\int_T f(M)\frac{x-\xi}{r^2}\,d\sigma, \qquad V_y = -\int_T f(M)\frac{y-\eta}{r^2}\,d\sigma,$$

$$V_{xx} = +\int_T f(M)\frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{r^4}\,d\sigma, \qquad V_{yy} = \int_T f(M)\frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{r^4}\,d\sigma,$$

$$V_{xy} = 2\int_T f(M)\frac{(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^4}\,d\sigma,$$

die im Koordinatenursprung P die vereinfachte Gestalt

$$V_x = \int_T f(M) \frac{\xi}{r^2} d\sigma, \qquad V_y = \int_T f \frac{\eta}{r^2} d\sigma,$$

$$V_{xx} = \int_T f \frac{\xi^2 - \eta^2}{r^4} d\sigma, \qquad V_{yy} = \int_T f \frac{\eta^2 - \xi^2}{r^4} d\sigma, \qquad V_{xy} = 2 \int_T f \frac{\xi \eta}{r^4} d\sigma$$

nnehmen.

Es bezeichne jetzt Γ die durch P gezogene (eindeutig bestimmte) iveaukurve $V(P)$. Da $V(P)$ in der Nachbarschaft von P regulär har- onisch ist, und da weiter wegen (1) in P

$$V_x < 0, \qquad V_y < 0$$

lt, so ist Γ eine in der Umgebung von P regulär analytische Kurve

$$x = x(s), \qquad y = y(s),$$

e im Punkte P eine wohlbestimmte Tangente τ besitzt. Wir wollen jetzt ₍weisen, daß diese Kurve die Tangente τ im Punkte P nicht schneidet, ₍ß also alle Punkte der Kurve (3), die in einer gewissen Nachbarschaft ₍n P liegen, sich auf einer Seite der Tangente τ befinden.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst, daß wegen (2) und

$$V_x \cdot x'(s) + V_y \cdot y'(s) = 0$$

(s) und $y'(s)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen. Hieraus folgt ₍er offenbar, daß τ in solchen zwei Quadranten der Ebene liegt, in welchen und η entgegengesetzte Vorzeichen besitzen (vgl. die Figur)[2]. Wir be- ₍achten nun einen beliebigen Punkt Q auf τ und die in diesem Punkte ₍f τ senkrecht stehende Gerade ν. Als positive Richtung von ν definieren ₍r diejenige, welche in die von τ bestimmte, T nicht enthaltende Halb- ₍ene, weist. Bezeichnet man dann, wie üblich, mit $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ die in der positiven ₍ichtung von ν berechnete Ableitung der Funktion V, so ist offenbar

$$\frac{\partial V(Q)}{\partial \nu} < 0,$$

₍il T ganz auf einer (und zwar der „negativen") Seite von τ liegt. Be- ₍ichnet man also mit Q' und Q'' zwei genügend nahe bei Q gelegene ₍nkte der Geraden ν, wobei noch Q' auf der „positiven" und Q'' auf ₍r „negativen" Halbgeraden gewählt werden soll, so besteht offenbar die ₍gleichheit

$$V(Q'') > V(Q) > V(Q').$$

[2]) τ hat also mit T keine gemeinsamen Punkte.

Wir betrachten nunmehr die Werte des Potentials V auf der Geraden τ und machen die folgende Annahme: V, auf der Geraden τ betrachtet, besitzt in P ein Extremum. Daß diese Annahme stets zutrifft, werden wir erst weiter unten beweisen; vorläufig aber wollen wir aus ihr für uns wichtige Schlüsse ziehen.

Es möge etwa V auf τ betrachtet ein Maximum in P besitzen. Dann ist für alle in einer gewissen Umgebung von P gelegenen Punkte Q (auf τ) $V(Q) \leqq V(P)$.

Wegen (4) müssen mithin alle in der nächsten Umgebung von P gelegenen Punkte der Niveaukurve $V = V(P)$ auf derselben Seite von τ liegen, und zwar, wie man leicht sieht, auf der „negativen" Seite von τ.

Demnach sind wir unter obiger Voraussetzung zum folgenden Resultat gelangt:

Besitzen die längs der Geraden τ betrachteten Werte des Potentials V im Punkte P tatsächlich ein Extremum, so kann Γ die Tangente τ im Punkte P nicht schneiden, liegt also, in der nächsten Umgebung von P ganz auf einer ihrer Seiten. Somit ist P kein Wendepunkt von Γ.

4. Wir wollen jetzt die Annahme, unter welcher wir unser Ergebnis abgeleitet haben, beweisen.

Die Gleichungen von τ sind

$$x = t\cos\alpha, \qquad y = t\sin\alpha.$$

Hierbei bedeutet t die Entfernung des laufenden Punktes (x, y) von P und α den Winkel, welchen τ mit der x-Achse einschließt. Wir setzen

$$v(t) = V(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha). \tag{5}$$

Offenbar ist $v(t)$ eine regulär analytische Funktion, die wir daher in die Taylorsche Reihe

$$v(t) = v(0) + \frac{v'(0)}{1!}t + \frac{v''(0)}{2!}t^2 + \dots$$

entwickeln können.

Nun stellt aber τ gerade eine Tangente zur Niveaukurve dar, so daß $v'(0) = 0$ unmittelbar folgt. Unsere Annahme wird also bewiesen, sobald es uns $v''(0) \neq 0$ zu zeigen gelingt.

Setzen wir nun in die aus (5) folgenden Formeln

$$v'(t) = V_x\cos\alpha + V_y\sin\alpha, \qquad v''(t) = V_{xx}\cos^2\alpha + 2V_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + V_{yy}\sin^2\alpha \tag{6}$$

$t = 0$ ein, und berücksichtigen, daß $v'(0) = 0$ ist, so erhalten wir

$$kV_x^{(0)} = \sin\alpha, \qquad kV_y^{(0)} = -\cos\alpha, \tag{7}$$

unter k ein Proportionalitätsfaktor verstanden. (Mit $V_x^{(0)}$, $V_y^{(0)}$ werden die Werte von V_x, V_y im Punkte P $(t = 0)$ bezeichnet; dasselbe gilt für die

veiter unten auftretenden Bezeichnungen $V_{xx}^{(0)} \ldots .$) Es ist (und zwar vegen (2)) $k \neq 0$. Die Beziehung (6) liefert uns also

$$v''(0) = k^2 \{V_{xx}^{(0)} \cdot V_y^{(0)\,2} - 2V_{xy}^{(0)} V_x^{(0)} V_y^{(0)} + V_{yy}^{(0)} V_x^{(0)\,2}\}.$$

Veil aber die Funktion $V(x, y)$ regulär harmonisch ist, gilt nun

$$V_{xx}^{(0)} + V_{yy}^{(0)} = 0,$$

voraus

8) $$v''(0) = k^2 \{V_{xx}^{(0)} (V_y^{(0)\,2} - V_x^{(0)\,2}) - 2V_{xy}^{(0)} V_x^{(0)} \cdot V_y^{(0)}\}$$

olgt.

Der Beziehung (1) zufolge ist

$$V_x^{(0)} < 0, \quad V_y^{(0)} < 0, \quad V_{xy}^{(0)} > 0$$

ınd damit

9) $$V_{xy}^{(0)} \cdot V_x^{(0)} \cdot V_y^{(0)} > 0.$$

Wir werden jetzt beweisen, daß $v''(0) < 0$ ist. Wegen $k \neq 0$ und vegen (8) und (9) genügt es, zu zeigen, daß

10) $$V_{xx}^{(0)} (V_y^{(0)\,2} - V_x^{(0)\,2}) < 0,$$

oder wegen (1)

11) $$V_{xx}^{(0)} (V_y^{(0)} - V_x^{(0)}) > 0$$

gilt. Nun ist aber

$$V_{xx}^{(0)} < 0$$

da für alle Punkte von T $|\xi| \leqq |\eta|$ gilt) und weiter

$$V_y^{(0)} - V_x^{(0)} = \int_T \frac{\eta - \xi}{r^2} d\sigma,$$

daher wiederum (vgl. die Bemerkung zum Schluß von § 2)

$$V_y^{(0)} - V_x^{(0)} < 0.$$

Es gilt also tatsächlich (11), mithin auch (10), also endlich auch

$$v''(0) < 0,$$

womit unsere Annahme vollständig bewiesen ist. Wir wollen hier noch darauf hinweisen, daß in P immer ein Maximum vorkommt, daß also Γ stets den auf unserer Figur angedeuteten Verlauf besitzt.

5. Wir haben also bisher folgendes bewiesen: Verläuft Γ außerhalb der Kurve C, so ist kein Punkt derselben ein Wendepunkt. Nun ist aber Γ offenbar eine geschlossene, doppelpunktlose Kurve. Dies folgt nämlich leicht aus der folgenden Überlegung.

Wir betrachten dazu einen beliebigen Punkt O im Innern von T und einen beliebigen von diesem Punkte ausgehenden Strahl. Liegt ein Punkt Q dieses Strahles bereits im Außenraume von C und rückt er ins Unendliche, so ist V auf diesem Strahl eine gewiß abnehmende Funktion (und zwar, wie man leicht sieht, für alle Lagen von Q im Außengebiete von C). Demnach kann unser Strahl höchstens einen Punkt mit Γ gemeinsam haben. Γ besitzt also gewiß keine Doppelpunkte. Nun aber verläuft Γ ganz im Endlichen (wegen $\lim_{Q \to \infty} V(P) = -\infty$). Entweder ist also Γ ein offener Bogen oder eine geschlossene Kurve. Das erste ist aber wegen $V_x^2 + V_y^2 \neq 0$ (im Außenraume von C) unmöglich.

Demnach ist Γ wirklich eine geschlossene, doppelpunktlose Kurve, die T noch im Innern enthält. Und da sie ferner keine Wendepunkte besitzt, muß sie also konvex sein, w. z. b. w.

Leipzig, den 13. Dezember 1930.

(Eingegangen am 16. Dezember 1930.)

Knoten und quadratische Formen.

Von

Lebrecht Goeritz in Königsberg.

Im folgenden werden einige Ergebnisse der Arbeit von Herrn Bankwitz, Über die Torsionszahlen der alternierenden Knoten[1]), unter Vermeidung der Knotengruppe neu hergeleitet und erweitert. Die Exponentenmatrix aus B. wird hier dem Knoten geometrisch zugeordnet, und es werden dann ihre Abänderungen bei Knotendeformationen direkt studiert. Dabei ergeben sich neben der bekannten Invarianz der Elementarteiler dieser Matrix neue Knoteninvarianten. Diese Resultate entsprechen Anregungen von Herrn Reidemeister aus dem Seminar des S.-S. 1930.

1.

Es sei eine normierte reguläre Knotenprojektion[2]) vorgelegt. Die Gebiete der durch die Knotenprojektion zerlegten Ebene teilen wir wie in B. in zwei Klassen, in schwarze und weiße, indem wir das Gebiet G_0 mit dem Unendlichfernen der Projektionsebene schwarz und die längs einer Strecke aneinanderstoßenden Gebiete verschieden färben. Dann liegen sich in einem Doppelpunkt immer Gebiete gleicher Färbung gegenüber. Den schwarzen Gebieten geben wir Namen $G_0, G_1, \ldots, G_n$, wobei G_0 das oben so bezeichnete Gebiet sein soll.

Einem Doppelpunkt, der Randpunkt von G_i und G_k $(i \neq k)$ ist, ordnen wir als Inzidenzzahl $+1$ für G_i zu, wenn nach Orientierung der Projektionsebene der überkreuzende Streckenzug im mathematisch positiven Sinne über ein schwarzes Gebiet in den unterkreuzenden zu drehen ist. Kann diese Drehung im positiven Sinne nur über ein weißes Gebiet ausgeführt werden, so ordnen wir entsprechend -1 zu. Stößt in einem Doppelpunkt G_i an sich an, so soll der Punkt die Inzidenzzahl 0 erhalten. Man

[1]) Math. Annalen **103** (1930), S. 145, zitiert mit B.

[2]) K. Reidemeister, Elementare Begründung der Knotentheorie, Hamburger Abhandl. **5** (1926), S. 24.

sieht, daß ein Doppelpunkt, der mit G_i und G_k inzidiert, für beide Gebiete die gleiche Inzidenzzahl erhält. Jedem Doppelpunkt der Knotenprojektion ist also eindeutig eine der Zahlen $+1$, -1, 0 zugeordnet.

Es wird nun folgende quadratische Matrix (a_{ik}) von n Zeilen gebildet: In der i-ten Zeile $(i = 1, 2, \ldots, n)$ soll a_{ii} die Summe aller Inzidenzzahlen des Gebietes G_i und a_{ik} für $(k \neq i$ von 1 bis $n)$, die negative Summe der Inzidenzzahlen, die gleichzeitig zu G_i und G_k gehören, sein[3]). Aus dieser Erklärung folgt sofort, daß

$$a_{ik} = a_{ki}$$

und

$$a_{ii} = A_i - \sum_k a_{ik} \quad (k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$$

ist, wobei A_i die Summe der Inzidenzzahlen ist, die gleichzeitig zu G_i und G_0 gehören. Das Gebiet G_0 spielt also bei der Erklärung der Knotenmatrix eine ausgezeichnete Rolle.

2.

Wir untersuchen nun die Änderungen der Matrix (a_{ik}) bei Knotendeformationen[4]). Die drei Operationen zerfallen bei dieser speziellen Betrachtung in zwei Klassen, je nachdem die Zahl der weißen oder schwarzen Gebiete geändert wird. Die Auszeichnung von G_0 spielt dabei eine besondere Rolle.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Ia. In einen doppelpunktfreien Streckenzug legt sich eine Schleife, die ein neues weißes Gebiet schafft. Dann stößt in dem neuen Doppelpunkt ein schwarzes Gebiet an sich an (Fig. 1), so daß die Matrix sich bei dieser und der inversen Operation nicht ändert.

Ib. Zwei Streckenzüge schieben sich in erlaubter Weise übereinander, so daß zwei neue weiße Gebiete entstehen (Fig. 2). Von den neuen Doppelpunkten erhält der eine die Inzidenzzahl $+1$ und der andere -1, so daß die Knotenmatrix sich auch bei dieser und ihrer inversen Operation nicht ändert.

IIa. Die neue Schleife der Projektion umschließe ein schwarzes Gebiet G_{n+1} (Fig. 3). Die neue Matrix $(a_{\lambda\varkappa})$ besitzt eine Zeile und Spalte mehr als (a_{ik}). Es ist, falls G_{n+1} in dem neuen Doppelpunkt G_0 gegenüberliegt

$$a_{n+1\,n+1} = \pm 1,$$

[3]) Vgl. B., a. a. O. S. 154–155.

[4]) K. Reidemeister, a. a. O., S. 26–27.

je nachdem der Doppelpunkt $+1$ oder -1 als Inzidenzzahl besitzt, ferner

$$\alpha_{n+1\,k} = \alpha_{k\,n+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und sonst

$$\alpha_{ik} = a_{ik}.$$

Liegt G_{n+1} ein Gebiet G_k $(k \neq 0)$ gegenüber, so können wir ohne Einschränkung $G_k = G_n$ annehmen. Für die dazugehörige Matrix $(\alpha'_{\lambda\varkappa})$ gilt:

$$\alpha'_{n+1\,n+1} = \pm 1$$

unter gleichen Bedingungen wie bei $\alpha_{n+1\,n+1}$ und

$$\alpha'_{nn} = a_{nn} \pm 1; \quad \alpha'_{n+1\,n} = \alpha'_{n\,n+1} = \mp 1, \quad \alpha'_{n+1\,k} = \alpha'_{k\,n+1} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

und sonst

$$\alpha'_{ik} = a_{ik}.$$

Daraus erkennt man, daß die $(\alpha'_{\lambda\varkappa})$ zugeordnete quadratische Form φ'

$$\varphi' = \varphi'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1})$$

in die $(\alpha_{\lambda\varkappa})$ zugeordnete φ

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$$

durch die unimodulare Substitution

$$x'_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$x'_{n+1} = x_n + x_{n+1}$$

übergeführt wird. Bezeichnen wir mit f

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

die (a_{ik}) zugeordnete Form, so ist

$$\varphi = f \pm x^2_{n+1}.$$

IIb. Durch Übereinanderschieben zweier Streckenzüge mögen zwei neue schwarze Gebiete entstehen (Fig. 4). Falls das zerteilbare Gebiet nicht G_0 ist, können wir es durch Zeilen- und Spaltenvertauschung zu G_n machen. Es werde also G_n in G'_n, G_{n+1} und G_{n+2} zerlegt, wobei G_{n+2} das Gebiet sei, das die beiden neuen Doppelpunkte zu Randpunkten hat. Die neue Knotenmatrix $(\beta_{\mu\nu})$ ist mit (a_{ik}) durch die folgenden Gleichungen verknüpft:

Fig. 4.

$$\beta_{ik} = a_{ik} \qquad (k, i = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$a_{nk} = \beta_{nk} + \beta_{n+1\,k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$a_{nn} = \beta_{nn} + \beta_{n+1\,n+1} + 2\beta_{n+1\,n},$$
$$\beta_{n+2\,k} = \beta_{k\,n+2} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1, n+2).$$

Ohne Einschränkung kann man noch

$$\beta_{n+2\,n} = 1, \quad \beta_{n+2\,n+1} = -1$$

setzen.

Ist die $(\beta_{\mu\nu})$ zugeordnete quadratische Form ψ'

$$\psi' = \psi'(x_1', x_2', \ldots, x_{n+2}')$$

und ist

$$\psi = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(x_{n+1}, x_{n+2})$$

die Form, in der $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu (a_{ik}) gehört und

$$g = \beta_{n+1\,n+1}\, x_{n+1}^2 - 2\, x_{n+1}\, x_{n+2}$$

ist, so geht ψ' durch die Substitution

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i && (i = 1, 2, \ldots, n), \\ x_{n+1}' &= x_n + x_{n+1}, \\ x_{n+2}' &= \beta_{n+1\,1}\, x_1 + \beta_{n+1\,2}\, x_2 + \ldots + \beta_{n+1\,n-1}\, x_{n-1} \\ &\quad + (\beta_{n+1\,n} + \beta_{n+1\,n+1})\, x_n + x_{n+2} \end{aligned}$$

in $\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$ über.

Ist das zerteilte Gebiet G_0, so steht die Knotenmatrix $(\beta_{\mu\nu}')$ in dem folgenden Zusammenhang mit der Matrix (a_{ik}):

$$\begin{aligned} \beta_{ik}' &= a_{ik} && (i, k \text{ wie oben}), \\ \beta_{n+2\,k}' &= 0 && (k \neq n+1), \\ \beta_{n+2\,n+1}' &= \pm 1. \end{aligned}$$

Die Werte der übrigen $\beta_{n+1\,k}'$ spielen keine Rolle, und man sieht leicht, daß auch die $(\beta_{\mu\nu}')$ zugeordnete Form der Form ψ äquivalent ist.

Fig. 5.

III. Es bleibt schließlich nur die Dreieckstransformation zu behandeln. Dabei geht ein schwarzes Gebiet in ein weißes oder umgekehrt über (Fig. 5). Es sei zunächst keines der an das Dreieck grenzenden Gebiete das Gebiet G_0. Das Dreiecksinnere sei weiß, die angrenzenden schwarzen Gebiete numerieren wir mit G_{n-2}, G_{n-1}, G_n, nnd die Knotenmatrix nennen wir wieder (a_{ik}). Bei der Deformation entstehe das Gebiet G_{n+1}, und die neue Matrix sei $(\gamma_{\lambda\varkappa})$, dann ist

$$\gamma_{ik} = a_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-3;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

und mit entsprechenden $\pm$-Zeichen (ohne wesentliche Einschränkung)

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1\,k} &= 0 && (k = 1, 2, \ldots, n-3),\\
\gamma_{n+1\,n-2} &= \gamma_{n+1\,n-1} = \mp 1,\\
\gamma_{n+1\,n} &= \pm 1,\\
\left.\begin{aligned}\gamma_{n-2\,k} &= a_{n-2\,k} + \gamma_{n+1\,k}\\ \gamma_{n-1\,k} &= a_{n-1\,k} + \gamma_{n+1\,k}\\ \gamma_{n\,k} &= a_{n\,k} \quad - \gamma_{n+1\,k}\end{aligned}\right\} & \quad (k = 1, 2, \ldots, n, n+2).
\end{aligned}$$

Die $(\gamma_{\lambda\varkappa})$ zugeordnete quadratische Form φ'

$$\varphi' = \varphi'(x_1', x_2', \ldots, x_{n+1}')$$

geht demnach durch die unimodulare Substitution

$$\begin{aligned}
x_i' &= x_i && (i = 1, 2, \ldots, n),\\
x_{n+1}' &= \pm x_{n-2} \pm x_{n-1} \mp x_n \pm x_{n+1}
\end{aligned}$$

in die Form

$$\varphi = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \pm x_{n+1}^2$$

über, wobei f die (a_{ik}) zugeordnete Form ist.

Für den Fall, daß eines der Gebiete G_ν, die das Dreieck begrenzen, G_0 ist, genügt die Bemerkung, daß bei Deformation nur die $(n-1)$-te und die n-te Zelle geändert werden. Die zugeordnete Form ist gleichfalls der Form φ äquivalent.

3.

Aus der speziellen Art der Umsetzung der Knotenmatrix bei Deformationen erkennt man, daß der Betrag der Determinante eine Knoteninvariante ist. Für alternierende Knoten erhalten alle Doppelpunkte, die irgend zwei verschiedene Gebiete G_i und G_k $(i \neq k)$ beranden, gleiche Inzidenzzahlen.

Dann kann der Betrag der Determinante als die folgende bekannte Determinante[5]) geschrieben werden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu} \end{vmatrix}.$$

[5]) Vgl. B., a. a. O., S. 160.

Darin bedeutet a_{ii} die Anzahl der Doppelpunkte, die zu G_i und G_0 gehören, und a_{ik} $(i \neq k)$ die Anzahl der Doppelpunkte, die zu G_i und G_k gehören, für

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus der Abschätzung der Determinante in B. auf S. 159 folgt, daß Δ größer höchstens gleich der Minimalanzahl der Überkreuzungen bei solchen Knoten ist.

Für beliebige Knoten gilt: *Die Determinante der Knotenmatrix ist eine ungerade Zahl.*

Macht man nämlich in einem zu G_i und G_k $(i \neq k)$ gehörigen Doppelpunkt den überkreuzenden Streckenzug zum unterkreuzenden, so geht für $(k = 0)$ a_{ii} in $a_{ii} \pm 2$ und für $(k \neq 0)$ auch a_{ik}, a_{ki} in $a_{ik} \mp 2$ über, d. h. die Determinante der neuen Knotenmatrix ist gerade oder ungerade, je nachdem die ursprüngliche es ist. Durch geeignete derartige Abänderungen kann man jeden Knoten in einen Kreis verwandeln. Die Determinante der Matrix einer Kreisprojektion ist aber $+1$ oder -1.

Es ist demnach auch die Determinante einer Knotenmatrix stets ungleich Null.

Man gewinnt neue Knoteninvarianten aus der Bemerkung, daß diejenigen Eigenschaften von quadratischen Formen, die den obigen Formen f, φ und ψ gleichzeitig zukommen, invariant mit dem Knoten verknüpft sind. Wir beschränken uns dabei auf Invarianten von quadratischen Formen f, φ und ψ bei rationalen Transformationen. Es gilt dann:

In der zu einer Knotenmatrix (a_{ik}) gehörigen quadratischen Form sind die Minkowskischen Einheiten C_p [6]) für ungerade Primzahlen p Knoteninvarianten [7]).

Für ungerade Primzahlen p, die in der Determinante nicht aufgehen, sind alle $C_p = 1$ nach Definition. Es kommen also nur ungerade Primzahlen in Betracht, die in der Determinante aufgehen. Die quadratische Form h

$$h = h(x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$$

möge in eine Summe von zwei quadratischen Formen mit verschiedenen Variablen

$$h = h_1(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) + h_2(x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$$

zerfallen. Es bedeute p^{ϑ_1} die höchste in der Determinante der Form h_1 und p^{ϑ_2} die höchste in der Determinante der Form h_2 aufgehende Potenz

---

[6]) H. Minkowski, Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalem Koeffizienten ineinander rational transformiert werden können. Ges. Abhandl., Teubner 1911, S. 219 f., zitiert mit M.

[7]) Eine Berechnungsvorschrift der C_p folgt auf S. 653.

einer ungeraden Primzahl. C_{1p} und C_{2p} seien die zu den Formen h_1 bzw. h_2 gehörigen Einheiten, dann findet man nach M., S. 230 die zu h gehörige Einheit C_p

$$C_p = (-1)^{\frac{p^{\partial_1}-1}{2}\cdot\frac{p^{\partial_2}-1}{2}} C_{1p} C_{2q}.$$

Die Einheiten der zerfallenen Formen φ und ψ

$$\varphi = f \pm x_{n+1}^2, \qquad \psi = f + g$$

sind gleich den Einheiten der Form f, da die Zusatzformen $\pm x_{n+1}^2$ und g die Determinante ± 1 besitzen, also stets $C_{2p} = 1$ und $\partial_2 = 0$ ist.

Die Berechnung einer Einheit C_p gelingt einfach, wenn man die zum Knoten gehörende Form f [8]) rational in eine Normalform h transformiert, so daß in h

$$h \equiv a_1 x_1^2 + \ldots + a_{n-m} x_{n-m}^2 + p(a_{n-m+1} x_{n-m+1}^2 + \ldots + a_n x_n^2) \pmod{p^2}$$

alle a_i ganz und relativ prim zu p sind. Dann ist

$$C_p = \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_{n-m+1} \cdot a_{n-m+2} \cdots a_n}{p}\right) = \left(\frac{L}{p}\right), \tag{1}$$

wobei $\left(\frac{L}{p}\right)$ das Legendresche Symbol und die eckige Klammer $[\alpha]$ „größte ganze Zahl in“ bedeutet.

Die Einheit C_2 in der Minkowskischen Darstellung ist nicht invariant, da sie von der bei Knotendeformationen sich ändernden Variablenzahl abhängt. Transformiert man nämlich analog die obige Form f in eine Form l

$$l \equiv b_1 x_1^2 + \ldots + b_{n-k} x_{n-k}^2 + 2(b_{n-k+1} x_{n-k+1}^2 + \ldots + b_n x_n^2) \pmod{16}$$

mit b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ungerade, so wird

$$C_2 = (-1)^{\left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) + \sum_{i,j} \frac{b_i - 1}{2} \cdot \frac{b_j - 1}{2}} \left(\frac{2}{b_{n-k+1} \cdot b_{n-k+2} \cdots b_n}\right)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, i-1),$$

wobei $\left(\frac{2}{b_{n-k+1} \cdots b_n}\right)$ das Legendresche Symbol bedeutet.

4.

Die gewonnenen Knoteninvarianten wollen wir für einige Knoten auswerten.

Es seien in der orientierten Ebene die Projektionen der beiden Kleeblattschlingen vorgelegt (Fig. 6). Die zugehörigen Formen sind

$$f_a = 3x^2 \quad \text{und} \quad f_b = -3x^2,$$

---

[8]) Eine solche Transformation ist nach M., S. 231 und 235 stets möglich.

die beide für $p = 3$ Normalformen sind. Es ist

$$C_{a_3} = \left(\frac{1}{3}\right) = 1 \quad \text{und} \quad C_{b_3} = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1.$$

Das ist ein einfacher Beweis für die Verschiedenheit der Kleeblattschlingen.

Allgemein gilt: *Ein Knoten ist von seinem Spiegelbild topologisch verschieden, wenn in der Determinante der Knotenmatrix eine Primzahl von der Form* $(4l+3)$ *in ungerader höchster Potenz aufgeht*[9]).

Ist nach einer solchen Primzahl die quadratische Form h eine zur Knotenmatrix gehörige Normalform, so ist $-h$ eine zum Spiegelbild gehörige Normalform. Die Zahl m in (1) ist für eine in ungerader Potenz in der Determinante aufgehende Primzahl ungerade, und es wird daher die zum Spiegelbild gehörige Einheit C_p'

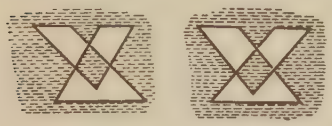


Fig. 6.

$$C_p' = \left(\frac{-1}{p}\right) C_p,$$

das heißt

$$C_p' = -C_p,$$

wenn p von der Form $(4l+3)$ ist.

Die gefundene notwendige Eigenschaft amphicheiraler Knoten (das sind Knoten, die sich in ihr Spiegelbild deformieren lassen), keine Primzahl von der Form $(4l+3)$ in ungerader höchster Potenz in der Determinante der Knotenmatrix zu enthalten, ist nicht hinreichend. Nach einem bekannten Resultat von Dehn und Schreier[10]) sind alle Torusknoten nicht amphicheiral.

---

[9]) Die Determinante der Knotenmatrix ist gleich dem Produkt der Torsionszahlen des zweifachen Überlagerungsraumes.

[10]) O. Schreier, Über die Gruppen $A^a B^b = 1$, Hamburger Abhandl. **3** (1924), S. 167.

(Eingegangen am 18. Dezember 1930.)

Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten. II.

Von

Władysław Nikliborc in Lwów (Lemberg), z. Z. in Leipzig[1]).

In einer vor kurzem in dieser Zeitschrift unter demselben Titel erschienenen Abhandlung[2]) habe ich einige Untersuchungen über das Problem der Abplattung der Gleichgewichtsfiguren angestellt.

Es sei T eine Gleichgewichtsfigur einer homogenen Flüssigkeit, die mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert. Der Schwerpunkt von T liegt auf der z-Achse. Wird er speziell zum Koordinatenursprung gewählt, so ist die Ebene $z = 0$ eine Symmetrieebene von T[3]). Es sei a der Abstand des von der z-Achse am weitesten entfernten Punktes in T, und b das Maximum der z-Koordinate in T. Die Größe $\frac{b}{a}$ bezeichnen wir mit dem Namen „Abplattung".

In der unter [2]) zitierten Abhandlung habe ich für diese Größe eine Abschätzung

$$\frac{b}{a} < 10$$

gegeben, und zwar unter den einschränkenden Voraussetzungen, daß T eine Rotationsfigur ist, und daß darüber hinaus die Meridiankurve von T im Halbraume $z > 0$ monoton verläuft.

Bezüglich der aus den Untersuchungen der Herren Mazurkiewicz und E. Hölder sich ergebenden Abschätzungen der Größe $\frac{b}{a}$ sei auf die Fußnoten [3]) und [4]) meiner ersten Abhandlung verwiesen.

In dieser Arbeit werden die Untersuchungen der ersten Abhandlung fortgesetzt, und zwar unter Zugrundelegung der Gleichgewichtsfiguren, deren „Höchstpunkt" auf der Rotationsachse liegt. Dieser Fall umfaßt offenbar denjenigen, welcher in der ersten Arbeit betrachtet wurde. Sonst werden

[1]) Fellow of the Rockefeller Foundation.

[2]) Math. Zeitschr. **34** (1931), S. 74—90.

[3]) L. Lichtenstein, Berl. Sitzungsberichte 1918, S. 1120—1135, insbes. S. 1123.

über T keine weiteren Voraussetzungen gemacht, auch braucht nicht T aus einem Bereiche zu bestehen.

Das Hauptergebnis der Arbeit lautet:

Liegt der Höchstpunkt[4]) *von T auf der z-Achse, so gilt die Ungleichheit*

$$\frac{b}{a} < 5.$$

Offenbar stellt also die vorliegende Abhandlung eine zweifache Verallgemeinerung der Resultate der ersten Abhandlung dar.

Es sei hier noch folgendes bemerkt: Die Idee des Beweises ist im großen und ganzen dieselbe wie früher. Auch hier wird zunächst ein spezielles Variationsproblem betrachtet, aus dem sich dann eine Anwendung auf die Hauptaufgabe sofort ergibt. Um sich in dieser Richtung nicht wiederholen zu müssen, sei auf den Anfang des § 2 der ersten Arbeit verwiesen. Endlich muß hervorgehoben werden, daß diese Abhandlung unabhängig von der ersten gelesen werden kann, abgesehen vom § 1 der ersten Arbeit, wo eine Reihenentwicklung für Volumenpotentiale abgeleitet wird, welche auch hier zur Anwendung gelangt.

§ 1.

Problemstellung.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit aller Figuren T, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

1. T liegt im Zylinder

$$x^2 + y^2 \leqq a^2, \quad |z| \leqq b,$$

wo a und b zwei beliebige, positive Zahlen bedeuten;

2. T ist in bezug auf die z-Richtung konvex[5]);

3. die Ebene $z = 0$ ist für T eine Symmetrieebene;

4. der Punkt $P(0, 0, b)$ liegt auf dem Rande S von T.

Es sei jetzt ζ eine beliebige, den Ungleichheiten

$$0 < \zeta < b$$

genügende Zahl, $\mathfrak{C}$ diejenige Punktmenge, in welcher die $z = \zeta$-Ebene den Rand S von T schneidet, Q einer derjenigen Punkte von $\mathfrak{C}$, der innerhalb dieser Punktmenge den kleinsten Abstand von der z-Achse besitzt. Wir setzen noch über Q voraus, daß dieser Punkt in der $y = 0$-Ebene liegt,

---

[4]) Über andere Klassen der Gleichgewichtsfiguren, bei welchen der Satz seine Gültigkeit behält, vgl. die Bemerkung am Ende der Arbeit.

[5]) Bekanntlich besitzt jede Gleichgewichtsfigur diese Eigenschaft. Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [3]), S. 1125.

was, wie man leicht sieht, keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Demnach sind die Koordinaten von $Q(\xi, 0, \zeta)$, wobei ξ eine der Bedingung $|\xi| \leqq a$ genügende Zahl bedeutet. Wir wollen noch voraussetzen, daß

$$0 \leqq \xi \leqq a$$

gilt, wobei, wie man leicht sehen wird, auch diese Bedingung keine Einschränkung der folgenden Untersuchungen bedeutet.

Wir setzen jetzt in naheliegender Schreibweise

$$V_T(A) = \int_T \frac{d\tau_M}{r_{AM}}$$

und betrachten die Differenz

$$V_T(P) - V_T(Q).$$

Das Problem, mit welchem wir uns vor allem in dieser Arbeit zu beschäftigen haben, läuft darauf hinaus, daß diese Differenz zu einem Maximum gemacht werden soll. Über die Eigenart dieses Problems, das dem Gebiete der Variationsrechnung angehört, vergleiche man meine Ausführungen im § 2 der unter [3]) zitierten Arbeit. Hier sei nur noch folgendes hervorgehoben: Es soll in $\mathfrak{M}$ ein derartiges T_0 bestimmt werden, daß auf dem Rande S_0 von T_0 ein solcher Punkt Q_0 bestimmt werden kann, welcher

1. in der $z = \zeta$-Ebene liegt,

2. von der z-Achse eine möglichst kleine Entfernung besitzt,

und daß für jede andere Figur T von $\mathfrak{M}$ die Ungleichheit

$$V_T(P) - V_T(Q) \leqq V_{T_0}(P) - V_{T_0}(Q_0)$$

gilt. Hierbei soll Q in bezug auf T dieselben Eigenschaften haben, welche der Punkt Q_0 in bezug auf T_0 besitzt.

Diese Aufgabe wird zwar in dieser Arbeit nicht vollständig gelöst, es werden aber einige Ergebnisse in dieser Richtung abgeleitet, die später mit Nutzen auf die Theorie der Gleichgewichtsfiguren angewandt werden können.

Es sei jetzt T irgendeine Figur der Menge $\mathfrak{M}$. Der Rand S von T ist in bezug auf die Ebene $z = 0$ selbstverständlich auch symmetrisch, so daß wir uns im weiteren auf denjenigen Teil von S, welcher im Halbraume $z \geqq 0$ liegt, beschränken können. Der zweiten Voraussetzung über die Eigenschaften der Figuren der Menge $\mathfrak{M}$ zufolge, hat jede zur z-Achse parallele Gerade mit S (gemeint ist hier, wie bemerkt, nur der in $z \geqq 0$ liegende Teil des Randes von T) entweder einen oder keinen Punkt gemeinsam, abgesehen noch von den Ausnahmefällen, in welchen sie eine Strecke gemeinsam mit S besitzt. Demnach läßt sich die Gleichung der Berandung S von T auf die Form

$$z = f(x, y)$$

bringen, wo $f(x,y)$ eine im Kreise

$$x^2+y^2\leqq a^2$$

erklärte Funktion bedeutet, welche entweder für ein Wertepaar (x,y) einen eindeutig bestimmten Wert besitzt, oder aber unendlich vieldeutig ist, und zwar erfüllt dann der Wertevorrat von $f(x,y)$ eine ganze Strecke $(0,\beta)$.

Besitzt die Gerade

$$x=\xi_0,\quad y=\eta_0$$

keinen gemeinsamen Punkt mit S, und ist dabei

$$\xi_0^2+y_0^2\leqq a^2,$$

so wird

$$f(\xi_0,\eta_0)=0$$

gesetzt. Es ist demnach stets

$$0\leqq f(x,y)\leqq b.$$

Nach diesen Bemerkungen können wir $V_T(A)$ auf folgende Form bringen:

$$V_T(A)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqq a^2}\left\{\int\limits_{-f(x,y)}^{+f(x,y)}\frac{dz}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\right\}dx\,dy,$$

wobei mit (ξ,η,ζ) die Koordinaten von A bezeichnet werden. Die innere Integration kann ausgeführt werden, und so bekommen wir endgültig:

$$(1)\quad V_T(A)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqq a^2}\log\frac{f(x,y)-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\{f(x,y)-\zeta\}^2}}{-f(x,y)-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\{f(x,y)+\zeta\}^2}}\,dx\,dy.$$

Für die Differenz $V_T(P)-V_T(Q)$ bekommen wir also den folgenden Ausdruck:

$$(2)\quad V_T(P)-V_T(Q)$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqq a^2}\log\frac{f-b+\sqrt{x^2+y^2+(f-b)^2}}{-f-b+\sqrt{x^2+y^2+(f+b)^2}}\cdot\frac{-f-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(f+\zeta)^2}}{f-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(f-\zeta)^2}}\,dx\,dy$$

(unter dem Integralzeichen ist natürlich $f=f(x,y)$ zu setzen).

§ 2.

Eine elementare Hilfsfunktion.

Wir setzen zur Abkürzung

$$x^2+y^2=A^2,\quad (x-\xi)^2+y^2=B^2,$$

$$\varrho_1=\frac{1}{\sqrt{A^2+(f-b)^2}},\quad \varrho_2=\frac{1}{\sqrt{A^2+(f+b)^2}},$$

$$\varrho_3=\frac{1}{\sqrt{B^2+(\zeta-f)^2}},\quad \varrho_4=\frac{1}{\sqrt{B^2+(\zeta+f)^2}}.$$

und betrachten die für das Folgende wichtige Hilfsfunktion

$$u(f) = \log \frac{f-b+\frac{1}{\varrho_1}}{-f-b+\frac{1}{\varrho_2}} \cdot \frac{-f-\zeta+\frac{1}{\varrho_4}}{f-\zeta+\frac{1}{\varrho_3}}. \tag{3}$$

Hier bedeutet f einen beliebigen Parameter, der im Intervalle $(0, b)$ variiert. Es ist

$$u'(f) = \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 - \varrho_4,$$

$$u''(f) = (b-f)\varrho_1^3 - (b+f)\varrho_2^3 - (\zeta - f)\varrho_3^3 + (\zeta + f)\varrho_4^3.$$

Über diese Hilfsfunktion $u(f)$ wollen wir einen Satz ableiten:

Satz. *„Die Funktion $u(f)$ besitzt im Innern von $(0, b)$ kein Maximum."*

Zunächst folge ein

Hilfssatz. *Aus*

$$0 < f \leqq b, \quad 0 < \zeta < b$$

und

$$u'(f) = 0$$

folgt

$$\varrho_1 > \varrho_3 > \varrho_4 > \varrho_2.$$

Beweis des Hilfssatzes. Aus $u'(f) = 0$ folgt jedenfalls

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \varrho_3 + \varrho_4. \tag{4}$$

Ich behaupte nun, daß $\varrho_4 > \varrho_2$. Wäre nämlich $\varrho_4 \leqq \varrho_2$, so wäre auch wegen (4) $\varrho_1 \leqq \varrho_3$. Aus $\varrho_4 \leqq \varrho_2$ folgt leicht

$$2f \cdot (b - \zeta) \leqq B^2 - A^2 + \zeta^2 - b^2, \tag{5}$$

und aus $\varrho_1 \leqq \varrho_3$ folgt dementsprechend

$$2f \cdot (b - \zeta) \leqq -(B^2 - A^2 + \zeta^2 - b^2). \tag{6}$$

Mindestens eine der rechten Seiten der Ungleichheiten (5) und (6) ist nicht positiv; die linke Seite ist aber positiv, was also einen Widerspruch bedeutet. Demnach ist $\varrho_4 > \varrho_2$, und daher auch $\varrho_1 > \varrho_3$. Da aber $\varrho_3 > \varrho_4$ gilt, so ist unser Hilfssatz vollständig bewiesen.

Wir gehen jetzt zum Beweise des eigentlichen Satzes über. Es sei zunächst $B \neq 0$. Es genügt zu zeigen, daß ein Extremum von $u(f)$ im Innern von $(0, b)$ notwendig ein Minimum sein muß. Dies wird aber gewiß der Fall sein, wenn wir zeigen, daß aus

$$0 < f < b, \quad 0 < \zeta < b, \quad u'(f) = 0$$

die Ungleichheit

$$u''(f) > 0$$

folgt.

Wie man leicht sieht, kann $u''(f)$ auf jede der beiden Formen

$$(7)\quad u''(f)=(b-\zeta)(\varrho_1^3-\varrho_4^3)+(b+f)(\varrho_4^3-\varrho_2^3)+(\zeta-f)(\varrho_1^3-\varrho_3^3),$$

$$(8)\quad u''(f)=(b-f)(\varrho_1^3-\varrho_3^3)+(f-\zeta)(\varrho_3^3-\varrho_4^3)+2f\cdot(\varrho_4^3-\varrho_2^3)$$

gebracht werden.

Mit Rücksicht auf den bewiesenen Hilfssatz folgt $u''(f)>0$ aus (7) für $0<f\leqq\zeta$, und aus (8) für $\zeta\leqq f<b$.

Ist nun $B=0$, so gilt der vorige Beweis allenfalls dann, wenn $u'(f)=0$ für $f\neq\zeta$ gilt. Für $B=0$, $f=\zeta$ ist aber $u'(f)$ beiderseits negativ unendlich; demnach kann $u(f)$ auch in diesem Falle nicht Maximum werden, w. z. b. w.

§ 3.

Untersuchung einer algebraischen Hilfskurve.

Aus dem oben bewiesenen Satze folgt, daß im Intervalle $(0, b)$ das Maximum von $u(f)$ eine der Zahlen $u(0)$ und $u(b)$ ist. Um zu entscheiden, welche von diesen Zahlen größer ist, müssen wir genauer die Ungleichheit

$$(9)\qquad u(0)\gtrless u(b)$$

untersuchen. Da

$$u(0)=0,$$

$$u(b)=\log\left\{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{-2b+\sqrt{x^2+y^2+4b^2}}\cdot\frac{-b-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(b+\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(b-\zeta)^2}}\right\}$$

gilt, so ist die Gleichung $u(0)=u(b)$ der Gleichung

$$(10)\qquad \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+4b^2}-2b}\cdot\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(b+\zeta)^2}-(b+\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(b-\zeta)^2}-(\zeta-b)}=1$$

äquivalent.

Wir wollen hier von vornherein die uns interessierenden Eigenschaften der Kurve (10) zusammenstellen und sie dann nacheinander beweisen.

Wir setzen voraus, daß

$$(11)\qquad 0<\xi\leqq a\leqq\frac{b}{5},\qquad \zeta\leqq\frac{b}{3}$$

angenommen wurde.

Es zeigt sich dann, daß sich das (reelle) Bild der Kurve (10) aus einer geschlossenen Kurve C und einem einfachen ins Unendliche sich erstreckenden Bogen C' zusammensetzt. Sowohl C als C' sind in bezug auf die x-Achse symmetrisch. C liegt im Innern des Kreises $x^2+y^2=\xi^2$, C' im Äußeren des Kreises $x^2+y^2=4a^2$. Der Koordinatenursprung befindet sich im Innern des von C begrenzten Bereiches. Endlich besitzt C' eine zur y-Achse parallele Asymptote.

Um alles dies zu beweisen, suchen wir zunächst eine parametrische Darstellung der Kurve (10), indem wir

$$(12)\qquad \frac{\sqrt{x^2+y^2+4b^2}-2b}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-b-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(b+\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+(b-\zeta)^2}} = t$$

setzen.

Augenscheinlich ist stets

$$0 \leqq t \leqq 1.$$

Aus (12) folgt zunächst

$$(13)\qquad \begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{16b^2t^2}{(1-t^2)^2}, \\ (x-\xi)^2+y^2 &= \frac{4t}{(1-t^2)^2}\{(1+t)^2b^2-(1-t)^2\zeta^2\} \end{aligned}$$

und weiter

$$(14)\qquad \begin{aligned} x &= -\frac{2(b^2-\zeta^2)}{\xi}\cdot\frac{t}{(1+t)^2}+\frac{\xi}{2}, \\ y^2 &= \frac{2t}{(1-t^2)^2}\left\{b^2(1+6t+t^2)-(1-t)^2\zeta^2-\frac{2(b^2-\zeta^2)^2}{\xi^2}\cdot\frac{t(1-t)^2}{(1+t)^2}\right\}-\frac{\xi^2}{4}. \end{aligned}$$

Den für y^2 gewonnenen Ausdruck können wir noch leicht auf die Gestalt

$$(15)\qquad y^2 = \frac{A_0t^6+A_1t^5+A_2t^4+A_3t^3+A_4t^2+A_5t+A_6}{4\xi^2(1+t)^4(1-t)^2}$$

bringen, mit

$$(16)\qquad \begin{aligned} A_0 &= A_6 = -\xi^4, \\ A_1 &= A_5 = 8b^2\xi^2-8\zeta^2\xi^2-2\xi^4, \\ A_2 &= A_4 = 64b^2\xi^2-16(b^2-\zeta^2)^2+\xi^4, \\ A_3 &= 112b^2\xi^2+16\zeta^2\xi^2+32(b^2-\zeta^2)^2+4\xi^4. \end{aligned}$$

Der Zähler von y^2 ist ein Polynom sechsten Grades, welches mit Rücksicht auf (16) reziprok ist. Deshalb empfiehlt es sich, einen neuen Parameter τ einzuführen, welcher durch die Gleichung

$$t+\frac{1}{t}-2=\tau$$

erklärt wird.

Wir erhalten dann

$$(17)\qquad \begin{aligned} x &= u(\tau), \\ y^2 &= \frac{v(\tau)}{w(\tau)}, \end{aligned}$$

wobei $w(\tau)>0$, und

$$(18)\qquad \begin{aligned} v(\tau) = &-\xi^4\tau^3+8\xi^2(b^2-\zeta^2-\xi^2)\tau^2 \\ &+16\{6b^2\xi^2-\xi^4-2\xi^2\zeta^2-(b^2-\zeta^2)^2\}\tau+256b^2\xi^2 \end{aligned}$$

gilt. τ variiert zwischen 0 und $+\infty$, wenn t zwischen 0 und 1 variiert.

Aus (17) folgt zunächst, daß die x-Achse eine Symmetrieachse der Kurve (10) ist.

Ehe wir weiter unsere Kurve untersuchen werden, wollen wir das etwaige Vorhandensein der Schnittpunkte der Kurve (10) mit dem Kreise

$$x^2 + y^2 = \xi^2$$

prüfen. Aus der ersten der Gleichungen (13) erhellt, daß dazu die Bedingung

$$\frac{16 b^2 t^2}{(1-t^2)^2} = \xi^2$$

notwendig ist. Hieraus folgt

$$t = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 + \xi^2}}{\xi},$$

also

$$\tau = \frac{2}{\xi}\sqrt{4b^2 + \xi^2} - 2.$$

Setzt man noch

$$\tau + 2 = \varrho,$$

so geht $v(\tau)$ in $v_1(\varrho)$ über:

$$\begin{aligned}(19)\qquad v_1(\varrho) = &-\xi^4 \varrho^3 + 2\xi^2(4b^2 - 4\zeta^2 - \xi^2)\varrho^2 \\ &+ 4\{16 b^2 \xi^2 - 4(b^2 - \zeta^2)^2 + \xi^4\}\cdot\varrho \\ &+ 8\{12 b^2 \xi^2 + 4\xi^2\zeta^2 + 4(b^2 - \zeta^2)^2 + \xi^4\}\end{aligned}$$

und die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der gesuchten Schnittpunkte besteht dann in der Ungleichheit

$$v_1\left(\frac{2}{\xi}\sqrt{4b^2 + \xi^2}\right) \geqq 0.$$

Die Ausrechnung liefert

$$\begin{aligned}(20)\qquad &\frac{1}{32}\cdot v_1\left(\frac{2}{\xi}\sqrt{4b^2 + \xi^2}\right) \\ &= \frac{3b^2\xi^2 - (b^2 - \zeta^2)^2}{\xi}\sqrt{4b^2 + \xi^2} + 5b^4 - 6b^2\zeta^2 + 3b^2\xi^2 + \zeta^4 \\ &= \psi(\xi, \zeta^2).\end{aligned}$$

Wir wollen beweisen, daß

$$\psi(\xi, \zeta^2) < 0$$

gilt, so daß keine Schnittpunkte der Kurve (10) mit dem Kreise $x^2 + y^2 = \xi^2$ existieren.

Setzt man $\zeta^2 = u$, so ist

$$\psi(\xi, u) = \frac{3b^2\xi^2 - (b^2 - u)^2}{\xi}\sqrt{4b^2 + \xi^2} + 5b^4 - 6b^2 u + 3b^2\xi^2 + u^2$$

eine Funktion zweiten Grades in bezug auf u. Die Diskriminante Δ ist gleich

$$b^4\{\sqrt{4b^2+\xi^2}-3\xi\}^2$$
$$-\{5b^4\xi+3b^2\xi^3+(3b^2\xi^2-b^4)\sqrt{4b^2+\xi^2}\}\cdot\{\xi-\sqrt{4b^2+\xi^2}\},$$

was nach Ausrechnung

$$\Delta=16b^4\xi^2$$

ergibt.

Demnach ist $\Delta>0$, und die Gleichung $\psi(\xi,u)=0$ besitzt stets zwei reelle Wurzeln

$$u_1=\frac{2b^2-3\xi^2-3\xi\sqrt{4b^2+\xi^2}}{2},$$

$$u_2=\frac{2b^2+\xi^2+\xi\sqrt{4b^2+\xi^2}}{2}.$$

Es ist stets $u_2>0$. Ist

$$2b^2-3\xi^2-3\xi\sqrt{4b^2+\xi^2}>0,$$

so ist auch $u_1>0$. Dies ist bei uns wegen (11) der Fall, da

$$2b^2-3\xi^2-3\xi\sqrt{4b^2+a^2}\geqq 2b^2-3a^2-3a\sqrt{4b^2+a^2}>0$$

gilt.

Der Koeffizient bei u^2 in $\psi(\xi,u)$ ist gleich

$$-\frac{\sqrt{4b^2+\xi^2}}{\xi}+1$$

und stets negativ, so daß $\psi(\xi,u)$ ein Maximum besitzen muß. Demnach ist für

$$u<u_1 \quad \text{und} \quad u>u_2$$

gewiß

$$\psi(\xi,u)<0.$$

Es bedeutet aber $u<u_1$, daß

$$\zeta^2<\frac{2b^2-3\xi^2-3\xi\sqrt{4b^2+\xi^2}}{2}$$

sein muß, was offenbar wegen (11) gerade zutrifft.

Wir haben also tatsächlich bewiesen, daß die Kurve (10) mit dem Kreise $x^2+y^2=\xi^2$ keine Schnittpunkte besitzt.

Jetzt wollen wir auf ähnliche Weise zeigen, daß in unserem Falle auch keine Schnittpunkte der Kurve (10) mit dem Kreise $x^2+y^2=4a^2$ existieren. Anderenfalls müßten sie dem Werte

$$r=\frac{2}{a}\sqrt{b^2+a^2}$$

entsprechen. Es genügt demnach zu zeigen, daß

$$v_1\left(2\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)<0$$

gilt. Setzt man $\frac{b}{a}=\lambda$, so folgt durch Ausrechnung

$$v_1(2\sqrt{1+\lambda^2})=-\xi^4\lambda^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)+4\xi^2\{4b^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)+\lambda^2(b^2-\zeta^2)\}-4(b^2-\zeta^2)^2(\sqrt{1+\lambda^2}-1).$$

Wir setzen $\xi^2=u$ und betrachten die Funktion zweiten Grades in u

$$\sigma(u)=-\lambda^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)u^2+4\{4b^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)+\lambda^2(b^2-\zeta^2)\}u-4(b^2-\zeta^2)^2(\sqrt{1+\lambda^2}-1).$$

Sie besitzt für

$$u_0=\frac{2\{4b^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)+\lambda^2(b^2-\zeta^2)\}}{\lambda^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)}$$

ein Maximum, und es gilt, wie man leicht erkennt, gewiß $u_0>4a^2$. Demnach ist $\sigma(u)$ im Intervalle $(0,4a^2)$ eine monotone, und zwar wegen

$$\sigma'(0)=4\{4b^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)+\lambda^2(b^2-\zeta^2)\}>0$$

eine wachsende Funktion. Für $0\leqq u\leqq 4a^2$ ist also $\sigma(u)\leqq\sigma(4a^2)$ und daher

$$v_1(2\sqrt{1+\lambda^2})\leqq -16a^4\lambda^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)+16a^2\{4b^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)+\lambda^2(b^2-\zeta^2)\}-4(b^2-\zeta^2)^2(\sqrt{1+\lambda^2}-1).$$

Wir setzen jetzt $b^2-\zeta^2=v$ und betrachten die Funktion

$$\sigma_1(v)=-16a^4\lambda^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)+16a^2\{4b^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)+\lambda^2 v\}-4v^2(\sqrt{1+\lambda^2}-1).$$

Diese Funktion besitzt für

$$v_0=\frac{2\lambda^2a^2}{\sqrt{1+\lambda^2}-1}=2a^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)$$

ihr Maximum. Wegen (11) ist gewiß $v_0<b^2$, also besitzt $\sigma_1(v)$ im Intervalle $(0,b^2)$ das (einzige und absolute) Maximum für $v=v_0$.

Es ist, wie man durch Ausrechnung leicht bestätigt,

$$\frac{1}{16a^4}\sigma_1(v_0)=-3\lambda^2\sqrt{1+\lambda^2}+\lambda^2<0$$

und daher

$$v_1(2\sqrt{1+\lambda^2})<0,$$

w. z. b. w.

Wir gehen jetzt zum eigentlichen Beweise des die Eigenschaften der Kurve (10) zusammenfassenden Satzes über. Setzt man in (10) $y = 0$, so entsteht die Gleichung

$$\sigma(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+4b^2}-2b} \cdot \frac{-b-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+(b+\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+(b-\zeta)^2}} = 1.$$

Wegen $\sigma(0) = +\infty$, $\sigma(\xi) = 0$ muß im Intervalle $(0, \xi)$ für x mindestens eine Wurzel x_0 liegen. Demnach besitzt die Kurve (10) mindestens einen reellen Punkt $(x_0, 0)$, und dieser liegt im Innern des Kreises $x^2 + y^2 = \xi^2$. Ich behaupte nun, daß dieser Punkt nicht ein isolierter reeller Punkt sein kann.

In der Tat: es gibt gewiß eine Umgebung des Punktes $(x_0, 0)$, in welchem der Wert der linken Seite von (10) sich von 1 hinreichend wenig unterscheidet. Es existieren auch entsprechend die Umgebungen von $(0, 0)$ und $(\xi, 0)$ derart, daß in der ersten die linke Seite von (10) größer als ein beliebiges N, in der zweiten kleiner als eine beliebig kleine Zahl α ist. Bewegt man sich also längs einer zur x-Achse parallelen Geraden, die alle diese drei Umgebungen schneidet, so sieht man sofort, daß die linke Seite der Formel (10) auch den Wert 1 mindestens einmal annehmen muß.

Der Punkt $(x_0, 0)$ ist also nicht isoliert, und gehört demnach einer Anzahl von Bogen der Kurve (10) an. Wir betrachten einen dieser Bogen und bewegen uns auf ihm vom Punkte $(x_0, 0)$ ausgehend. Dementsprechend verändert sich die Variable t von einem gewissen Werte t_0 an, wobei sie entweder zu- oder abnimmt. Wir können uns auf unserem Bogen natürlich nur so lange bewegen, bis wir auf einen Punkt treffen, in welchem $y^2 = 0$ gilt. Ich behaupte, daß dies tatsächlich eintreten muß. Wäre dies nämlich nicht der Fall, und würde t dabei zunehmen, so könnte man sich auf unserem Bogen für alle Werte $t > t_0$ bewegen. Konvergiert aber $t \to 1$, so wird y^2 unendlich groß, und wir müßten uns außerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = \xi^2$ befinden, also ihn unterwegs irgendwo schneiden, was aber nach unseren vorigen Feststellungen unmöglich ist. Es bleibt noch der Fall, daß t abnimmt, zu erörtern. Würde niemals $y^2 = 0$, so könnte man sich auf unserem Bogen für alle Werte $t < t_0$ bewegen. Für $t \to 0$ wird aber y^2 negativ.

Alles in allem haben wir bisher folgendes festgestellt: Aus $(x_0, 0)$ gehen mindestens zwei (wegen der Symmetrie) Bogen der Kurve (10), die stets im Kreise $x^2 + y^2 \leqq \xi^2$ liegen, und die mindestens noch einmal die x-Achse schneiden. Daß dieser zweite Schnittpunkt von dem ersten verschieden sein muß, folgt aus der Beziehung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2(b^2-\zeta^2)}{\xi^2} \frac{1-t^2}{(1+t)^4},$$

die auf die Monotonie der Funktion $x = x(t)$ zu schließen erlaubt. Dieser Monotonie zufolge können wir auch behaupten, daß sich ein solcher Bogen mit sich selbst nicht schneiden kann, so daß zwei solche symmetrische Bogen tatsächlich einen Bereich begrenzen, welcher im Innern des Kreises $x^2 + y^2 \leqq \xi^2$ liegt. Daß im Innern dieses Kreises wirklich außer dieser geschlossenen Kurve, deren Existenz wir bewiesen haben, keine weiteren Punkte der Kurve (10) möglich sind, wird sich leicht später ergeben.

Wir wenden uns jetzt der Betrachtung derjenigen Punkte der Kurve (10) zu, die sich außerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = 4a^2$ befinden. Die Existenz solcher Punkte folgt aus (14) ohne weiteres, da, wie man leicht sieht, y^2 mit $t \to 1$ positiv unendlich wird. Wir betrachten also irgendeinen Punkt dieses Zweiges der Kurve (10) und verfolgen seinen Verlauf bei abnehmendem t. Wir können uns wieder auf diesem Bogen nur so lange bewegen, als $y^2 > 0$ ist. Da aber unsere Kurve mit dem Kreise $x^2 + y^2 = 4a^2$ keine gemeinsamen Punkte besitzt, da man andrerseits für gewisse Werte des Parameters t diejenigen Punkte der Kurve (10) bekommt, welche im Innern dieses Kreises liegen, so folgt daraus notwendig, daß unser Bogen irgendwo mindestens einmal die x-Achse treffen muß.

Wir haben also die Existenz der drei reellen Schnittpunkte der Kurve (10) mit der x-Achse bewiesen. Auf Grund der Beziehungen (15) und (16) können indessen höchstens drei solche Punkte existieren. Hieraus folgt aber die Richtigkeit unseres Satzes bis auf die Behauptung der Existenz einer Asymptote. Da dieser Punkt aber für das Folgende vollkommen belanglos ist, so überlassen wir diesen Teil des leichten Beweises dem Leser. Auch die Feststellung der Tatsache, daß der Koordinatenursprung im Innern von C liegt, sei dem Leser überlassen. Sie folgt leicht aus dem Umstand, daß $u(b)$ in der Umgebung des Koordinatenursprungs unendlich groß wird.

Auf Grund der vorhergehenden Betrachtungen sind wir jetzt imstande, die für das Folgende äußerst wichtigen Schlüsse zu ziehen: Die ganze Ebene zerfällt demnach in drei Teilbereiche: G_1, G_2 und G_3. Der durch die (geschlossene) Kurve C begrenzte Bereich G_1 wird durch die Ungleichheit

$$u(b) > u(0)$$

charakterisiert, enthält den Koordinatenursprung und liegt vollständig im Innern des Kreises $x^2 + y^2 = \xi^2$.

Unter G_2 verstehen wir den (übrigens unendlichen) Bereich, welcher mit G_1 gemeinsame Randpunkte besitzt, durch die Ungleichheit

$$u(b) < u(0)$$

charakterisiert wird und die Kreise

$$x^2 + y^2 \leqq \xi^2 \leqq a^2 \leqq 4a^2$$

in seinem Innern enthält.

Endlich wird der (gleichfalls unendliche) Bereich G_3 durch die Ungleichheit

$$u(b) > u(0)$$

definiert. Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß er vollständig außerhalb des Kreises

$$x^2 + y^2 = a^2$$

liegt.

§ 4.

Reduktion des Variationsproblems auf eine Aufgabe der Differentialrechnung.

Wir kehren jetzt zu dem in § 1 gestellten Problem zurück und nehmen von vornherein an, daß (11) gilt. Für die Differenz $V_T(P) - V_T(Q)$ gilt die Formel (2) oder, mit Rücksicht auf (3), kürzer

$$V_T(P) - V_T(Q) = \iint_{x^2+y^2 \leqq a^2} u(f)\, dx\, dy. \tag{21}$$

Wir betrachten jetzt für einen Augenblick die Zahlen ξ und ζ als konstant und beschränken uns auf eine gewisse Teilmenge $\mathfrak{M}_1$ der Menge $\mathfrak{M}$. Und zwar soll $\mathfrak{M}_1$ nur diejenigen Figuren T umfassen, auf deren Rande sich $Q(\xi, 0, \zeta)$ befindet mit der Eigenschaft, daß Q im Verhältnis zu anderen Punkten der Schnittkurve $\mathfrak{C}$ der Berandung S mit der Ebene $z = \zeta$ die kleinste Entfernung von der z-Achse besitzt. Wir wollen zunächst ein Teilproblem lösen und innerhalb $\mathfrak{M}_1$ diejenige Figur T^* finden, für welche (2) ein Maximum wird.

Dies gelingt jetzt ohne besondere Schwierigkeiten auf Grund der in §§ 2 und 3 durchgeführten Betrachtungen. Es sei T eine beliebige Figur der Menge $\mathfrak{M}_1$. Es ist

$$V_T(P) - V_T(Q) = \iint_{x^2+y^2 \leqq \xi^2} u(f)\, dx\, dy + \iint_{\xi^2 \leqq x^2+y^2 \leqq a^2} u(f)\, dx\, dy.$$

Wir betrachten zunächst das zweite Integral rechter Hand. Der Integrationsbereich ist in G_2 enthalten, folglich ist in diesem gewiß $u(b) < u(0)$, also auch $u(f) < u(0)$, da $u(0)$ in diesem Falle das Maximum der Funktion $u(f)$ im Intervalle $(0, b)$ darstellt. Wegen $u(0) = 0$ ist also $u(f) < 0$ und deshalb

$$V_T(P) - V_T(Q) \leqq \iint_{x^2+y^2 \leqq \xi^2} u(f)\, dx\, dy.$$

Hieraus folgt aber die erste wichtige Folgerung: Um das für die Menge $\mathfrak{M}_1$ gestellte Variationsproblem zu lösen, genügt es, diejenigen Figuren T zu betrachten, für welche außerhalb des Kreises

$$x^2 + y^2 = \xi^2$$

die Gleichung

$$f(x, y) \equiv 0$$

gilt. Die Gesamtheit dieser Figuren T werde mit $\mathfrak{M}_1'$ bezeichnet. Die Lösung des Problems für die Menge $\mathfrak{M}_1$ muß mit der Lösung für die Menge $\mathfrak{M}_1'$ übereinstimmen.

In Fortführung der Betrachtungen fassen wir jetzt die Menge $\mathfrak{M}_1'$ ins Auge und greifen aus ihr ein beliebiges T heraus. Ich behaupte, daß für

$$x^2 + y^2 \leqq \xi^2$$

gewiß

$$\zeta \leqq f(x, y) \leqq b \tag{22}$$

gilt.

In der Tat ist $f(x, y) \leqq b$ selbstverständlich, da $\mathfrak{M}_1'$ in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Weiter aber war der Punkt $Q(\xi, 0, \zeta)$ der zur z-Achse nächstgelegene von allen den Punkten, die gleichzeitig auf dem Rande S von T und in der Ebene $z = \zeta$ liegen. Wäre also für einen Punkt (x_0, y_0)

$$f(x_0, y_0) < \zeta,$$

so müßte auch für ein gewisses t $(0 < t < 1)$ wegen $f(0, 0) = b$ die Gleichung

$$f(t x_0, t y_0) = \zeta$$

bestehen. Das ist aber unmöglich; denn es ist

$$t^2(x_0^2 + y_0^2) < x_0^2 + y_0^2 \leqq \xi^2,$$

und $Q(\xi, 0, \zeta)$ würde nicht die vorausgesetzte Eigenschaft besitzen.

Demnach gilt (22) für jedes T in $\mathfrak{M}_1'$ innerhalb des Kreises $x^2 + y^2 \leqq \xi^2$.

Wie wir wissen, besitzt die Funktion $u(f)$ im Innern des Intervalls $(0, b)$ kein Maximum. Dasselbe gilt also „a fortiori“ für das Intervall (ζ, b), und es ist deshalb für alle Werte dieses Intervalls

$$u(f) \leqq \mathrm{Max}\,(u(\zeta), u(b)).$$

Wir teilen jetzt den Kreis

$$x^2 + y^2 \leqq \xi^2$$

in zwei Punktmengen D_1 und D_2, die durch die Ungleichheiten

$$u(b) \geqq u(\zeta), \quad (\text{in } D_1),$$
$$u(b) < u(\zeta), \quad (\text{in } D_2)$$

charakterisiert sind.

Demnach gilt

$$u(f) \leqq u(b) \quad \text{in} \quad D_1,$$
$$u(f) \leqq u(\zeta) \quad \text{in} \quad D_2,$$

wobei rechter Hand die genauen oberen Schranken vorkommen.

Wir setzen jetzt insbesondere

$$f_0(x, y) = b \quad \text{in} \quad D_1,$$
$$f_0(x, y) = \zeta \quad \text{in} \quad D_2$$

und bezeichnen mit $T_0(\xi, \zeta)$ die mit Hilfe dieser Funktion erklärte Figur. Nach dem oben Festgestellten liefert $T_0(\xi, \zeta)$ die Lösung des Variationsproblems für die Menge $\mathfrak{M}_1'$. Tatsächlich ist ja

$$V_T(P) - V_T(Q) = \iint_{D_1} u(f)\,dx\,dy + \iint_{D_2} u(f)\,dx\,dy$$
$$\leqq \iint_{D_1} u(b)\,dx\,dy + \iint_{D_2} u(\zeta)\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\leqq\xi^2} u(f_0)\,dx\,dy.$$

(Daß die Punktmengen D_1 und D_2 meßbar sind, folgt einfach aus der Tatsache, daß $u(f)$ eine analytische Funktion ist.)

Nachdem wir schon das Variationsproblem für die Menge $\mathfrak{M}_1'$ — also auch $\mathfrak{M}_1$ — gelöst haben, ist die Aufgabe für $\mathfrak{M}$ schon auf die der Differentialrechnung zurückgeführt. Wir betrachten jetzt nämlich alle auf diese Weise erklärten $T_0(\xi, \zeta)$ und suchen unter diesen solche, für welche $V_{T_0}(P) - V_{T_0}(Q)$ zu einem Maximum wird. Dies ist aber gerade die Aufgabe für ein gewöhnliches Maximum einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen.

§ 5.

Abschätzung für $V_{T_0}(P) - V_{T_0}(Q)$.

Wir betrachten jetzt (immer unter Voraussetzung von (11)) eine auf die obige Weise bestimmte Figur $T_0(\xi, \zeta)$ und die entsprechende Differenz

$$V_{T_0}(P) - V_{T_0}(Q).$$

Da die praktische Auswertung dieser Differenz mit außerordentlich großen Rechnungsschwierigkeiten verbunden ist, werden wir zunächst eine Abschätzung nach oben für diesen Ausdruck zu finden versuchen. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst $V_{T_0}(P)$. Es ist

$$V_{T_0}(P) = \iint_{D_1} \left\{ \int_{-b}^{+b} \frac{1}{r}\,dz \right\} dx\,dy + \iint_{D_2} \left\{ \int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{1}{r}\,dz \right\} dx\,dy,$$

wobei r den Abstand des Punktes P von einem Integrationspunkt bedeutet. Es sei $\varrho^2\pi$ der Flächeninhalt von D_1. Aus geometrischen Gründen ist sofort ersichtlich, daß

$$V_{T_0}(P) \leqq \iint_{x^2+y^2\leqq\varrho^2} \left\{ \int_{-b}^{+b} \frac{1}{r}\,dz \right\} dx\,dy + \iint_{\varrho^2\leqq x^2+y^2\leqq\xi^2} \left\{ \int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{1}{r}\,dz \right\} dx\,dy$$

gilt, da der Ausdruck rechter Hand auch ein Potential im Punkte P derselben Massengröße darstellt, wobei aber die längeren, anziehenden, zur z-Achse parallelen Strecken, möglichst dicht um die z-Achse liegen. Der Ausdruck rechter Hand stellt demnach den Wert der Summe des von dem Zylinder

$$x^2 + y^2 \leqq \varrho^2, \quad |z| \leqq b \tag{23}$$

und des von der Zylinderschale

$$\varrho^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq \xi^2, \quad |z| \leqq \zeta \tag{24}$$

herrührenden Potentials im Punkte P dar. Beide Potentiale seien in der Zukunft mit $V_1(P)$ und $V_2(P)$ bezeichnet. Es ist also

$$V_{T_0}(P) \leqq V_1(P) + V_2(P). \tag{25}$$

Nunmehr betrachten wir das Potential $V_{T_0}(Q)$ und versuchen es nach unten hin abzuschätzen. Zunächst ist klar, daß der Zylinder

$$x^2 + y^2 \leqq \xi^2, \quad |z| \leqq \zeta \tag{26}$$

in T_0 enthalten ist. Wir wollen das von diesem Zylinder herrührende Potential mit $V_3(Q)$ bezeichnen. Es ist also

$$V_{T_0}(Q) = V_3(Q) + R;$$

R bedeutet dabei den Wert des Potentials im Punkte Q, welches durch die dem Zylinder (26) nicht angehörenden Punkte von T_0 erzeugt wird. Diese Punkte sind nun leicht zu bestimmen; denn sie sind durch die Ungleichheiten

$$(x, y) \text{ in } D, \qquad \zeta < z \leqq b$$

und

$$(x, y) \text{ in } D, \qquad -b \leqq z < -\zeta$$

charakterisiert, und für alle diese Punkte ist offenbar

$$\frac{1}{\sqrt{4\xi^2 + (z-\zeta)^2}} \leqq \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}}$$

und daher

$$\int_{\zeta}^{b} \frac{dz}{\sqrt{4\xi^2 + (z-\zeta)^2}} \leqq \int_{\zeta}^{b} \frac{dz}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}},$$

$$\int_{-b}^{-\zeta} \frac{dz}{\sqrt{4\xi^2 + (z-\zeta)^2}} \leqq \int_{-b}^{-\zeta} \frac{dz}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

Da der Flächeninhalt von D_1 den Wert $\varrho^2\pi$ besitzt, so folgt hieraus ohne weiteres

$$R \geqq V_4(Q) + V_5(Q),$$

worin

$$V_4(Q) = \varrho^2\pi \int_{\zeta}^{b} \frac{dz}{\sqrt{4\xi^2 + (z-\zeta)^2}},$$

$$V_5(Q) = \varrho^2\pi \int_{-b}^{-\zeta} \frac{dz}{\sqrt{4\xi^2 + (z-\zeta)^2}}$$

gesetzt wurde.

Demnach ist

(27) $$V_{T_0}(Q) \geqq V_3(Q) + V_4(Q) + V_5(Q).$$

Aus (27) und (25) ergibt sich die für die praktische Ausrechnung nützliche Abschätzung

(28) $$V_{T_0}(P) - V_{T_0}(Q) \leqq V_1(P) + V_2(P) - V_3(Q) - V_4(Q) - V_5(Q).$$

§ 6.

Auswertung der in (28) vorkommenden Integrale.

Wir wollen jetzt die in der Formel (28) vorkommenden Potentiale ausrechnen, eventuell abschätzen. Da die Figuren (23), (24) und (26) Rotationsfiguren sind, so können wir die im § 1 der ersten Abhandlung angegebene Formel verwenden.

Es gilt demnach

$$V_1(P) = 2\pi \int_{-b}^{+b} dz \int_0^{\varrho} \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+(b-z)^2}} = 2\pi \int_{-b}^{+b} \sqrt{t^2+(b-z)^2}\,\Big|_0^{\varrho} dz,$$

also

(29) $$\frac{1}{2\pi} V_1(P) = b\sqrt{\varrho^2+4b^2} - 2b + \frac{\varrho^2}{2} \log \frac{2b+\sqrt{\varrho^2+4b^2}}{\varrho}.$$

Es ist weiter

$$V_2(P) = 2\pi \int_{-\zeta}^{+\zeta} dz \int_{\varrho}^{\xi} \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+(b-z)^2}}$$

und daher

(30) $$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} V_2(P) = {} & \frac{b+\zeta}{2}\left\{\sqrt{\xi^2+(b+\zeta)^2} - \sqrt{\varrho^2+(b+\zeta)^2}\right\} \\ & - \frac{b-\zeta}{2}\left\{\sqrt{\xi^2+(b-\zeta)^2} - \sqrt{\varrho^2+(b-\zeta)^2}\right\} \\ & + \frac{\xi^2}{2} \log \frac{b+\zeta+\sqrt{\xi^2+(b+\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{\xi^2+(b-\zeta)^2}} - \frac{\varrho^2}{2} \log \frac{b+\zeta+\sqrt{\varrho^2+(b+\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{\varrho^2+(b-\zeta)^2}}. \end{aligned}$$

Für $V_3(Q)$ erhalten wir den Wert in der Gestalt einer unendlichen, konvergenten Reihe

$$V_3(Q) = 2\pi \int_{-\zeta}^{+\zeta} dz \int_0^{\xi} \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+\xi^2+(\zeta-z)^2}} = +2\pi \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{-\zeta}^{+\zeta} dz \int_0^{\xi} \frac{\xi^{2k}\, t^{2k+1}\, dt}{[t^2+\xi^2+(\zeta-z)^2]^{2k+\frac{1}{2}}},$$

wobei die c_k positive Konstante bedeuten. Hieraus folgt aber weiter

(31) $$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} V_3(Q) > \int_{-\zeta}^{+\zeta} dz \int_0^{\xi} \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+\xi^2+(\zeta-z)^2}} = {} & \zeta\left\{\sqrt{2\xi^2+4\zeta^2} - \sqrt{\xi^2+4\zeta^2}\right\} \\ & + \xi^2 \log \frac{2\zeta+\sqrt{2\xi^2+4\zeta^2}}{\xi\sqrt{2}} - \frac{\xi^2}{2} \log \frac{2\zeta+\sqrt{\xi^2+4\zeta^2}}{\xi}. \end{aligned}$$

Es ist endlich

$$(32)\quad V_4(Q)=\varrho^2\pi\int_{\xi}^{b}\frac{dz}{\sqrt{4\xi^2+(z-\zeta)^2}}=\varrho^2\pi\log\frac{b-\zeta+\sqrt{4\xi^2+(b-\zeta)^2}}{2\xi},$$

$$(33)\quad V_5(Q)=\varrho^2\pi\int_{-b}^{-\zeta}\frac{dz}{\sqrt{4\xi^2+(z-\zeta)^2}}=\varrho^2\pi\log\frac{b+\zeta+\sqrt{4\xi^2+(b+\zeta)^2}}{2\zeta+\sqrt{4\xi^2+4\zeta^2}}.$$

Aus (29) bis (33) folgt dann

$$(34)\quad \frac{V_{T_0}(P)-V_{T_0}(Q)}{2\pi}\leqq b\left\{\sqrt{\varrho^2+4b^2}-2b\right\}+\frac{\varrho^2}{2}\log\frac{2b+\sqrt{\varrho^2+4b^2}}{\varrho}$$

$$+\frac{b+\zeta}{2}\left\{\sqrt{\xi^2+(b+\zeta)^2}-\sqrt{\varrho^2+(b+\zeta)^2}\right\}-\frac{b-\zeta}{2}\left\{\sqrt{\xi^2+(b-\zeta)^2}-\sqrt{\varrho^2+(b-\zeta)^2}\right.$$

$$+\frac{\xi^2}{2}\log\frac{b+\zeta+\sqrt{\xi^2+(b+\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{\xi^2+(b-\zeta)^2}}-\frac{\varrho^2}{2}\log\frac{b+\zeta+\sqrt{\varrho^2+(b+\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{\varrho^2+(b-\zeta)^2}}-\zeta\left\{\sqrt{2\xi^2+4\zeta^2}-\sqrt{\xi^2+\right.$$

$$-\xi^2\log\frac{2\zeta+\sqrt{2\xi^2+4\zeta^2}}{\xi\sqrt{2}}+\frac{\xi^2}{2}\log\frac{2\zeta+\sqrt{\xi^2+4\zeta^2}}{\xi}-\frac{\varrho^2}{2}\log\frac{b-\zeta+\sqrt{4\xi^2+(b-\zeta)^2}}{2\xi}$$

$$-\frac{\varrho^2}{2}\log\frac{b+\zeta+\sqrt{4\xi^2+(b+\zeta)^2}}{2\zeta+\sqrt{4\xi^2+4\zeta^2}}=\varphi(\varrho,\xi,\zeta,b).$$

§ 7.

Die Funktion $\varphi(\varrho,\xi,\zeta,b)$.

Um die Funktion $\varphi(\varrho,\xi,\zeta,b)$ genauer zu untersuchen, betrachten wir zunächst diejenigen Glieder von φ, in denen ϱ explizite vorkommt, und bezeichnen ihre Gesamtheit mit $\psi(\varrho,\xi,\zeta,b)$.

Es ist also

$$(35)\quad \psi(\varrho,\xi,\zeta,b)=b\sqrt{\varrho^2+4b^2}+\frac{\varrho^2}{2}\log\frac{2b+\sqrt{\varrho^2+4b^2}}{\varrho}-\frac{b+\zeta}{2}\sqrt{\varrho^2+(b+\zeta)^2}+\frac{b-\zeta}{2}\sqrt{\varrho^2+}$$

$$-\frac{\varrho^2}{2}\log\frac{b+\zeta+\sqrt{\varrho^2+(b+\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{\varrho^2+(b-\zeta)^2}}-\frac{\varrho^2}{2}\log\frac{b-\zeta+\sqrt{4\xi^2+(b-\zeta)^2}}{2\xi}-\frac{\varrho^2}{2}\log\frac{b+\zeta+\sqrt{4\xi^2+(}}{2\zeta+\sqrt{4\xi^2+}}$$

Berechnet man $\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}$, so ergibt sich nach einigen Reduktionen die Formel

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}=\log\frac{2b+\sqrt{\varrho^2+4b^2}}{\varrho}\cdot\frac{b-\zeta+\sqrt{\varrho^2+(b-\zeta)^2}}{b+\zeta+\sqrt{\varrho^2+(b+\zeta)^2}}+\log\tau(\xi,\zeta,b),$$

wo

$$\tau(\xi,\zeta,b)=\frac{2\xi}{b-\zeta+\sqrt{4\xi^2+(b-\zeta)^2}}\cdot\frac{2\zeta+\sqrt{4\xi^2+4\zeta^2}}{b+\zeta+\sqrt{4\xi^2+(b+\zeta)^2}}$$

ist.

Da die Funktionen $\frac{2b+\sqrt{\varrho^2+4b^2}}{\varrho}$ und $\frac{b-\zeta+\sqrt{\varrho^2+(b-\zeta)^2}}{b+\zeta+\sqrt{\varrho^2+(b+\zeta)^2}}$ abnehmend sind und die Zahl ϱ in unserem Falle gewiß der Ungleichheit

$$0 \leqq \varrho \leqq \xi$$

genügt, so ist

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} \geqq \log\frac{2b+\sqrt{\xi^2+4b^2}}{\xi}\cdot\frac{b-\zeta+\sqrt{\xi^2+(b-\zeta)^2}}{b+\zeta+\sqrt{\xi^2+(b+\zeta)^2}}\tau(\xi,\zeta,b)$$

$$= \log 2\,\frac{2b+\sqrt{\xi^2+4b^2}}{b+\zeta+\sqrt{\xi^2+(b+\zeta)^2}}\cdot\frac{b-\zeta+\sqrt{\xi^2+(b-\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{4\xi^2+(b-\zeta)^2}}\cdot\frac{2\zeta+\sqrt{4\xi^2+4\zeta^2}}{b+\zeta+\sqrt{4\xi^2+(b+\zeta)^2}}.$$

Die Funktionen

$$\frac{2b+\sqrt{\xi^2+4b^2}}{b+\zeta+\sqrt{\xi^2+(b+\zeta)^2}},\qquad \frac{b-\zeta+\sqrt{\xi^2+(b-\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{4\xi^2+(b-\zeta)^2}},$$

als Funktionen von ξ betrachtet, sind abnehmend, die Funktion

$$\frac{2\zeta+\sqrt{4\xi^2+4\zeta^2}}{b+\zeta+\sqrt{4\xi^2+(b+\zeta)^2}}$$

ist dagegen wachsend.

Wegen

$$0 \leqq \xi \leqq a$$

folgt hieraus

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} \geqq \log 2\,\frac{2b+\sqrt{a^2+4b^2}}{b+\zeta+\sqrt{a^2+(b+\zeta)^2}}\cdot\frac{b-\zeta+\sqrt{a^2+(b-\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{4a^2+(b-\zeta)^2}}\cdot\frac{2\zeta}{b+\zeta}.$$

Von dieser Stelle an wollen wir auf die vollständige Lösung unseres Problems des Maximums der Differenz $V_{T_0}(P) - V_{T_0}(Q)$ verzichten und uns lediglich auf den Fall beschränken, daß

$$\zeta = \frac{b}{3}$$

gewählt wurde. Dies bedeutet, daß wir es anstatt mit einer Extremumaufgabe der Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen ξ, ζ, mit einer analogen Aufgabe für eine Funktion einer Veränderlichen ξ zu tun haben. Geometrisch besagt dies: die Ebene $z = \zeta$ ist ein für alle Male festgewählt.

Es ist sodann

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} \geqq \log 2\,\frac{2b+\sqrt{a^2+4b^2}}{\frac{4b}{3}+\sqrt{a^2+\frac{16b^2}{9}}}\cdot\frac{\frac{2b}{3}+\sqrt{a^2+\frac{4b^2}{9}}}{\frac{2b}{3}+\sqrt{4a^2+\frac{4b^2}{9}}}\cdot\frac{\frac{2b}{3}}{\frac{4b}{3}}.$$

Setzt man noch

$$\frac{b}{a} = \lambda,$$

so gilt

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}\Big|_{\zeta=\frac{b}{3}} \geqq \log\frac{2\lambda+\sqrt{1+4\lambda^2}}{\frac{4}{3}\lambda+\sqrt{1+\frac{16}{9}\lambda^2}}\cdot\frac{\frac{2}{3}\lambda+\sqrt{1+\frac{4}{9}\lambda^2}}{\frac{2}{3}\lambda+\sqrt{4+\frac{4}{9}\lambda^2}} = w(\lambda),$$

$$w'(\lambda) = \left\{\frac{2}{\sqrt{1+4\lambda^2}} - \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1+\frac{16}{9}\lambda^2}}\right\} + \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{9}\lambda^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+\frac{4}{9}\lambda^2}}\right\}.$$

Beide Klammerausdrücke sind hier positiv, also

$$w'(\lambda) > 0.$$

Wegen $a \leqq \frac{b}{5}$ ist $\lambda \geqq 5$ und daher sogar

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} \geqq w(4) = \log 3\cdot\frac{8+\sqrt{65}}{16+\sqrt{73}}\cdot\frac{8+\sqrt{73}}{18} > \log\frac{1}{6}\cdot\frac{(8+8)(8+8)}{(16+9)} = \log\frac{256}{150} > 0.$$

Das für $\psi(\varrho, \xi, \zeta, b)$ bewiesene Ergebnis lautet also:
Für

$$0 \leqq \varrho \leqq \xi \leqq a \leqq \frac{b}{4}, \qquad \zeta = \frac{b}{3}$$

ist $\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} > 0$, demnach also auch $\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} > 0$ und daher

$$\varphi\left(\varrho, \xi, \frac{b}{3}, b\right) \leqq \varphi\left(\xi, \xi, \frac{b}{3}, b\right),$$

woraus folgt

$$\frac{V_{T_0}(P) - V_{T_0}(Q)}{2\pi} \leqq b\sqrt{\xi^2+4b^2} - 2b^2 + \frac{\xi^2}{2}\log\frac{2b+\sqrt{\xi^2+4b^2}}{\xi}$$

$$-\frac{b}{3}\sqrt{2\xi^2+\frac{4b^2}{9}} + \frac{b}{3}\sqrt{\xi^2+\frac{4b^2}{9}} - \xi^2\log\frac{\frac{2b}{3}+\sqrt{2\xi^2+\frac{4b^2}{9}}}{\xi\sqrt{2}} + \frac{\xi^2}{2}\log\frac{\frac{2b}{3}+\sqrt{\xi^2+\frac{4b^2}{9}}}{\xi}$$

$$-\frac{\xi^2}{2}\log\frac{\frac{2b}{3}+\sqrt{4\xi^2+\frac{4b^2}{9}}}{2\xi} - \frac{\xi^2}{2}\log\frac{\frac{4b}{3}+\sqrt{4\xi^2+\frac{16}{9}b^2}}{\frac{2b}{3}+\sqrt{4\xi^2+\frac{4b^2}{9}}} = \varphi_1(\xi, b).$$

Es ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial b} = \sqrt{\xi^2+4b^2} - 2b - \frac{1}{3}\sqrt{2\xi^2+\frac{4b^2}{9}} + \frac{1}{3}\sqrt{\xi^2+\frac{4b^2}{9}} - \frac{1}{3}\frac{\xi^2}{\sqrt{4\xi^2+\frac{16}{9}b^2}}.$$

Wir setzen

$$\frac{\xi}{b} = \nu$$

in den letzten Ausdruck ein und bekommen

$$\frac{1}{2b}\frac{\partial\varphi_1}{\partial b} = 2\sqrt{1+\frac{\nu^2}{4}} - 2 - \frac{2}{9}\sqrt{1+\frac{9}{2}\nu^2} + \frac{2}{9}\sqrt{1+\frac{9}{4}\nu^2} - \frac{1}{4}\frac{\nu^2}{\sqrt{1+\frac{9}{4}\nu^2}}.$$

Wegen

$$1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2<\sqrt{1+z}<1+\frac{1}{2}z, \quad 1-\frac{1}{2}z<\frac{1}{\sqrt{1+z}}$$

ergibt sich die Ungleichheit

$$\frac{1}{2b}\frac{\partial\varphi_1}{\partial b}\leqq 2\left(1+\frac{\nu^2}{8}\right)-2-\frac{2}{9}\left(1+\frac{9}{4}\nu^2-\frac{1}{8}\cdot\frac{81}{4}\nu^4\right)+\frac{2}{9}\left(1+\frac{9}{8}\nu^2\right)-\frac{1}{4}\nu^2\left(1-\frac{9}{8}\nu^2\right)$$
$$=-\frac{1}{4}\nu^2+\frac{27}{32}\nu^4=\frac{\nu^2}{4}\left(-1+\frac{27}{8}\nu^2\right).$$

Aus $\xi\leqq a\leqq\frac{b}{5}$ folgt

$$\frac{\xi}{b}=\nu\leqq\frac{1}{5}$$

und damit endlich

$$\frac{1}{2b}\frac{\partial\varphi_1}{\partial b}\leqq 0.$$

Die Funktion $\varphi_1(\xi, b)$ ist, als Funktion von b allein betrachtet, monoton abnehmend für $b\geqq 5\xi$. Hieraus folgt die Ungleichheit

$$\frac{V_{T_0}(P)-V_{T_0}(Q)}{2\pi}\leqq\varphi_1(\xi, 5\xi)\leqq -0{,}067\,\xi^2.$$

Demnach haben wir folgendes bewiesen: Ist

$$\xi\leqq a\leqq\frac{b}{5} \quad \text{und} \quad \zeta=\frac{b}{3},$$

so ist

$$V_{T_0}(P)-V_{T_0}(Q)\leqq 0.$$

Mithin bildet die Zahl Null die obere Schranke der Differenz $V_{T_0}(P)-V_{T_0}(Q)$. Daß diese Zahl gleichzeitig die genaue obere Grenze dieser Differenz darstellt, schließen wir daraus, daß der absolute Wert derselben mit dem Volumen T_0 gegen Null konvergiert.

Unser Variationsproblem ist also in dem für uns wichtigen Spezialfall vollständig gelöst. Innerhalb der Menge $\mathfrak{M}$ gibt es für $\frac{b}{a}\geqq 5$, $\zeta=\frac{b}{3}$ keine Lösung im eigentlichen Sinne, es sei denn, daß wir den Abschnitt der z-Achse auch als eine zu $\mathfrak{M}$ gehörende „Figur" betrachten wollen.

§ 8.

Gleichgewichtsfiguren.

Es sei jetzt T eine Gleichgewichtsfigur homogener Flüssigkeit von der Dichte f, die mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert. Wir setzen voraus, daß T der Menge $\mathfrak{M}$ angehört, also die sämtlichen Voraussetzungen des § 1 erfüllt. Bezeichnet man noch die Gravitationskonstante mit $\varkappa$, so ist auf dem Rande S von T bekanntlich

$$\varkappa f V(P)+\frac{\omega^2}{2}(x_P^2+y_P^2)=\text{konst.}$$

Wendet man diese Gleichung auf den Höchstpunkt $P(0, 0, b)$ und den früher betrachteten Punkt $Q(\xi, 0, \zeta)$ an, so folgt

$$\varkappa f V(P) = \varkappa f V(Q) + \frac{\omega^2}{2}\xi^2,$$

also

$$V(P) - V(Q) > 0.$$

Demnach muß also

$$\frac{b}{a} < 5$$

sein.

Bemerkung. Es ist leicht einzusehen, daß unser Ergebnis auch für verschiedene andere Klassen von Gleichgewichtsfiguren seine Geltung behält. In der Tat benutzen wir bei der Anwendung der Ergebnisse der Paragraphen 1 bis 7 nur den Umstand, daß für die Gleichgewichtsfigur die Ungleichheit

$$V(P) - V(Q) > 0$$

besteht. Diese ist aber allemal dann richtig, wenn T vom Kugeltypus ist und Q der z-Achse näher liegt als der „Höchstpunkt“ P. Demnach gilt unser Ergebnis z. B. gewiß für alle Rotationsfiguren vom Kugeltypus.

(Eingegangen am 30. Mai 1931.)

Die Greensche Funktion des wellenmechanischen Keplerproblems.

Von

J. Meixner in München *).

§ 1.

Die Greensche Funktion in der Wellenmechanik.

1. Einführung.

Ist ein Eigenwertproblem in Gestalt eines linearen selbstadjungierten Differentialausdruckes $L(u) + \lambda u$ zusammen mit gewissen Randbedingungen auf der Begrenzung des Grundgebietes vorgelegt, so versteht man unter der Greenschen Funktion dieses Differentialausdruckes eine Lösung der Differentialgleichung $L(u) + \lambda_0 u = 0$, die an einer beliebig vorgegebenen Stelle eine Singularität von bestimmter Art besitzt; λ_0 darf jedoch kein Eigenwert sein, da sonst eine Lösung im allgemeinen nicht existieren würde. Man kann nun auch versuchen, bei der Schrödingerschen Wellengleichung eine solche Funktion aufzustellen und nach ihrer Bedeutung fragen. Diese Funktion wurde in einem Grenzfalle eingehend von A. Sommerfeld bei der Schwingungsgleichung [1]), ebenfalls von A. Sommerfeld [2]) sowie von W. Gordon [3]) und G. Temple [4]) beim Keplerproblem für den Fall, daß die erwähnte Singularität im Unendlichen liegt, untersucht.

---

*) Münchener Dissertation.

[1]) A. Sommerfeld, Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **21** (1913), S. 309–353, insbesondere S. 326ff.

[2]) A. Sommerfeld, Annalen d. Physik **11** (1931), S. 257. Unser § 1 ist zum Teil eine methodische Erweiterung der am Schluß der Sommerfeldschen Arbeit gegebenen Zusätze.

[3]) W. Gordon, Zeitschr. f. Physik **48** (1928), S. 180.

[4]) G. Temple, Proc. Royal Soc. London **121** (1928), S. 673.

Wir wollen hier die Eigenschaften der Greenschen Funktion der Wellengleichung in etwas größerer Allgemeinheit betrachten. Da das Spektrum der Wellengleichung in gewissen Fällen sämtliche positiven und negativen Energiewerte umfassen kann[5]), wollen wir im allgemeinen die Greensche Funktion als Lösung der Wellengleichung mit komplexem Energiewert ansehen. Wir können dann diesen Energiewert gegen eine Stelle des kontinuierlichen Spektrums rücken lassen und erhalten dann verschiedene Funktionen, je nachdem ob wir von der positiv oder negativ imaginären Seite der reellen Energieachse ausgehen. D. h. zu einem Eigenwert des kontinuierlichen Spektrums gibt es zwei charakteristische Funktionen, die allerdings nicht mehr die Eigenschaften der Greenschen Funktion besitzen; gerade sie werden aber eine nützliche Bedeutung haben.

Bei der Schwingungsgleichung mit dem nirgends im Endlichen begrenzten unendlichen dreidimensionalen Raum als Grundgebiet lauten diese beiden Funktionen $-\frac{e^{ikR}}{4\pi R}$ und $-\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}$; R ist der Abstand von dem singulären Punkt, den wir auch als Quellpunkt Q bezeichnen wollen. Wenn wir diese Funktionen z. B. optisch deuten, so stellen sie divergierende bzw. konvergierende Wellen dar, die vom Quellpunkte ausströmen bzw. in ihn hineinmünden. Wellenmechanisch ergibt sich entsprechend ein Elektronenstrom, der eine Quelle bzw. eine Senke besitzt, wie unten gezeigt werden soll.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für die fördernden Ratschläge bei ihrer Durchführung bin ich Herrn Professor A. Sommerfeld zu großem Dank verpflichtet.

2. Definition der Greenschen Funktion.

Wir fassen nun die Verhältnisse bei der Schrödingerschen Wellengleichung etwas näher ins Auge. Wir schreiben diese in Analogie zur Schwingungsgleichung

$$\Delta\psi + (k^2 - U)\psi = 0. \tag{1}$$

Dabei ist also mit den üblichen Bezeichnungen

$$k^2 = \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\cdot E; \qquad U = \frac{8\pi^2\mu}{h^2}V(x, y, z).$$

V ist das reelle und stetige Kräftepotential. (Würde man für V Unstetigkeiten zulassen, wie sie bei den Potentialansätzen beim radioaktiven Zerfall u. dgl. angenommen werden, so würde sich an den folgenden Über-

[5]) H. Weyl führt als Beispiel dafür die Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2} + (x+\lambda)u = 0$ mit dem Grundgebiet $0 < x < +\infty$ an; Math. Annalen 68 (1910), S. 220.

legungen nichts Wesentliches ändern.) Als Greensche Funktion zu einem Wert k^2, der kein Eigenwert ist, definieren wir eine Funktion G mit folgenden Eigenschaften[6]):

I. Sie ist im ganzen Raum zweimal stetig differenzierbar und genügt der Differentialgleichung (1), beides mit Ausnahme des Quellpunktes Q.

II. In diesem wird sie wie $\frac{1}{R}$ unendlich, wo R wieder der Abstand des Aufpunktes P vom Quellpunkt ist.

III. Ihr absoluter Betrag ist über den ganzen Raum quadratisch integrierbar, und $\left|\frac{\partial G}{\partial n}\right|$ verschwinde für große R stärker als $R^{-\frac{1}{2}}$.

IV. Sie wird normiert durch die Forderung, daß das Integral $\lim_{\sigma \to Q} \int \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma$ den Wert 1 besitzt. Dabei ist n die äußere Normale der Oberfläche σ, die den Quellpunkt umschließt und in der Grenze gegen ihn zusammenschrumpfen soll.

Diese Definition für die Greensche Funktion im dreidimensionalen Raum ist für eine Dimension auf bekannte Weise zu modifizieren.

Setzen wir nun die Existenz einer solchen Funktion, die diesen vier Forderungen Genüge leistet, voraus, so ist sie dadurch eindeutig bestimmt. Seien nämlich G_1 und G_2 zwei Greensche Funktionen zum Quellpunkt Q und G eine solche zum Quellpunkt Q', der von Q verschieden sein soll. Dann integrieren wir den Ausdruck $G \cdot \Delta (G_1 - G_2) - (G_1 - G_2) \cdot \Delta G$, der infolge der Differentialgleichung (1), abgesehen von Q und Q', überall verschwindet, über den ganzen Raum ausschließlich zweier kleiner Kugeln um Q und Q'. Formen wir dieses Integral nach dem Greenschen Satze in ein Oberflächenintegral über die beiden Kugeln um Q und Q' um, so ergibt sich, daß $G_1 - G_2 = 0$.

Indem man den Ausdruck $G(P,Q) \cdot \Delta G(P,Q') - G(P,Q') \cdot \Delta G(P,Q) = 0$ ebenso behandelt, wie das oben geschehen ist, erkennt man, daß die Greensche Funktion in ihren beiden Argumenten, Aufpunkt und Quellpunkt, symmetrisch ist[7]).

Formal kann die obige Definition der Greenschen Funktion ersetzt werden durch folgende:

---

[6]) Diese stimmen im wesentlichen mit denen überein, die Sommerfeld a. a. O. formuliert hat. Der Unterschied besteht in III. Diese Forderung können wir aufstellen, da wir für k^2 einen Wert zugrunde legen, der kein Eigenwert ist. Wird k^2 Eigenwert, so müssen wir sie wesentlich einschränken und können nur die Gültigkeit der Ausstrahlungs- bzw. Einstrahlungsbedingung verlangen. Siehe auch weiter unten!

[7]) Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Berlin 1924, S. 285.

Wir suchen eine Funktion, die im ganzen Raume der Differentialgleichung (k^2 sei kein Eigenwert von (1))

$$\Delta G + (k^2 - U) \cdot G = f(P, Q) \tag{2}$$

genügt. Außerdem soll sie die obige Forderung III. erfüllen. $f(P, Q)$ ist eine Funktion von P, die ein steiles Maximum an der Stelle $P = Q$ hat, und für die $\int f(P, Q)\, d\tau_P = 1$ ist. Diese Lösung ist eindeutig bestimmt, denn gäbe es zwei solche, so wäre deren Differenz eine Lösung von (1) im ganzen Raume und wegen der Art ihres Verschwindens im Unendlichen eine Eigenfunktion; k^2 wäre also entgegen der Voraussetzung ein Eigenwert.

Um nun zu der Greenschen Funktion selbst zu gelangen, machen wir einen Grenzübergang, der die Funktion $f(P, Q)$ in eine Funktion überführt, die überall verschwindet außer im Punkte $P = Q$, wo sie derart unendlich wird, daß $\int f(P, Q)\, d\tau_P = 1$. ($f$ ist also in der Grenze nichts anderes als das Produkt dreier Diracscher δ-Funktionen $\delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0)$.) Integrieren wir nun (2) über ein kleines Raumstück um Q, so ergibt sich nach Ausführung des Grenzüberganges gerade die Normierungsbedingung für die Greensche Funktion

$$\lim_{\sigma \to Q} \int \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma = 1 \tag{3}$$

durch Umformen des Raumintegrals in ein Oberflächenintegral.

3. Entwicklung der Greenschen Funktion nach Eigenfunktionen.

Wir denken uns nun die Lösung der Differentialgleichung (2) nach den Eigenfunktionen von (1) entwickelt, und zwar bevor wir für f den angedeuteten Grenzübergang ausgeführt haben. Die Eigenfunktionen des diskreten Spektrums seien wie gewöhnlich normiert durch $\int \psi_n \psi_n^*\, d\tau = 1$, die Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums mögen in der k-Skala normiert werden, so daß also

$$\lim \int_{\Delta k} dk \int \psi(k, P)\, \psi^*(\bar{k}, P)\, d\tau = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem $\bar{k}$ in Δk gelegen ist oder nicht. Die Entwicklung nach den Eigenfunktionen $\psi_n(P)$ des diskreten und $\psi(\varrho, P)$ des kontinuierlichen Spektrums für G und f sei nun:

$$G(P, Q) = \sum A_n(Q)\, \psi_n(P) + \int A(\varrho, Q)\, \psi(\varrho, P)\, d\varrho,$$
$$f(P, Q) = \sum B_n(Q)\, \psi_n(P) + \int B(\varrho, Q)\, \psi(\varrho, P)\, d\varrho$$

(zu n gehört der Eigenwert k_n^2, zu ϱ der Eigenwert ϱ^2). Einsetzen in die Differentialgleichung (2) liefert dann sofort

$$A_n(Q) = \frac{B_n(Q)}{k^2 - k_n^2}; \qquad A(\varrho, Q) = \frac{B(\varrho, Q)}{k^2 - \varrho^2}.$$

Die Koeffizienten B bestimmen sich auf Fouriersche Weise zu

$$B_n(Q) = \int f(P,Q)\,\psi_n^*(P)\,d\tau \qquad \text{und} \qquad B(\varrho,Q) = \int f(P,Q)\,\psi^*(\varrho,P)\,d\tau\,.$$

Nach Ausführung des Grenzüberganges für f resultiert also $B_n(Q) = \psi_n^*(Q)$, $B(\varrho,Q) = \psi^*(\varrho,Q)$. Wir erhalten daher für die Greensche Funktion unter der Voraussetzung der Konvergenz folgende Entwicklung[8]):

$$G(P,Q) = \sum \frac{\psi_n(P)\,\psi_n^*(Q)}{k^2 - k_n^2} + \int \frac{\psi(\varrho,P)\,\psi^*(\varrho,Q)}{k^2 - \varrho^2}\,d\varrho. \tag{4}$$

Nun ist noch zu berücksichtigen, daß die Eigenwerte unter Umständen entartet sein können. Im diskreten Spektrum ist dann die Entartung immer endlichfach. Unter der Summe in (4) hat man dann auch noch die Summe über die Produkte $\psi_n(P)\,\psi_n^*(Q)$ der zu einem Eigenwert gehörenden orthogonalisierten und normierten Eigenfunktionen zu verstehen. — Im kontinuierlichen Spektrum kann die Entartung noch auf verschiedene Weise unendlichfach sein. Sie kann je nach dem Fall durch diskrete oder einen oder mehrere kontinuierliche Parameter oder auch durch beides beschrieben werden. Die Natur dieser Entartung hängt jedoch von der Art der Orthogonalisierung der Eigenfunktionen des entarteten Eigenwertes ab.

Beim Keplerproblem in drei Dimensionen können wir drei Fälle anführen.

1. Bei Separierung desselben in Polarkoordinaten ergibt sich bekanntlich eine zweifach diskrete Entartung; ihre Parameter sind die azimutale und und die magnetische Quantenzahl.

2. Bei Separierung in parabolischen Koordinaten ist die Entartung bezüglich der magnetischen Quantenzahl wieder diskret; zudem tritt jedoch auch ein kontinuierlicher Parameter auf (siehe § 2).

3. Die Greensche Funktion des Keplerproblems zu einem Eigenwert des kontinuierlichen Spektrums ist eine Eigenfunktion der Schrödingergleichung, falls der Quellpunkt im Unendlichen liegt (siehe (19)); läßt man den Quellpunkt auf der ganzen Kugel mit dem Radius $R = \infty$ variieren, so sind die zu verschiedenen Lagen des Quellpunktes gehörigen Eigenfunktionen nach A. Sommerfeld[9]) zueinander orthogonal und umfassen alle Eigenfunktionen des betreffenden Eigenwertes; sie werden also durch zwei kontinuierliche Parameter beschrieben, nämlich $0 < \Theta < \pi$ und $0 < \Phi < 2\pi$, wenn R, Θ und Φ die Polarkoordinaten des Quellpunktes sind.

Der Entartung im kontinuierlichen Spektrum wird dadurch in (4) Rechnung getragen, daß zu dem Integral noch eine Summe für diskrete

---

[8]) Wären die Eigenfunktionen in der $f(k)$-Skala normiert, so wäre der Ausdruck (4) mit der Abänderung zu versehen, daß statt dk im Integral $df(k)$ zu stehen hätte.

[9]) Siehe [2]).

Entartung bzw. Integrale über die Parameter der kontinuierlichen Entartung treten. Ist z. B. ein kontinuierlicher Parameter ζ vorhanden, so sind die Eigenfunktionen in der $\varrho - \zeta$-Skala zu normieren, und statt $\int d\varrho$ in (4) haben wir $\int\int d\varrho\, d\zeta$. Auf diesen Fall werden wir bei der Greenschen Funktion des dreidimensionalen Keplerproblems stoßen.

Die Greensche Funktion selbst ist jedoch trotz dieser formalen Unterschiede den Verschiedenheiten der Entartung gegenüber invariant.

In der Gestalt (4) kommt die Symmetrie der Greenschen Funktion in P und Q nicht unmittelbar zum Ausdruck, da wir die Eigenfunktionen als komplex angenommen haben. Jedoch legen wir uns keine Beschränkung der Allgemeinheit auf, wenn wir die Eigenfunktionen reell ansetzen. Ist nämlich eine Eigenfunktion ψ komplex, so ist auch die konjugiert komplexe ψ^* eine Eigenfunktion, d. h. der Eigenwert ist entartet. (Der Fall, daß die an sich reelle Eigenfunktion noch einen komplexen konstanten Faktor hat, hat natürlich nicht notwendig Entartung zur Folge.) Dann können wir aber die beiden Eigenfunktionen $(\psi + \psi^*)$ und $i(\psi - \psi^*)$ orthogonalisieren und normieren und erhalten so zwei reelle Eigenfunktionen. Damit folgt also aus (4), daß die Greenschen Funktionen zu zwei konjugiert komplexen Werten von k^2 auch konjugiert komplex sind.

4. Die Greensche Funktion und das kontinuierliche Spektrum.

An Hand der Darstellung (4) können wir uns nun leicht den Grenzübergang überlegen, wo wir den komplexen Wert k^2 gegen eine Stelle des kontinuierlichen Spektrums rücken lassen. Dann kann der Integrationsweg für das Integral über die Eigenwerte des kontinuierlichen Spektrums nicht mehr längs der reellen k^2-Achse verlaufen, sondern muß ihr ausweichen, und zwar nach verschiedenen Seiten, je nachdem ob wir von der positiv oder negativ imaginären Seite aus an sie herangehen. Dementsprechend erhalten wir zwei verschiedene Funktionen (die wir auch als Greensche Funktionen zum Eigenwert k^2 bezeichnen wollen), deren Differenz wir durch Residuenbildung im Punkte k finden. Nach Fig. 1 ergibt sich

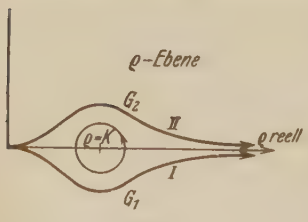


Fig. 1.

$$(5) \qquad G_1 - G_2 = G_1 - G_1^* = -\frac{\pi i}{k} \cdot \psi(k, P) \cdot \psi^*(k, Q).$$

$G_1 - G_2$ ist also eine Eigenfunktion des kontinuierlichen Spektrums. Im Falle der Entartung des Eigenwertes haben wir statt dieses Produktes allgemeiner wieder eine Summe bzw. ein Integral über derartige Produkte zu setzen.

Die verschiedenen charakteristischen Eigenschaften der Greenschen Funktion gehen bei diesem Grenzübergang gegen das kontinuierliche Spektrum zum Teil verloren, so vor allem die Eindeutigkeit. Sie kann auch nicht mehr als Kern einer der Wellengleichung äquivalenten Integralgleichung verwendet werden, da sie im Unendlichen nicht mehr genügend stark verschwindet und daher die auftretenden Integrale nicht mehr alle konvergieren. Wie jedoch A. Sommerfeld am Beispiel der Schwingungsgleichung gezeigt hat, kann man die Eindeutigkeit dadurch wieder erzwingen, daß man im Unendlichen eine andere Forderung stellt, die er die Aus- bzw. Einstrahlungsbedingung nennt. Sie lautet:

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial G}{\partial n} - ikG\cdot\cos(r,n)\right) = 0$$

(6)

$$\text{bzw.}\quad \lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial G}{\partial n} + ikG\cdot\cos(r,n)\right) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r\to\infty} rG \neq \infty .$$

Der Ausstrahlungsbedingung entspricht der Integrationsweg *I* der Fig. 1, der Einstrahlungsbedingung der Weg *II*. Durch eine dieser beiden Bedingungen sowie unsere früheren Forderungen I, II und IV ist dann die Greensche Funktion in dem Grenzfalle eindeutig bestimmt.

Bekanntlich hat die Greensche Funktion einfache Pole als Funktion von k^2 an denjenigen Stellen, die Eigenwerte des diskreten Spektrums sind. Wir erkennen nun auch die Singularität, die durch das kontinuierliche Spektrum in die Greensche Funktion hineinkommt. Setzen wir voraus, daß das kontinuierliche Spektrum nicht alle reellen Werte von k^2 umfaßt, so können wir die Greensche Funktion von einer Seite der reellen k^2-Achse durch eine Lücke im Spektrum nach der anderen Seite fortsetzen. Gehen wir aber von hier aus durch das kontinuierliche Spektrum hindurch wieder nach der ersten Seite, so kommen wir nicht zum Anfangswert zurück, sondern zu einem davon um (5) verschiedenen Wert. Diese so entstehende Funktion kann daher auch nicht mehr unseren Bedingungen I bis IV genügen, da wir schon eine solche Funktion haben, die ihnen genügt, und diese durch sie eindeutig bestimmt ist. Wir müssen deshalb das kontinuierliche Spektrum als einen Verzweigungsschnitt ansehen, über den die Greensche Funktion nicht fortgesetzt werden darf.

Betrachten wir als einfaches Beispiel die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in drei Dimensionen. Sie lautet $\frac{-e^{ikR}}{4\pi R}$ und verschwindet im Unendlichen exponentiell, wenn wir $0 < \arg k < \pi$ nehmen. Lassen wir nun $\arg k$ gegen 0 bzw. π konvergieren, so erhalten wir zwei Funktionen, die der Ausstrahlungs- bzw. der Einstrahlungsbedingung genügen.

5. Die Greensche Funktion und der wellenmechanische Elektronenstrom.

Wir wollen nun auf die physikalische Bedeutung der Greenschen Funktion eingehen. Betrachten wir einen Eigenzustand des wellenmechanischen Problems, so ergibt sich aus der Differentialgleichung, daß die Strömung quellenfrei ist[10]). Anders bei der Greenschen Funktion. An sich ist ja bei einer Lösung der Wellengleichung mit komplexem k im allgemeinen an keiner Stelle die Ergiebigkeit oder Divergenz des Elektronenstromes gleich Null. Hierzu kommt jedoch noch eine ausgezeichnete Stelle bei der Greenschen Funktion, nämlich der Quellpunkt. Während sonst die Quellen und Senken räumlich verteilt sind, tritt im Punkte Q noch eine punktförmige Quelle oder Senke auf. Durch die unendlich ferne Kugel fließt jedoch infolge des Verschwindens der Greenschen Funktion kein Strom. Geht nun k^2 gegen einen Eigenwert des kontinuierlichen Spektrums, so wird der ganze Raum divergenzfrei, und nur im Punkte Q ist die Divergenz von Null verschieden. Es muß also nun auch durch die unendlich ferne Kugel ein Elektronenstrom fließen von der gleichen Größe, wie er dem Quellpunkte entströmt. Es bereitet keine Schwierigkeit, die Ergiebigkeit des Quellpunktes im einen Fall durch ein Integral über die räumlich verteilten Quellen, im anderen Fall durch die Strömung im Unendlichen darzustellen.

Wir drücken zuerst die Ergiebigkeit des Quellpunktes durch das Verhalten der Greenschen Funktion im Quellpunkt aus. Zu dem Zwecke gehen wir von (2) aus und bilden $G^* \cdot \Delta G - G \cdot \Delta G^* + (k^2 - k^{*2}) G G^* = f \cdot (G^* - G)$. Integrieren wir diesen Ausdruck über ein kleines Raumstück um den Quellpunkt und beachten, daß dann, wenn wir damit gegen Null gehen, das Raumintegral über GG^* verschwindet, so erhalten wir

$$\int (G^* \Delta G - G \Delta G^*)\, d\tau = \int \left(G^* \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial G^*}{\partial n} \right) d\sigma = \int f (G^* - G)\, d\tau_P = (G^* - G)_{P=Q}$$

Die räumlich verteilten Quellen erfassen wir, indem wir die Gleichung $G^* \cdot \Delta G - G \cdot \Delta G^* = (k^{*2} - k^2) G G^*$ über den ganzen Raum ausschließlich einer kleinen Kugel um den Punkt Q integrieren. Wandeln wir das Integral links in ein Oberflächenintegral um und lassen den Radius der Kugel gegen Null gehen, so kommt

$$\int \left(G^* \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial G^*}{\partial n} \right) d\sigma = (k^2 - k^{*2}) \int_S G G^*\, d\tau \qquad (S = \text{ganzer Raum}),$$

[10]) Definition des wellenmechanischen Stromes

$$\frac{eh}{4\pi\mu i} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} \right).$$

wo n die äußere Normale ist. Dies ist die Ergiebigkeit des Quellpunktes abgesehen von einem positiven zeitabhängigen Dämpfungsfaktor und einem weiteren konstanten komplexen Faktor. Gehen wir von einem Wert von k^2 zu seinem konjugiert komplexen über, so ändert die Ergiebigkeit ihr Vorzeichen, das heißt Ausstrahlung geht in Einstrahlung über und umgekehrt. Die beiden Seiten der komplexen k^2-Ebene bedeuten also Einstrahlung bzw. Ausstrahlung, und dies bleibt dann auch beim Übergang zum Grenzfalle bestehen.

Fassen wir die beiden Darstellungen für die Ergiebigkeit zusammen, so wird

$$\int \left(G^* \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial G^*}{\partial n} \right) d\sigma = (k^2 - k^{*2}) \int_S G\, G^*\, d\tau = (G^* - G)_{P=Q}.$$

Ist jetzt $k^2 = k^{*2}$, so verliert diese Beziehung ihre Gültigkeit. Wir müssen dann den Strom durch die unendlich ferne Kugel berechnen. Gehen wir speziell von der zur Ausstrahlungsbedingung gehörigen Greenschen Funktion aus und setzen

$$\frac{\partial G}{\partial n} = i\,k\,G + \frac{u}{r}, \qquad \text{wo} \quad \lim_{r\to\infty} u = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r\to\infty} r\,G \neq \infty,$$

so wird

$$\int_\Sigma \left(G^* \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial G^*}{\partial n} \right) d\Sigma = +2\,i\,k \cdot \int_\Sigma G\, G^*\, d\Sigma$$

(Σ = Kugel mit dem Radius $R = \infty$),

da ja das Restintegral

$$\int [r\,G^* \cdot u - r\,G \cdot u^*] \frac{d\Sigma}{r^2}$$

verschwindet, denn der Integrand verschwindet, und das Raumwinkelelement $\frac{d\Sigma}{r^2}$ variiert über einen endlichen Bereich. Als Analogon zur Formel bei komplexem k^2 haben wir demnach, wenn k^2 reell und ein Eigenwert des kontinuierlichen Spektrums ist,

$$\int \left(G^* \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial G^*}{\partial n} \right) d\Sigma = +2\,i\,k \int G\, G^*\, d\Sigma = (G^* - G)_{P=Q}.$$

Auch hier kehrt sich das Vorzeichen des Stromes um, wenn wir von der Ausstrahlungsbedingung zur Einstrahlungsbedingung übergehen.

Im nächsten Abschnitt soll nun die Greensche Funktion des wellenmechanischen Keplerproblems aufgestellt werden. Wir tun dies zunächst allgemein für einen beliebigen komplexen Energiewert und gehen dann zu einem Energiewert des kontinuierlichen Spektrums über. Dieser Fall läßt sich dann realisieren durch eine punktförmige Glühkathode; die von ihr

ausgesandten Elektronen werden im Coulombfelde eines nackten Atomkerns gebeugt. Für große Entfernung der Glühkathode vom Atomkern ergibt sich dann die Rutherfordsche Streuformel[11]).

Es liegt nahe, auch für kompliziertere Probleme die Greensche Funktion zu betrachten. Hierfür käme zunächst das Zweielektronenproblem, d. h. die Beugung eines Kathodenstrahls am Wasserstoffatom (statt am Atomkern) in Betracht. Man findet dieses in der erwähnten Arbeit von A. Sommerfeld kurz diskutiert.

§ 2.

Die Greensche Funktion des wellenmechanischen Keplerproblems.

6. Eindimensionales Keplerproblem.

Wir gehen von dem mathematisch einfacheren Fall des eindimensionalen Keplerproblems aus. Die Besonderheiten, die durch das gleichzeitige Auftreten eines diskreten und eines kontinuierlichen Spektrums entstehen können, treten hier besonders klar zutage.

Das Eigenwertproblem lautet:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(E + \frac{Ze^2}{x}\right)\psi = 0. \tag{7}$$

Als Grundgebiet könnte man wählen $-\infty < x < +\infty$. Dann würde jedoch kein diskretes Spektrum auftreten. Wir legen deshalb das Intervall von 0 bis $+\infty$ zugrunde und suchen dann nach den Eigenfunktionen von (7). Die Eigenwerte des diskreten und des kontinuierlichen Spektrums sind genau dieselben wie beim dreidimensionalen Keplerproblem. Sei nun

$$k^2 = \frac{8\pi^2\mu E}{h^2}; \qquad a = \frac{h^2}{4\pi^2\mu e^2}.$$

Dann sind die normierten Eigenfunktionen des diskreten Spektrums

$$\psi_n(x) = \varkappa_n^{3/2} \cdot 2x \cdot e^{-\varkappa_n x} F(1-n, 2, 2\varkappa_n x),$$

wo

$$n = \frac{Z}{\varkappa_n a} = 1, 2, 3, \ldots \text{ und } \varkappa_n = ik > 0.$$

Das kontinuierliche Spektrum umfaßt alle positiven Energiewerte oder, wie wir auch sagen können, alle positiven k-Werte (denn zu einem negativen k-Wert ergibt sich dieselbe Eigenfunktion wie zu dem entsprechenden positiven). Die Normierungsbedingung

$$\lim_{x\to\infty} \int_{\Delta k} d\bar{k} \int_0^x \psi(k, P) \cdot \psi^*(\bar{k}, P)\, dx = 1, \quad \text{wo } \bar{k} \text{ in } \Delta k,$$

[11]) W. Gordon, a. a. O.

liefert als normierte Eigenfunktion in der k-Skala

$$\psi(k, x) = e^{-ikx} \cdot 2ikx \cdot \Gamma\left(1 + \frac{Z}{ika}\right) \frac{e^{Z\pi/ka}}{\sqrt{2\pi}} F\left(1 - \frac{Z}{ika}, 2, 2ikx\right).$$

Wie die „entartete hypergeometrische Funktion" von drei Argumenten aus der allgemeinen von vier Argumenten sich ableitet, wird in § 3 gezeigt werden.

Sehen wir von einem konstanten komplexen Faktor ab, so ist die Eigenfunktion nur scheinbar komplex, da sie ja wegen (25) gleich der konjugiert komplexen Funktion ist.

Diese Eigenfunktionen setzen wir nun in die Darstellung (4) für die Greensche Funktion ein. Der zugrunde zu legende k-Wert sei mit K bezeichnet; wir setzen ihn als in der positiv imaginären k-Ebene voraus. Der Parameter des kontinuierlichen Spektrums, über den integriert wird, sei mit ϱ bezeichnet. Dann wird

$$\begin{aligned} G(x, x_0) = &\int_0^\infty \frac{d\varrho}{K^2 - \varrho^2} e^{-i\varrho(x+x_0)} 4\varrho^2 x x_0 F\left(1 - \frac{Z}{i\varrho a}, 2, 2i\varrho x\right) \\ &\times F\left(1 - \frac{Z}{i\varrho a}, 2, 2i\varrho x_0\right) \frac{e^{Z\pi/\varrho a}}{2\pi} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{iZ}{\varrho a}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{iZ}{\varrho a}\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K^2 + \varkappa_n^2} \varkappa_n^3 4 x x_0 e^{-\varkappa_n(x+x_0)} F(1-n, 2, 2\varkappa_n x) \\ &\times F(1-n, 2, 2\varkappa_n x_0) \\ = &I + II. \end{aligned}$$

Wir behandeln zunächst das Integral, das mit I bezeichnet ist. In ihm spalten wir $F\left(1 - \frac{Z}{i\varrho a}, 2, 2i\varrho x\right)$ gemäß $F = \frac{1}{2} F_1 + \frac{1}{2} F_2$, in Teilfunktionen auf und ziehen den Integrationsweg für F_1 in die Nähe der negativ imaginären, den für F_2 in die Nähe der positiv imaginären Halbachse hinüber. Die beiden Teilintegrale verschwinden im Unendlichen des vierten bzw. ersten Quadranten exponentiell, falls $x > x_0$; denn das Verhalten ist dort wegen der asymptotischen Darstellung der F-Funktionen in (33) bestimmt durch die Exponentialfunktion $e^{i\varrho(x_0 - x)}$ bzw. $e^{i\varrho(x - x_0)}$, und diese verschwindet für $x > x_0$ exponentiell, wenn der Imaginärteil von ϱ negativ bzw. positiv unendlich wird. Liegt nun K im ersten Quadranten, so wird der Integrationsweg für das Integral mit F_2 über den Pol $\varrho = K$ gezogen, ist K im zweiten Quadranten, so wird der Weg für das Integral mit F_1 über den Pol $\varrho = -K$ gezogen. Der Beitrag vom Residuum dieses Poles ist jedoch in beiden Fällen derselbe, nämlich (wie mit Hilfe von (24)

zu zeigen):

$$(8)\quad G(x,x_0) = -\frac{2\pi i}{2K} e^{-iK(x+x_0)} 4K^2 x x_0 \cdot \frac{1}{2} F_2\left(1-\frac{Z}{iKa}, 2, 2iKx\right) \times F\left(1-\frac{Z}{iKa}, 2, 2iKx_0\right) \frac{e^{Z\pi/Ka}}{2\pi} \cdot \Gamma\left(1+\frac{iZ}{Ka}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{iZ}{Ka}\right).$$

Dies ist bereits die Greensche Funktion für $x > x_0$. Die übrigen Bestandteile heben sich gegenseitig auf, wie wir nun zeigen wollen. Die verbleibenden Integrale können nicht in die imaginäre Achse selbst geschoben werden, da auf ihr die singulären Stellen $\varrho = \frac{Zi}{na}$, mit $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ liegen. Wir führen nun in den beiden Integralen die Transformationen $\varrho = \sigma e^{-i\pi/2}$ bzw. $\varrho = \sigma e^{i\pi/2}$ durch und bringen dadurch beide Integrationswege in die Nähe der reellen Achse. Wir erhalten somit

$$-\int_{\mathfrak{C}_1^0}^{\infty} \frac{i\,d\sigma}{K^2+\sigma^2} \cdot e^{\sigma(x+x_0)} \cdot 4\sigma^2 x x_0 \cdot \frac{1}{2} F_2\left(1+\frac{Z}{\sigma a}, 2, 2\sigma x e^{\pi i}\right) F\left(1+\frac{Z}{\sigma a}, 2, -2\sigma x\right) \times \frac{e^{-Z\pi i/\sigma a}}{2\pi} \Gamma\left(1+\frac{Z}{\sigma a}\right) \Gamma\left(1-\frac{Z}{\sigma a}\right)$$

$$+\int_{\mathfrak{C}_2^0}^{\infty} \frac{i\,d\sigma}{K^2+\sigma^2} e^{-\sigma(x+x_0)} 4\sigma^2 x x_0 \cdot \frac{1}{2} F_1\left(1-\frac{Z}{\sigma a}, 2, 2\sigma x\right) \cdot F\left(1-\frac{Z}{\sigma a}, 2, 2\sigma x\right) \times \frac{e^{Z\pi i/\sigma a}}{2\pi} \Gamma\left(1+\frac{Z}{\sigma a}\right) \Gamma\left(1-\frac{Z}{\sigma a}\right).$$

$\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ sind die Integrationswege, die in Fig. 2 angedeutet sind.

Nun ist nach (24)

$$F_2\left(1+\frac{Z}{\sigma a}, 2, 2\sigma x e^{\pi i}\right) = e^{-2\sigma x} F_1\left(1-\frac{Z}{\sigma a}, 2, 2\sigma x\right) e^{+2\pi i Z/\sigma a},$$

$$F\left(1+\frac{Z}{\sigma a}, 2, 2\sigma x e^{\pi i}\right) = e^{-2\sigma x} F\left(1-\frac{Z}{\sigma a}, 2, 2\sigma x\right).$$

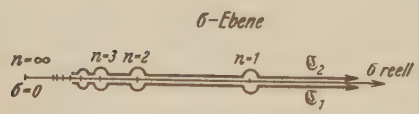


Fig. 2.

Die beiden Integrale oben unterscheiden sich also nicht im Integranden, sondern nur im Vorzeichen und im Integrationsweg. Durchlaufen wir in dem Integral, das über $\mathfrak{C}_2$ erstreckt wird, den Weg umgekehrt, so bleiben nur mehr die Residuen in den in der Fig. 2 angedeuteten Polen, multipliziert mit $2\pi i$. Dies gibt für $\sigma = \frac{Z}{na} = \varkappa_n$, wo $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$-\varkappa_n^3 \frac{1}{K^2+\varkappa_n^2} 4 x x_0 \cdot e^{-\varkappa_n(x+x_0)} F(1-n, 2, 2\varkappa_n x) \cdot F(1-n, 2, 2\varkappa_n x_0),$$

da ja $\frac{1}{2} F_1(1-n, 2, x) = F(1-n, 2, x)$ falls $n = +1, 2, 3, \ldots$ wegen

$F_2(1-n, 2, x) = 0$. Wird nun dieser Ausdruck über n von 1 bis ∞ summiert, so hebt er sich gerade gegen den oben als *II* bezeichneten Ausdruck weg.

Entsprechend wie bei Eigenwertproblemen mit endlichem Grundgebiet, wie z. B. dem der Membran oder dem der schwingenden Saite haben wir auch hier Pole für die Eigenwerte des diskreten Spektrums. Wohl ist die Greensche Funktion (8) in ihrer Abhängigkeit von K regulär für $\frac{Z}{iKa} = n$, da dann die Singularität von $\Gamma\left(1-\frac{Z}{iKa}\right)$ aufgehoben wird durch das Verschwinden von F_2. Hingegen haben wir für $\frac{Z}{iKa} = -n$ in der Tat einen einfachen Pol, der von dem Faktor $\Gamma\left(1+\frac{Z}{iKa}\right)$ herrührt. Der letztere Fall kommt aber nur in Betracht, da wir den imaginären Teil von K als positiv vorausgesetzt haben.

Die Singularität, die durch das kontinuierliche Spektrum hereinkommt, äußert sich, wie in § 1, Abschnitt 4 allgemein gezeigt wurde, durch die Notwendigkeit eines Verzweigungsschnittes. Wird die Funktion (8) für K-Werte mit negativ imaginärem Teil fortgesetzt, so verschwindet die Greensche Funktion für unendlich große x nicht mehr, sondern wird im Gegenteil unendlich; sie hat also diese wichtige Eigenschaft der Greenschen Funktion verloren.

Um die Greensche Funktion auch für $x < x_0$ zu erhalten, braucht in (8) nur x mit x_0 vertauscht zu werden.

Statt durch die allgemeine Formel (4) kann man die Greensche Funktion auch durch folgende Definition gewinnen, die die sinngemäße Spezialisierung der Forderungen I bis IV des § 1, Abschnitt 2 auf eine Dimension darstellt: Sie ist eine stetige Lösung der Differentialgleichung (7) im Gebiet $0 < x < +\infty$ und überall stetig differenzierbar außer im Punkte $x = x_0$, wo die Ableitung einen Sprung von der Größe 1 machen soll; ferner ist ihr absoluter Betrag quadratisch integrierbar. Ist speziell K reell und positiv, so verschwindet die Funktion im Unendlichen nicht mehr, sondern geht wie e^{iKx}; sie genügt von selbst der Ausstrahlungsbedingung, während sie für negative Werte von K der Einstrahlungsbedingung genügt.

7. Das dreidimensionale Keplerproblem.

Wir gehen nun daran, das etwas kompliziertere dreidimensionale Keplerproblem zu behandeln. Wir denken uns wieder einen nackten Atomkern mit der Ladung Ze gegeben, in dessen Feld sich ein Elektron bewegt. Die zugehörige Schrödingergleichung lautet:

$$\Delta\psi + \left(k^2 + \frac{2Z}{ar}\right)\psi = 0, \tag{9}$$

wo die Bedeutung von k und a dieselbe ist wie im vorhergehenden Beispiel. Wir führen parabolische Koordinaten ein durch

$$(10) \quad x = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad y = \sqrt{\xi\eta}\cdot\cos\varphi, \quad z = \sqrt{\xi\eta}\cdot\sin\varphi, \quad r = \frac{\xi+\eta}{2}.$$

In diesen lautet dann (9):

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) + \frac{\xi+\eta}{4\xi\eta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \left[\frac{k^2}{4}(\xi+\eta) + \frac{Z}{a}\right]\psi = 0.$$

Wegen der Kugelsymmetrie des Coulombfeldes ist die Greensche Funktion axialsymmetrisch um die Verbindungslinie Kern-Quellpunkt. Wir wählen diese Achse als x-Achse und brauchen dann nur die Eigenfunktionen zu berücksichtigen, die von der Winkelkoordinate φ unabhängig sind; für einen Quellpunkt, der nicht auf der x-Achse liegt, ergibt sich dann die Greensche Funktion einfach durch eine Drehung des Koordinatensystems.

Die von φ unabhängigen normierten Eigenfunktionen des diskreten Spektrums lauten bekanntlich

$$(11) \quad \psi(n_1, n_2) = \frac{\varkappa_n^{3/2}}{(n\pi)^{1/2}} e^{-\frac{\varkappa_n}{2}(\xi+\eta)}\cdot F(-n_1, 1, \varkappa_n\xi)\cdot F(-n_2, 1, \varkappa_n\eta),$$

wo $n = n_1 + n_2 + 1 = \dfrac{Z}{\varkappa_n a} = 1, 2, 3, \ldots;\ \varkappa = ik.$

Die normierten Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums sind[12]):

$$(12) \quad \psi(k,\zeta) = \frac{k}{2\pi^{3/2}} e^{Z\pi/ka}\,\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\left(\frac{Z}{2ka} + \zeta\right)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{Z}{2ka} + \zeta\right)\right)$$
$$\times e^{-\frac{ik}{2}(\xi+\eta)}\, F\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2ika} - i\zeta, 1, ik\xi\right)\cdot F\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2ika} + i\zeta, 1, ik\eta\right),$$

wo $0 < k < +\infty$, $-\infty < \zeta < +\infty$. ζ ist der Separationsparameter. Entsprechend der Tatsache, daß jeder Eigenwert des kontinuierlichen Spektrums kontinuierlich unendlichfach ist, ist bei der Normierung sowohl über ein Intervall Δk als auch über ein solches $\Delta\zeta$ integriert. Dementsprechend haben wir bei der Greenschen Funktion zwei Integrationsvariable. Die erste entspricht der Integration über das kontinuierliche Spektrum, also über k. Wir wollen aber die Integrationsvariable mit ϱ bezeichnen, da wir den Integrationsweg ins Komplexe schieben werden und wir den Buchstaben k nur für die Eigenwerte des kontinuierlichen Spektrums verwenden wollen. Die zweite Integrationsvariable ζ gehört zur Integration über die Entartung.

[12]) Wegen der Normierung im kontinuierlichen Spektrum siehe W. Gordon, Ann. d. Physik 2 (1929), S. 1031.

Sei nun zur Abkürzung

$$\Theta = \Gamma\Big(\frac{1}{2} + i\Big(\frac{Z}{2\varrho a} + \zeta\Big)\Big)\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{2} + i\Big(-\frac{Z}{2\varrho a} + \zeta\Big)\Big),$$

$$\Theta^* = \Gamma\Big(\frac{1}{2} - i\Big(\frac{Z}{2\varrho a} + \zeta\Big)\Big)\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{2} - i\Big(-\frac{Z}{2\varrho a} + \zeta\Big)\Big).$$

Für die Greensche Funktion folgt dann (bei Weglassung der von φ abhängigen Eigenfunktionen) nach (4):

$$(13)\quad G(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \int_0^\infty \frac{d\varrho}{K^2 - \varrho^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \cdot \psi(\varrho, \zeta; \xi, \eta)\cdot\psi^*(\varrho, \zeta; \xi_0, \eta_0)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=n-1} \frac{1}{K^2 + \varkappa_n^2}\, \psi(n_1, n_2; \xi, \eta)\, \psi^*(n_1, n_2; \xi_0, \eta_0).$$

Der Imaginärteil von K sei wieder positiv. Beide Integrationen sind längs der reellen ϱ- bzw. ζ-Achse zu erstrecken. Das letztere wollen wir dadurch ersetzen, daß wir auch komplexe Integrationswege von $-\infty$ nach $+\infty$ zulassen, die die Pole der Γ-Funktionen in Θ bzw. in Θ^* auf der einen bzw. anderen Seite liegen lassen. Wir betrachten von (13) zuerst wieder nur das Integral. Dieses lautet ausführlich:

$$\int_0^\infty \frac{d\varrho}{K^2 - \varrho^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \cdot \Theta\,\Theta^* \cdot \frac{\varrho^2}{4\pi^3} e^{Z\pi/\varrho a - \frac{i\varrho}{2}(\xi+\eta+\xi_0)} \cdot F\Big(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2i\varrho a} - i\zeta, 1, i\varrho\xi\Big)$$

$$\times F\Big(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2i\varrho a} - i\zeta, 1, i\varrho\xi_0\Big)\cdot F\Big(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2i\varrho a} + i\zeta, 1, i\varrho\eta\Big).$$

Hierin haben wir $\eta_0 = 0$ gesetzt, d. h. den Quellpunkt auf die positive x-Achse gelegt.

Nehmen wir den Fall mit $\xi_0 = 0$ vorweg! In ihm läßt sich das Integral über ζ nach (37) auswerten und die weitere Rechnung verläuft ebenso wie beim eindimensionalen Keplerproblem. Es ergibt sich eine Funktion, die nur von der Entfernung Aufpunkt — Kern abhängt:

$$(14)\qquad G(\xi, \eta; 0, 0)$$

$$= -\frac{iK}{2\pi} e^{Z\pi/Ka - \frac{iK}{2}(\xi+\eta)}\, \Gamma\Big(1 + \frac{iZ}{Ka}\Big)\Gamma\Big(1 - \frac{iZ}{Ka}\Big)\cdot\frac{1}{2}F_2\Big(1 + \frac{iZ}{Ka}, 2, iK(\xi+\eta)\Big).$$

Für $\frac{\xi+\eta}{2} = r = 0$ kommt nach (32) noch eine logarithmische Singularität herein, die von der Singularität des Coulombpotentiales in der Differentialgleichung (9) herrührt.

Wir können in (14) ξ durch ξ_0 ersetzen und erhalten dann die Greensche Funktion längs der Halbachse $\xi = 0$ für den Fall, daß der Quellpunkt auf der Halbachse $\eta = 0$ liegt. Sie ist nur von der Summe

$(\eta + \xi_0)$, d. i. der Entfernung Aufpunkt — Quellpunkt abhängig. Auf der Halbachse $\xi = 0$ ist also G immer dieselbe Funktion der Entfernung vom Quellpunkt, gleichgültig, welches der Abstand Quellpunkt — Kern ist.

Im allgemeinen Fall, wo weder ξ_0 noch ξ verschwinden, läßt sich das Integral über ζ nicht explizit darstellen. Wir spalten dann die Funktion $F(.., ., i\varrho\xi)$ in die Teilfunktionen F_1 und F_2 auf und nehmen dieselbe Verschiebung des Integrationsweges vor, die wir beim eindimensionalen Keplerproblem durchgeführt haben; für deren Möglichkeit ist notwendig, daß $\xi > \xi_0 + \eta$. Wir wollen diese Bedingung als Fall I voranstellen und werden auf die gegensätzlichen Bedingungen, die wir II, III, IV nennen werden, unten zurückkommen. — Der Integrationsweg bleibt im Pole $\varrho = K$ bzw. im Pole $\varrho = -K$ hängen, je nachdem ob K im ersten oder im zweiten Quadranten der komplexen Ebene liegt, und liefert in beiden Fällen durch Residuenbildung

$$(15) \qquad G(\xi, \eta; \xi_0, 0) = -\frac{iK}{4\pi^2} e^{Z\pi/Ka - \frac{iK}{2}(\xi+\xi_0+\eta)}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \cdot \Theta\Theta^* \cdot \frac{1}{2} F_2\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} - i\zeta, 1, iK\xi\right)$$

$$\times F\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} - i\zeta, 1, iK\xi_0\right) F\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} + i\zeta, 1, iK\eta\right).$$

Die übrigen Integrale und der Anteil des diskreten Spektrums an der Greenschen Funktion zerstören sich gegenseitig, weshalb wir in (15) tatsächlich schon die Greensche Funktion vor uns haben. Zum Beweise dieser Tatsache gehen wir aus von:

$$\int_0^{i\infty} \frac{d\varrho}{K^2 - \varrho^2} \cdot \frac{\varrho^2}{4\pi^3} e^{Z\pi/\varrho a - \frac{i\varrho}{2}(\xi+\eta+\xi_0)}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} F_2\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2i\varrho a} - i\zeta, 1, i\varrho\xi\right) \cdot F(\ldots)\, F(\ldots)\, \Theta\Theta^* d\zeta$$

$$+ \int_0^{-i\infty} \frac{d\varrho}{K^2 - \varrho^2} \cdot \frac{\varrho^2}{4\pi^3} e^{Z\pi/\varrho a - \frac{i\varrho}{2}(\xi+\eta+\xi_0)}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2i\varrho a} - i\xi, 1, i\varrho\xi\right) \cdot F(\ldots)\, F(\ldots)\, \Theta\Theta^* d\zeta$$

Der Integrationsweg darf in beiden Fällen nicht ganz an die imaginäre ϱ-Achse hingeschoben werden; denn für gewisse rein imaginäre Werte von ϱ, deren Quadrate die diskreten Eigenwerte liefern, fallen in den Faktoren Θ und Θ^* je an endlich vielen Stellen immer zwei Pole zusammen, zwischen denen der Integrationsweg über ζ hindurchgehen sollte.

Bevor man also mit dem Weg für ϱ an die imaginären ϱ-Halbachsen hingeht, muß der Integrationsweg für ζ über die Pole geschoben werden, die hernach mit einem Pol auf der anderen Seite zusammenfallen würden. Erst dann dürfen wir ϱ an allen Stellen rein imaginär werden lassen.

Wir setzen in den beiden Integralen $\varrho = \sigma e^{-i\pi/2}$ bzw. $\varrho = \sigma e^{+i\pi/2}$ und transformieren damit die positiv bzw. negativ imaginäre Achse in die positive reelle Achse. Es ergeben sich dann in den beiden Integralen als Integrationswege nach σ diejenigen der Fig. 2. Substituieren wir außerdem $\frac{1}{2} + \frac{Z}{2\sigma a} + i\zeta = -\mu$, so folgt mit Hilfe von (24) und (25):

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\mathfrak{C}_1}^{0}\frac{\sigma^2\,d\sigma}{K^2+\sigma^2}\cdot\frac{i}{4\pi^3}\,e^{-\frac{\sigma}{2}(\xi+\eta+\xi_0)-iZ\pi/\sigma a}\cdot\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d\mu}{i}\,\Theta\Theta^*\cdot F\Big(-\frac{Z}{\sigma a}-\mu,1,i\varrho\eta\Big)\\
&\qquad\times F(1+\mu,1,i\varrho\xi_0)\cdot\frac{1}{2}F_1(1+\mu,1,i\varrho\xi)\cdot e^{-2i\pi\mu}\\
&+\int_{\mathfrak{C}_2}^{0}\frac{\sigma^2\,d\sigma}{K^2+\sigma^2}\cdot\frac{i}{4\pi^3}\,e^{-\frac{\sigma}{2}(\xi+\eta+\zeta_0)-iZ\pi/\sigma a}\cdot\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d\mu}{i}\,\Theta\Theta^*\cdot F\Big(-\frac{Z}{\sigma a}-\mu,1,i\varrho\eta\Big)\\
&\qquad\times F(1+\mu,1,i\varrho\xi_0)\cdot\frac{1}{2}F_1(1+\mu,1,i\varrho\xi)\cdot e^{2iZ\pi/\sigma a}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Ist $\frac{Z}{\sigma a}$ sehr nahe gleich $n = 1, 2, 3, \ldots$, so rücken die Pole

$$-\frac{Z}{\sigma a},\ -\frac{Z}{\sigma a}+1,\ \ldots,\ -\frac{Z}{\sigma a}+n-1$$

von $\Gamma\Big(-\mu-\frac{Z}{\sigma a}\Big)$ sehr nahe an jene von $\Gamma(\mu)$, nämlich an $\mu = -n$, $-n+1, \ldots, -1$. Wir führen deshalb den Integrationsweg für μ über diese Pole von $\Gamma\Big(-\mu-\frac{Z}{\sigma a}\Big)$ und erhalten:

$$
\begin{aligned}
\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d\mu}{i}\cdot\Theta\Theta^*\cdot F\cdot F\cdot\frac{1}{2}F_1 e^{-2\pi i\mu} &= -2\pi i\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{i}\Gamma\Big(-\frac{Z}{\sigma a}+\nu\Big)\Gamma\Big(\frac{Z}{\sigma a}-\nu+1\Big)\\
&\qquad\times F\cdot F\cdot\frac{1}{2}F_1\cdot(-1)^\nu e^{2\pi iZ/\sigma a}+\int_{-i\infty}^{+i\infty}\ldots.
\end{aligned}
$$

Das erste der beiden Doppelintegrale von (16) wird von 0 nach ∞ längs $\mathfrak{C}_1$, und von ∞ nach 0 längs $\mathfrak{C}_2$ in Fig. 2 (bezüglich der Integration nach σ) geführt. Es bleiben dann nur die Residuen in den Polen $\sigma = \frac{Z}{na} = \varkappa_n$; diese rühren nur von dem Summenbestandteil der vorigen Zerlegung her, während der Integralbestandteil als Funktion von σ regulär ist. Es kommt dann:

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{K^2+\varkappa_n^2}\cdot\Big(\frac{Z}{an}\Big)^3\frac{e^{-\frac{\varkappa_n}{2}(\xi+\eta+\xi_0)}}{\pi n}\\
&\qquad\times F(1-\nu,1,\varkappa_n\xi)\,F(1-\nu,1,\varkappa_n\xi_0)\,F(\nu-n,1,\varkappa_n\eta),
\end{aligned}
$$

und dies hebt sich gerade gegen den Anteil des diskreten Spektrums an der Greenschen Funktion in (13) weg. Nun müssen wir aber das Integral wieder von 0 nach ∞ längs $\mathfrak{C}_3$ zurückführen. Auf diesem Wege geht jedoch auch das zweite Doppelintegral von (16), so daß wir die beiden Integranden addieren können. In dem entstehenden neuen Doppelintegral betrachten wir nur mehr die Integration über μ. Der Integrand hat keine anderen singulären Stellen als die Pole von $\Gamma(\mu+1)$; alle anderen heben sich weg. Der Integrationsweg kann also in das Unendliche des ersten und vierten Quadranten der komplexen μ-Ebene geschoben werden. Dort aber verschwindet der Integrand, wie man nach der Sattelpunktsmethode durch Entwicklung der F-Funktionen für großen ersten Index zeigen kann (vgl. § 3).

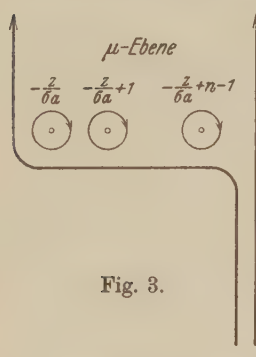


Fig. 3.

Wir haben diesen Fall als Fall I mit der Bedingung $\xi > \xi_0 + \eta$ vorangestellt. Die Fälle II mit $\xi_0 > \xi + \eta$ und III mit $\eta > \xi + \xi_0$ lassen sich ganz ebenso behandeln, indem man statt $F(..,.,i\varrho\xi)$ eine der beiden anderen F-Funktionen in ihre Teilfunktionen zerlegt. Wir fassen die Ergebnisse zusammen in

$$(17)\quad G(\xi,\eta;\xi_0,0) = -\frac{iK}{4\pi} e^{Z\pi/Ka-\frac{iK}{2}(\xi+\eta+\xi_0)} \cdot \begin{cases} \text{I} & \text{für} \quad \xi > \xi_0+\eta, \\ \text{II} & \text{für} \quad \xi_0 > \xi+\eta, \\ \text{III} & \text{für} \quad \eta > \xi+\xi_0, \end{cases}$$

wo

$$\text{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta\Theta^* d\zeta \cdot \frac{1}{2} F_2\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} - i\zeta, 1, iK\xi\right) \times F\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} - i\zeta, 1, iK\xi_0\right) F\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} + i\zeta, 1, iK\eta\right)$$

$$\text{II} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta\Theta^* d\zeta \cdot F\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} - i\zeta, 1, iK\xi\right) \times \frac{1}{2} F_2\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} - i\zeta, 1, iK\xi_0\right) F\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} + i\zeta, 1, iK\eta\right)$$

$$\text{III} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta\Theta^* d\zeta \cdot F\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} - i\zeta, 1, iK\xi\right) \times F\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} - i\zeta, 1, iK\xi_0\right) \frac{1}{2} F_2\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} + i\zeta, 1, iK\eta\right).$$

Die Konvergenzgebiete sind durch die Fig. 4 veranschaulicht und ebenso numeriert wie die zugehörigen Entwicklungen. Die Begrenzung der Gebiete wird gebildet durch eine Kugel um den Atomkern durch den

Quellpunkt, sowie durch zwei parallele Tangentialebenen derselben, von denen eine durch den Quellpunkt geht.

Es ist nicht gelungen, auch für das Gebiet IV der Fig. 4, das durch das gleichzeitige Bestehen der Bedingungen $\xi < \xi_0 + \eta$, $\xi_0 < \xi + \eta$, $\eta < \xi + \xi_0$ gekennzeichnet ist, eine den Entwicklungen (17) entsprechend gebaute Entwicklung zu finden.

Statt der Integraldarstellung (17) können wir für die Greensche Funktion auch einfach eine Reihendarstellung gewinnen. Gehen wir von der Entwicklung (17) I. aus. Θ^* hat die Pole

$$\frac{1}{2} - i\left(\frac{Z}{2Ka} + \zeta\right) = -\lambda,$$

$$\frac{1}{2} - i\left(-\frac{Z}{2Ka} + \zeta\right) = -\lambda,$$

$$\text{mit } \lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

von denen die letzteren durch das Verschwinden von

$$F_2\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2iKa} - i\zeta, 1, iK\xi\right)$$

an diesen Stellen ausgeglichen werden. Über die verbleibenden Pole führen wir den Integrationsweg in das Unendliche des dritten und vierten Quadranten der ζ-Ebene. Man kann auch hier wieder zeigen, indem man für die F-Funktionen Entwicklungen nach der Sattelpunktsmethode ansetzt, daß das Integral im Unendlichen verschwindet. Es kommt allerdings eine kleine Einschränkung des Konvergenzgebietes hinzu, die wir auf einem anderen Wege ableiten wollen. Zunächst schreiben wir unsere Entwicklung an und ebenso die Entwicklungen für die Fälle II und III, die man genau auf demselben Wege erhält:

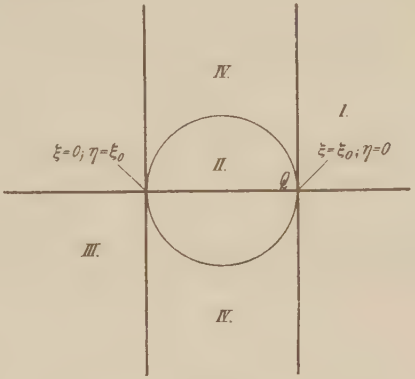


Fig. 4.

(18)
$$G(\xi, \eta; \xi_0, 0)$$
$$= -\frac{iK}{4\pi} e^{Z\pi/Ka - \frac{iK}{2}(\xi+\eta+\xi_0)} \cdot \Gamma\left(1 - \frac{iZ}{Ka}\right)\Gamma\left(\frac{iZ}{Ka}\right) \cdot \begin{cases} \text{I für } \sqrt{\xi} > \sqrt{\xi_0} + \sqrt{\eta}, \\ \text{II für } \sqrt{\xi_0} > \sqrt{\xi} + \sqrt{\eta}, \\ \text{III für } \sqrt{\eta} > \sqrt{\xi} + \sqrt{\xi_0}, \end{cases}$$

wo

$$\text{I} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{2} F_2\left(-\lambda + \frac{iZ}{Ka}, 1, iK\xi\right) \cdot F\left(-\lambda + \frac{iZ}{Ka}, 1, iK\xi_0\right) \cdot F(\lambda + 1, 1, iK\eta),$$

$$\text{II} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} F\left(-\lambda + \frac{iZ}{Ka}, 1, iK\xi\right) \cdot \frac{1}{2} F_2\left(-\lambda + \frac{iZ}{Ka}, 1, iK\xi_0\right) \cdot F(\lambda + 1, 1, iK\eta),$$

$$\text{III} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} F(\lambda + 1, 1, iK\xi) F(\lambda + 1, 1, iK\xi_0) \cdot \frac{1}{2} F_2\left(-\lambda + \frac{iZ}{Ka}, 1, iK\eta\right).$$

In (18) haben wir die Konvergenzgebiete schon im voraus angegeben. Veranschaulicht sind sie in Fig. 5. Wie man zu ihnen gelangt, wollen wir für die Entwicklung I zeigen. Diese kann als Entwicklung nach Laguerreschen Polynomen von $-iK\eta$ aufgefaßt werden, da ja

$$F(\lambda+1, 1, x) = e^x \cdot F(-\lambda, 1, -x) = e^x \cdot L_\lambda(-x),$$

wo L_λ das Laguerresche Polynom vom Grade λ bezeichnet. Eine Entwicklung nach diesen Polynomen konvergiert aber innerhalb einer Parabel, deren Achse die positive reelle Achse der komplexen x-Ebene ist, und deren Brennpunkt im Nullpunkt liegt[13]). Sie ist bestimmt als die kleinste Parabel dieser Art, auf der eine Singularität der zu entwickelnden Funktion liegt. Als solche singuläre Punkte kommen in unserem Falle alle jene in Betracht, deren Abstand vom Quellpunkt im komplexen ξ, η, ζ-Raume gleich Null ist. D. h. aber

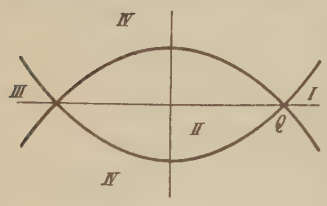


Fig. 5.

$$R^2 = \left(\frac{\xi-\eta-\xi_0}{2}\right)^2 + \xi\eta = \left(\frac{\xi+\eta+\xi_0}{2}\right)^2 - \xi\xi_0 = 0,$$

oder

$$-iK\eta = iK(\xi+\xi_0 \pm 2\sqrt{\xi\xi_0}) = iK(\sqrt{\xi} \pm \sqrt{\xi_0})^2.$$

Wir erhalten also bei gegebenem ξ und ξ_0 zwei singuläre Punkte auf der imaginären Achse der $-iK\eta$-Ebene. Von diesen liegt der Punkt $iK(\sqrt{\xi}-\sqrt{\xi_0})^2$ dem Nullpunkt am nächsten. Durch diesen wird also die Parabel gehen, die das Konvergenzgebiet begrenzt. Innerhalb dieser Parabel liegt nun unser Punkt $-iK\eta$. Da aber η selbst reell und positiv ist, d. h. $-iK\eta$ auf der rein imaginären Achse liegt, so folgt einfach $\eta < (\sqrt{\xi}-\sqrt{\xi_0})^2$. Von den beiden Möglichkeiten $\sqrt{\eta} < \sqrt{\xi}-\sqrt{\xi_0}$ und $\sqrt{\eta} < \sqrt{\xi_0}-\sqrt{\xi}$ ist jedoch nur die erste mit $\xi > \xi_0 + \eta$ verträglich.

Ganz entsprechend ergeben sich die oben angegebenen Konvergenzgebiete für die beiden Entwicklungen II und III. Die Gebiete sind in der $x, \sqrt{y^2+z^2}$-Ebene gegeneinander begrenzt durch zwei Parabeln, die beide ihren Brennpunkt im Koordinatenanfangspunkt haben und durch den Quellpunkt gehen, und die die beiden durch $\xi = \eta$ bestimmten Richtungen als Achsen haben (siehe Fig. 5).

Diese Entwicklungen (18) enthalten verschiedene bekannte Spezialfälle. Zunächst kommen wir für $Z = 0$ auf die Entwicklung der Kugelwelle $-\frac{e^{iKR}}{4\pi R}$ (R = Abstand vom Quellpunkt Q) nach Laguerreschen Poly-

[13]) O. Volk, Math. Annalen 86, S. 296.

nomen von $-iK\eta$ bzw. $-iK\xi$ bzw. $+iK\xi$; für $\xi_0 = 0$ geht im wesentlichen daraus die Entwicklung von $\frac{1}{z-x}$ nach Laguerreschen Polynomen von x hervor, die von O. Volk a. a. O. aufgestellt wurde.

Die Entwicklungen (18) sind besonders geeignet, das Verhalten der Greenschen Funktion für große Werte von ξ bzw. η bzw. ξ_0 zu untersuchen. Wir gehen auf den letzteren Fall ein, d. h. wir legen den Quellpunkt in große Entfernung vom Atomkern; dabei wollen wir uns nur für das Gebiet II der Fig. 5 interessieren, da dieses schließlich den ganzen Raum erfüllt, wenn ξ_0 gegen ∞ geht. Wie nun die asymptotischen Entwicklungen (33) zeigen, folgt aus (18) II für große Werte von ξ_0:

$$(\xi, \eta; \xi_0, 0) = \frac{\Gamma\left(1-\frac{iZ}{Ka}\right)(-iK\xi_0)^{\frac{iZ}{Ka}} e^{\frac{iK}{2}\xi_0}}{-4\pi\xi_0} \cdot e^{\frac{iK}{2}(\eta-\xi)} \cdot F\left(\frac{iZ}{Ka}, 1, iK\xi\right)\left(1+O(\xi_0^{-1})\right).$$

Um für $\xi_0 \to \infty$ nicht die Amplitude Null zu erhalten, lassen wir den nur von ξ_0 abhängigen Amplitudenfaktor weg und erhalten somit

$$e^{\frac{iK}{2}(\eta-\xi)} \cdot F\left(\frac{iZ}{Ka}, 1, iK\xi\right). \tag{19}$$

Diese Funktion ist natürlich eine Lösung der Schrödingerschen Wellengleichung (9) und beschreibt die Beugung einer aus $(\xi_0, \eta_0) = (+\infty, 0)$ kommenden ebenen Elektronenwelle im Coulombfelde eines Atomkernes. Für $Z = 0$ geht sie in die ebene Welle e^{-iKx} über. Diese Verallgemeinerung der ebenen Welle wurde auf anderem Wege schon von W. Gordon und G. Temple erhalten[14]). Sie ist der in Anmerkung [2]) zitierten Arbeit von A. Sommerfeld zugrunde gelegt.

§ 3.

Die entarteten hypergeometrischen Funktionen.

8. Definition und Integraldarstellungen.

Die entarteten hypergeometrischen Funktionen treten bei einer großen Zahl physikalischer Probleme auf, von denen aus der Wellenmechanik das Keplerproblem, in Polar- und parabolischen Koordinaten, der radioaktive Zerfall[15]), und der Oszillator erwähnt seien. Sie sind von großer Allgemeinheit, denn sie enthalten als Spezialfälle u. a. die Besselschen Funktionen, die Laguerreschen und Hermiteschen Polynome, das Gaußsche Fehler-

[14]) Siehe [3]) und [4]).

[15]) Th. Sexl, Zeitschr. f. Physik **56** (1929), S. 62.

integral $\int_0^x e^{-x^2} dx$.[16]) Indessen sind sie in dieser Allgemeinheit bisher nur wenig betrachtet worden. Eingehendere Darstellungen finden sich bei Whittaker-Watson, Modern Analysis, wo sie als Confluent Hypergeometric Functions bezeichnet werden, und bei W. Gordon (a. a. O.), wo sie in Zusammenhang mit dem wellenmechanischen Keplerproblem betrachtet werden; für einen Spezialfall werden von Th. Sexl[17]) asymptotische Darstellungen nach der Sattelpunktsmethode hergeleitet.

Im folgenden sollen einige weitere Eigenschaften dieser Funktionen, die wir manchmal auch kurz als F-Funktionen bezeichnen, abgeleitet werden. Vor allem handelt es sich um die Umlaufsrelationen beim Umlaufen des singulären Punktes $x = 0$, sowie um einige Integrale, Additionstheoreme und erzeugende Funktionen.

Die entarteten hypergeometrischen Funktionen gehen aus den gewöhnlichen hypergeometrischen Funktionen hervor durch den Grenzübergang

$$F(\alpha, \gamma, x) = \lim_{\beta \to \infty} F\left(\alpha, \beta; \gamma, \frac{x}{\beta}\right).$$

Man erhält sie als die im Nullpunkt reguläre Lösung der Differerentialgleichung

$$x \frac{d^2 F}{dx^2} + (\gamma - x) \frac{dF}{dx} - \alpha F = 0; \tag{20}$$

ihre Reihendarstellung lautet:

$$F(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \ldots . \tag{21}$$

Sie lassen sich in zwei Teilfunktionen aufspalten, die beide für $x = 0$ singulär sind, und die sich durch ihr asymptotisches Verhalten unterscheiden.

$$F(\alpha, \gamma, x) = \frac{1}{2} F_1(\alpha, \gamma, x) + \frac{1}{2} F_2(\alpha, \gamma, x). \tag{22}$$

Die Aufspaltung entspricht der der Besselschen Funktionen in die beiden Hankelschen Funktionen, die nur ein Spezialfall von (22) ist[18]). Die Teilfunktionen lassen folgende wichtige Integraldarstellungen zu[19]):

---

[16]) Eine vollständigere Aufzählung enthält: Whittaker, Bulletin American Math. Soc. **10** (1904), S. 125.

[17]) Th. Sexl, Zeitschr. f. Physik **56** (1929), S. 72.

[18]) Watson, Bessel Functions, Cambridge 1922, S. 100—101.

[19]) W. Gordon, Annalen der Physik, a. a. O. Unsere Darstellung ist gegenüber der Gordons insofern abgeändert, als wir statt $-x$ überall schreiben $xe^{-i\pi}$; durch die Forderung $|\arg(-x)| < \pi$ kommt nämlich bei Gordon noch ein Verzweigungsschnitt von 0 nach $+\infty$ längs der reellen Achse herein, der unzweckmäßig ist, da dann die Funktion F_1 in der positiv imaginären Halbebene nicht die unmittelbare analytische Fortsetzung von F_1 in der negativ imaginären Halbebene ist.

$$\frac{1}{2} F_1(\alpha, \gamma, x)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\, x^{-\alpha}\, e^{i\pi\alpha}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)\cdot 2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(s)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma-s)\,\Gamma(\alpha-s)\, x^s\, ds, \tag{23}$$

$$\frac{1}{2} F_2(\alpha, \gamma, x)$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\, x^{\alpha-\gamma}\, e^{x}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)\cdot 2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(s)\,\Gamma(1-\alpha-s)\,\Gamma(\gamma-\alpha-s)\, x^s\, e^{-i\pi s}\, ds.$$

Unter x ist der Wert der Veränderlichen zu verstehen, für den $|\arg x| < \pi$. Der Integrationsweg läßt in beiden Fällen die Pole von $\Gamma(s)$ links liegen, während die Pole der übrigen Γ-Funktionen rechts von ihm liegen. Für den Fall, daß zwei Pole zu verschiedenen Seiten des Integrationsweges zusammenrücken (z. B. wenn $\alpha \to 1, 2, 3, \ldots$), kann man den Integrationsweg zuerst über einen der beiden Pole schieben, das Residuum in ihm bilden und dann die beiden Pole zusammenrücken lassen.

Ist $\gamma = -n$, wo $n = 1, 2, 3, \ldots$, so verliert die Reihendarstellung (21) ihren Sinn. Als Lösung von (20) nimmt man dann die Funktion $x^{1+n} F(\alpha + n + 1, n + 2, x)$ und deren Teilfunktionen. Wir wollen also auf diesen Fall nicht näher eingehen. Ganz allgemein kann man sogar von den F-Funktionen abgesehen, für die $\mathrm{Re}\,\gamma < 1$.

Weiterhin verschwindet F_1 für den Fall, daß $\alpha = \gamma, \gamma + 1, \gamma + 2, \ldots$, F_2 für den Fall, daß $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$. Man erhält dann eine von F linear unabhängige Lösung von (20) in $\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot F_1$ bzw. $\Gamma(\alpha) \cdot F_2$.

Aus (23) gewinnt man nun unmittelbar die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_1(\gamma - \alpha, \gamma, x\, e^{\pi i}) \cdot e^{x} &= \frac{1}{2} F_2(\alpha, \gamma, x\, e^{2\pi i}) \cdot e^{-2\pi i(\alpha-\gamma)}, \\ \frac{1}{2} F_2(\gamma - \alpha, \gamma, x\, e^{\pi i})\, e^{x} &= \frac{1}{2} F_1(\alpha, \gamma, x) \cdot e^{-2\pi i\alpha}, \end{aligned} \tag{24}$$

während man leicht durch Transformation der Differentialgleichung (20) sieht, daß

$$F(\gamma - \alpha, \gamma, -x)\, e^{x} = F(\alpha, \gamma, x). \tag{25}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen (24) ergeben sich mit Hilfe von (25) die Umlaufsrelationen der F-Funktionen:

$$\begin{aligned} F_1(\alpha, \gamma, x\, e^{2\pi i}) &= (1 + e^{-2\pi i\gamma} - e^{+2\pi i(\alpha-\gamma)})\, F_1(\alpha, \gamma, x) \\ &\quad + (1 - e^{2\pi i(\alpha-\gamma)}) \cdot F_2(\alpha, \gamma, x), \\ F_2(\alpha, \gamma, x\, e^{2\pi i}) &= (e^{2\pi i(\alpha-\gamma)} - e^{-2\pi i\gamma}) \cdot F_1(\alpha, \gamma, x) \\ &\quad + e^{2\pi i(\alpha-\gamma)}\, F_2(\alpha, \gamma, x). \end{aligned} \tag{26}$$

Für die ganzen F-Funktionen geben wir eine ähnlich wie (23) gebaute Integraldarstellung, die durch Grenzübergang aus Barnes' Integral für die hypergeometrischen Funktionen[20])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,b;c,z)$$

hervorgeht. (Hierin ist $|\arg(-z)|<\pi$, und der Integrationsweg läßt die Pole von $\Gamma(a+s)\cdot\Gamma(b+s)$ zur Linken und die von $\Gamma(-s)$ zur Rechten). Wir erhalten:

$$(27)\qquad \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\cdot F(\alpha,\gamma,x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-x)^s\,ds.$$

Man kann diese Integraldarstellung auch direkt nachprüfen, indem man den Integrationsweg über die Pole von $\Gamma(-s)$ führt. Es ergibt sich dann die Reihenentwicklung der F-Funktionen, während im Unendlichen das Integral verschwindet.

Für Anwendungen der Sattelpunktsmethode ist noch eine andere Integraldarstellung zweckmäßig. Wir beschränken uns auf positive ganzzahlige Werte von γ. Die Laplacesche Transformation auf (20) ausgeübt, liefert zunächst

$$(28)\quad F=(-2i)^{1-\gamma}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\cdot\frac{e^{x/2}}{2\pi i}\int(z-i)^{\gamma-\alpha-1}(z+i)^{\alpha-1}e^{-\frac{ixz}{2}}\,dz.$$

Der konstante Faktor ist so gewählt, daß $F(\alpha,\gamma,0)=1$.

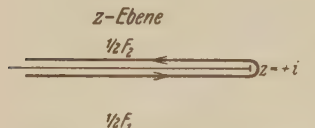


Fig. 6.

Liegt x auf der positiv imaginären Achse, so schneiden wir die komplexe z-Ebene von $+i$ nach $-\infty$ und von $-i$ nach $-\infty$ auf und führen je einen Integrationsweg um jeden Verzweigungsschnitt. Nehmen wir $|\arg(z\pm i)|<\pi$, so gibt der Weg um $+i$ gerade die Funktion $\frac{1}{2}F_2$ und der um $-i$ die Funktion $\frac{1}{2}F_1$ (siehe Fig. 6).

Man zeigt dies, indem man für $(1+iz)^{-\alpha-1+\gamma}$ die Mellinsche Integralformel[21]) einsetzt, die Integrationsfolge vertauscht und das innere Integral ausführt. Es ergeben sich dann genau die Integraldarstellungen (23).

Wir setzen nun in (28) $z=\operatorname{tg}\tau$ oder $\frac{z-i}{z+i}=e^{2i\tau-\pi i}$. Durch diese Wahl von -1 als $e^{-i\pi}$ erhalten wir $\tau=-\frac{\pi}{2}$, wenn wir in der z-Ebene zwischen den Verzweigungsschnitten nach $-\infty$ gehen, da dort $\arg(z+i)=\pi$ und $\arg(z-i)=-\pi$. Gehen wir jedoch außerhalb der

[20]) Proc. Lond. Math. Soc. (2) 6 (1908), S. 141.
[21]) Nielsen, Handbuch der Γ-Funktion, S. 224.

beiden Verzweigungsschnitte nach $-\infty$, so wird $\arg(z+i) = \arg(z-i)$, also $\tau = +\frac{\pi}{2}$. Für F_1 geht damit der Integrationsweg in der τ-Ebene aus dem Punkte $\tau = +\frac{\pi}{2}$ mit horizontaler Tangente nach rechts heraus, biegt in die negativ imaginäre Halbebene aus und geht von rechts mit horizontaler Tangente in den Punkt $\tau = -\frac{\pi}{2}$ hinein. Aus diesem Weg geht der Integrationsweg für F_2 durch Spiegelung an der reellen Achse hervor; er wird von $-\frac{\pi}{2}$ nach $+\frac{\pi}{2}$ durchlaufen. Für die ganze Funktion F ergibt sich demnach ein negativer Umlauf um den Punkt $\tau = +\frac{\pi}{2}$. (Siehe Fig. 7.)

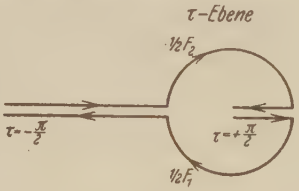


Fig. 7.

Die Integraldarstellung (28) geht dann nach Durchführung der Transformation über in:

$$(29)\quad (-2i)^{1-\gamma}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\,\frac{e^{\pi i\alpha-\frac{\pi i\gamma}{2}+\frac{x}{2}}}{2\pi i}\int e^{-i\tau(2\alpha-\gamma)-\frac{ix}{2}\operatorname{tg}\tau}\,\frac{d\tau}{(\cos\tau)^{\gamma}}.$$

Diese Darstellung bildet einen bequemen Ausgangspunkt für Anwendungen der Sattelpunktsmethode [22]).

Der Integrationsweg der Fig. 7 wurde unter der Voraussetzung aufgestellt, daß $\arg x = \frac{\pi}{2}$. Ist allgemein $\arg x = \varepsilon$, so mündet der Integrationsweg nicht mehr horizontal in die Punkte $\tau = \pm\frac{\pi}{2}$ ein, sondern unter dem Winkel $\varepsilon - \frac{\pi}{2}$ gegen die positive reelle Achse.

9. Darstellungen für kleine und große Werte der Veränderlichen x.

Wir wollen nun auf die Natur der Singularität der F-Funktionen für $x = 0$ eingehen. Ist γ nicht ganzzahlig, so sind auch

$$(30)\qquad F = F(\alpha,\gamma,x)\quad\text{und}\quad G = x^{1-\gamma}\cdot F(\alpha+1-\gamma,\,2-\gamma,\,x)$$

zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (20). Durch diese lassen sich dann F_1 und F_2 linear ausdrücken:

$$(31)\quad \begin{aligned}\tfrac{1}{2}F_1(\alpha,\gamma,x) &= e^{\pi i\alpha}\cdot\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)}F(\alpha,\gamma,x)\\ &\quad + e^{\pi i\alpha}\cdot\frac{\Gamma(\gamma-1)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\alpha)}x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\,2-\gamma,\,x),\\ \tfrac{1}{2}F_2(\alpha,\gamma,x) &= e^{\pi i(\alpha-\gamma)}\cdot\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}F(\alpha,\gamma,x)\\ &\quad - e^{\pi i\alpha}\cdot\frac{\Gamma(\gamma-1)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\alpha)}x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\,2-\gamma,\,x).\end{aligned}$$

[22]) Für $\gamma = 2$ hat Th. Sexl a. a. O. einige Fälle behandelt. Für $\gamma = 1$ haben wir diejenigen Fälle untersucht, die notwendig waren, um das Verschwinden einiger in § 2 vorkommender Integrale zu zeigen.

Im Gegensatz zu diesem allgemeinen Fall ist jedoch für ganzzahlige Werte von γ die Singularität bei $x=0$ logarithmischer Natur. Wir schieben dann in (23) den Integrationsweg nach rechts über die Pole der zwei Γ-Funktionen. Hier kommen zunächst einfache Pole für $s=1-\gamma+\alpha, 2-\gamma+\alpha, \ldots, -1+\alpha$, falls $\gamma>1$, während für $\gamma=1$ kein einfacher Pol vorhanden ist. Durch Residuenbildung in diesen einfachen sowie in den zweifachen Polen ergibt sich dann[23]):

$$\frac{1}{2}F_1(\alpha,\gamma,x)=+\frac{1-e^{2\pi i\alpha}}{2\pi i}\left[\sum_{\nu=1}^{\gamma-1}\frac{c_\nu}{x^\nu}+\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu+\ln x\cdot F(\alpha,\gamma,x)\right],$$

(32)

$$\frac{1}{2}F_2(\alpha,\gamma,x)=-\frac{1-e^{2\pi i\alpha}}{2\pi i}\left[\sum_{\nu=1}^{\gamma-1}\frac{c_\nu}{x^\nu}+\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu+\ln x\cdot F(\alpha,\gamma,x)\right]+F(\alpha,\gamma,x),$$

wo

$$a_\nu=[\mu(\nu+\alpha)-\mu(\nu+\gamma)-\mu(\nu+1)]\cdot\frac{(\alpha)_\nu}{(\gamma)_\nu\cdot\nu!},$$

$$c_\nu=\frac{(-1)^{\nu-1}\Gamma(\gamma)\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha-\nu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\nu)};\quad \mu(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)};\quad (\alpha)_\nu=\frac{\Gamma(\alpha+\nu)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Im Unendlichen kommt kein Beitrag, da dort die Integrale (23) verschwinden. Diese Darstellungen (32) gelten für jedes endliche x, da die auftretenden Reihen beständig konvergent sind.

Darstellungen von F_1 und F_2 für große Werte von x gewinnt man, indem man die Integrationswege in (23) über die Pole von $\Gamma(s)$ führt. Die asymptotischen semikonvergenten Reihen lauten[24]):

$$\frac{1}{2}F_1(\alpha,\gamma,x)\sim\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}x^{-\alpha}e^{i\pi\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha-\gamma)_\nu(\alpha)_\nu}{\nu!(-x)^\nu},$$

(33)

$$\frac{1}{2}F_2(\alpha,\gamma,x)\sim\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-\gamma}e^{x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha)_\nu(\gamma-\alpha)_\nu}{\nu!\,x^\nu}.$$

10. Rekursionsformeln.

Die folgenden vier Beziehungen zwischen „benachbarten" F-Funktionen

(34)

I. $\left(1-\frac{\alpha}{\gamma}\right)x\cdot F(\alpha,\gamma+1,x)+\alpha\cdot F(\alpha+1,\gamma,x)-(\alpha+x)\cdot F(\alpha,\gamma,x)=0,$

II. $(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\gamma,x)+(2\alpha-\gamma+x)\cdot F(\alpha,\gamma,x)-\alpha\cdot F(\alpha+1,\gamma,x)=0,$

III. $x\cdot F(\alpha+1,\gamma+1,x)+\gamma\cdot F(\alpha,\gamma,x)-\gamma\cdot F(\alpha+1,\gamma,x)=0,$

IV. $(1-\gamma)F(\alpha,\gamma-1,x)+(\gamma-1+x)F(\alpha,\gamma,x)+\left(\frac{\alpha}{\gamma}-1\right)x\cdot F(\alpha,\gamma+1,x)=0$

[23]) Wegen Einzelheiten der Ableitung vgl. Th. Sexl, a. a. O., wo der Spezialfall $\gamma=2$ behandelt ist. Bei Gordon ist zwar die Entwicklung ebenso allgemein angegeben wie bei uns, jedoch leidet sie an demselben Nachteil, den wir für die Integraldarstellung (23) in Anm. [19]) festgestellt haben.

[24]) W. Gordon, a. a. O.

gelten auch für die entsprechenden Teilfunktionen F_1 und F_2. Sie lassen sich leicht nachprüfen mit der Reihendarstellung (21), bzw. mit der Integraldarstellung (23). Von diesen Rekursionsformeln aus gelangt man einfach zu folgendem Satz:

Zwischen drei verschiedenen F-Funktionen mit gleichem Argument x, deren erste Indizes sich um ganze Zahlen unterscheiden, ebenso wie deren zweite Indizes, besteht eine lineare Beziehung, deren Koeffizienten Polynome in x sind. Sie lassen sich alle durch Eliminationen aus den Beziehungen (34) herleiten. Sie gelten deshalb auch für die entsprechenden Teilfunktionen F_1 und F_2.[25])

11. Einige bestimmte Integrale mit F-Funktionen.

Wir gehen nun daran, einige bestimmte Integrale auszuwerten. Zunächst nehmen wir

$$\int_0^\infty \frac{F(\alpha, \gamma, x)}{x - y}\, x^n\, dx.$$

Zu seiner Berechnung führen wir das folgende Integral auf dem Wege der Fig. 8:

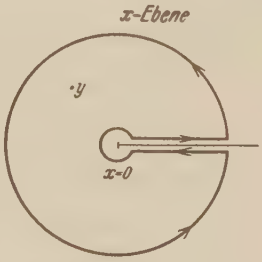


Fig. 8.

$$\oint \frac{1}{2} F_1(\alpha, \gamma, x) \cdot \frac{x^n\, dx}{x - y}.$$

Sein Wert ist ersichtlich gleich

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2} F_1(\alpha, \gamma, y) \cdot y^n \qquad (0 < \arg y < 2\pi).$$

Indessen können wir dieses Integral auch noch anders umformen. Wir lassen den kleinen Kreis in Fig. 8 auf den Nullpunkt zusammenschrumpfen und den großen Kreis ins Unendliche hinausrücken. Die Integrale über diese beiden Kreise konvergieren dann gegen Null, falls

$$\mathrm{Re}(\gamma - n) < 2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}(n - \alpha) < 0.$$

Als wesentliche Bestandteile bleiben dann

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} F_1(\alpha, \gamma, x) \frac{x^n\, dx}{x - y} - \int_0^\infty \frac{1}{2} F_1(\alpha, \gamma, x e^{2\pi i}) \frac{x^n e^{2\pi i n}\, dx}{x - y}.$$

Wir betrachten nur den Fall, wo γ und n sich um eine ganze Zahl unterscheiden. Die Umlaufsrelationen (26) ergeben dann nach kleiner Umformung das Resultat:

---

[25]) Dieser Satz ist nur ein Spezialfall eines bekannten Satzes über allgemeine hypergeometrische Funktionen.

$$(35)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x-y}\, x^n \cdot F(\alpha,\gamma,x) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i\alpha} - e^{2\pi i\gamma}} \cdot y^n \cdot \frac{1}{2} F_1(\alpha,\gamma,y).$$

Setzen wir hierin $y = z e^{\pi i}$ und beschränken damit z auf den Bereich $|\arg z| < \pi$, so wird

$$(35\,a)\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x+z}\, x^n \cdot F(\alpha,\gamma,x) = \frac{2\pi i \cdot e^{\pi i n}}{1 - e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}} \cdot e^{-z} z^n \cdot \frac{1}{2} F_2(\gamma-\alpha,\gamma,z e^{2\pi i}).$$

Ebenso ergibt sich

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{dx}{x-y}\, e^{-x} x^n\, F(\alpha,\gamma,x) = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}} \cdot e^{-y} y^n \cdot \frac{1}{2} F_2(\alpha,\gamma,y); \quad 0 < \arg y < 2\pi; \\ &\int_0^\infty \frac{dx}{x+y}\, e^{-x} x^n\, F(\alpha,\gamma,x) = \frac{2\pi i \cdot e^{-i\pi n}}{e^{-2\pi i\alpha} - 1} \cdot y^n \cdot \frac{1}{2} F_1(\gamma-\alpha,\gamma,y); \quad |\arg y| < \pi, \end{aligned}$$

falls

$$\mathrm{Re}(\gamma - n) < 2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}(\gamma - \alpha - n) > 0.$$

Diese Integrale treten als Entwicklungskoeffizienten auf, wenn man die Kugelwelle in parabolischen Koordinaten $\frac{e^{\frac{ik}{2}(\xi+\eta)}}{\xi+\eta}$ z. B. als Funktion von ξ nach Laguerreschen Polynomen von $-ik\xi$ multipliziert mit $e^{ik\xi/2}$, oder auch nach den Funktionen $F(\frac{1}{2} + i\zeta, 1, ik\xi) \cdot e^{-ik\xi/2}$ mit ζ von $-\infty$ bis $+\infty$, entwickelt. Wir erhalten jedoch diese Entwicklungen einfacher als Spezialfälle von (17) und (18).

Aus (35) und (36) erhält man durch geeignete Zusammenfassung leicht eine Verallgemeinerung der Sonineschen Integrale[26]).

Bei der Greenschen Funktion des Keplerproblems begegnete uns ein Spezialfall des folgenden Integrals, das wir nun auswerten wollen:

$$\begin{aligned} \Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} &\Gamma\Big(\frac{m+1}{2} + i(\alpha+\zeta)\Big)\, \Gamma\Big(\frac{m+1}{2} + i(\alpha-\zeta)\Big)\, \Gamma\Big(\frac{m+1}{2} - i(\alpha+\zeta)\Big) \\ &\times \Gamma\Big(\frac{m+1}{2} - i(\alpha-\zeta)\Big)\, F\Big(\frac{m+1}{2} - i(\alpha+\zeta), m+1, x\Big) \\ &\times F\Big(\frac{m+1}{2} - i(\alpha-\zeta), m+1, y\Big)\, d\zeta. \end{aligned}$$

Es genügt der Differentialgleichung:

$$x\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + (m+1-x)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + y\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + (m+1-y)\frac{\partial\Phi}{\partial y} - (m+1-2i\alpha)\,\Phi = 0.$$

---

[26]) Watson, Bessel Functions, S. 433.

Wir werten Φ erst für $y = 0$ aus und entwickeln zu dem Zwecke $F\left(\frac{m+1}{2} - i(\alpha+\zeta), m+1, x\right)$ in eine unendliche Reihe nach Potenzen von x und integrieren gliedweise. Der Koeffizient des Gliedes mit x^n lautet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{m+1}{2} + i(\alpha+\zeta)\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2} + i(\alpha-\zeta)\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2} - i(\alpha+\zeta) + n\right)$$
$$\times \Gamma\left(\frac{m+1}{2} - i(\alpha-\zeta)\right)\frac{1}{(m+1)_n \cdot n!}.$$

Dies läßt sich sofort nach Barnes' Lemma[27]) auswerten. Es ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(\alpha+s)\,\Gamma(\beta+s)\,\Gamma(\gamma-s)\,\Gamma(\delta-s)\,ds = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\,\Gamma(\alpha+\delta)\,\Gamma(\beta+\gamma)\,\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},$$

wo die Pole von $\Gamma(\alpha+s)$ und $\Gamma(\beta+s)$ zur Linken und die von $\Gamma(\gamma-s)$ und $\Gamma(\delta-s)$ zur Rechten des Integrationsweges liegen; wir setzen $i\zeta = s$ und erhalten schließlich

$$2\pi \cdot m!\, m! \frac{\Gamma(m+1+n-2i\alpha)}{\Gamma(2m+2+n)\cdot n!}\Gamma(m+1+2i\alpha).$$

Multipliziert mit x^n und summiert von $n = 0$ bis $n = \infty$ ergibt sich dann

$$\Phi(x,0) = 2\pi \cdot m!\, m! \frac{\Gamma(m+1+2i\alpha)\,\Gamma(m+1-2i\alpha)}{(2m+1)!} \cdot F(m+1-2i\alpha, 2m+2, x).$$

Um nun daraus $\Phi(x,y)$ zu erhalten, machen wir den Ansatz

$$\Phi(x,y) = \Phi(x,0) + y \cdot a_1(x) + y^2 \cdot a_2(x) + \ldots .$$

$\Phi(x,y)$ hat der obigen Differentialgleichung zu genügen, und wir erhalten dadurch eine eindeutige Bestimmung der Koeffizienten a_ν. Da also $\Phi(x,y)$ für $y = 0$ den oben berechneten Wert hat und im übrigen dadurch, daß sie der Differentialgleichung genügen soll, eindeutig bestimmt ist, hat man in

$$\Phi(x,y) = 2\pi \cdot m!\, m! \frac{\Gamma(m+1+2i\alpha)\,\Gamma(m+1-2i\alpha)}{(2m+1)!} \cdot F(m+1-2i\alpha, 2m+2, x+y)$$

das gesuchte Integral, wie man durch Einsetzen in die Differentialgleichung nachprüft.

Im Endergebnis tritt also nur mehr die Summe $x+y$ auf. Wir haben damit ein Additionstheorem, das eng mit dem Anteil des kontinuierlichen Spektrums an der Greenschen Funktion beim Keplerproblem zusammenhängt. In genau demselben Zusammenhange steht das Additionstheorem der Laguerreschen Polynome mit dem Anteil des diskreten Spektrums des Keplerproblems an der Greenschen Funktion.

---

[27]) Whittaker-Watson, Modern Analysis, S. 289.

Das Additionstheorem der Laguerreschen Polynome beweisen wir, indem wir von der erzeugenden Funktion dieser Polynome ausgehen. Es ist $L_n(x) = F(-n, 1, x)$; insbesondere also $L_n(0) = 1$ bei unserer Definition von L_n. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dL_n(x+y)}{dx} \cdot t^n = -t \frac{e^{-(x+y)t/1-t}}{(1-t)^2} = -t \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t} \cdot \frac{e^{-\frac{yt}{1-t}}}{1-t}$$

$$= -t \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu(x) t^\nu \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} L_\mu(x) t^\mu$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot \sum_{\nu=1}^{n} L_{\nu-1}(x) \cdot L_{n-\nu}(y).$$

Also

$$\frac{d}{dx} L_n(x+y) = -\sum_{\nu=1}^{n} L_{\nu-1}(x) \cdot L_{n-\nu}(y). \tag{38}$$

Entsprechend ergibt sich

$$L_n(x+y) = \sum_{\mu+\nu=n} L_\mu(x) \cdot L_\nu(y) - \sum_{\mu+\nu=n-1} L_\mu(x) \cdot L_\nu(y). \tag{39}$$

12. Additionstheoreme und erzeugende Funktionen.

Die eben angegebene erzeugende Funktion der Laguerreschen Polynome läßt sich folgendermaßen verallgemeinern[28]):

$$\frac{e^{-\frac{xh}{1-h}}}{(1-h)^\gamma} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h^\nu}{\nu!} \frac{\Gamma(\gamma+\nu)}{\Gamma(\gamma)} \cdot F(-\nu, \gamma, x). \tag{40}$$

Diese $F(-\nu, \gamma, x)$ sind Polynome in x, die allgemein folgende Darstellung zulassen[29]):

$$F(-\nu, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\nu)} e^x \cdot x^{1-\gamma} \frac{d^\nu}{dx^\nu} (x^{\gamma+\nu-1} e^{-x}). \tag{41}$$

Setzt man nun in (40) $x+y$ statt x und $\gamma+\delta$ statt γ, so folgt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h^\nu}{\nu!} \cdot \frac{\Gamma(\gamma+\delta+\nu)}{\Gamma(\gamma+\delta)} \cdot F(-\nu, \gamma+\delta, x+y) = \frac{e^{-\frac{xh}{1-h}}}{(1-h)^\gamma} \cdot \frac{e^{-\frac{yh}{1-h}}}{(1-h)^\delta}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{h^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{\Gamma(\gamma+\lambda)}{\Gamma(\gamma)} \cdot F(-\lambda, \gamma, x) \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{h^\mu}{\mu!} \cdot \frac{\Gamma(\delta+\mu)}{\Gamma(\delta)} \cdot F(-\mu, \delta, y).$$

Somit ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung das „doppelte" Additionstheorem (nämlich für den zweiten Index $\gamma+\delta$ und für das Argument $x+y$):

---

[28]) W. Gordon, a. a. O.

[29]) Dies geht durch „Entartung" aus einer entsprechenden Darstellung für die Jacobischen Polynome hervor. Vgl. Courant-Hilbert, a. a. O., S. 75.

$$\binom{-\gamma-\delta}{\nu}\cdot F(-\nu,\gamma+\delta,x+y) \tag{42}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\nu}\binom{-\gamma}{\lambda}\binom{-\delta}{\nu-\lambda}\cdot F(-\lambda,\gamma,x)\cdot F(\lambda-\nu,\delta,y).$$

(Es darf natürlich weder γ noch δ gleich Null oder negativ ganzzahlig sein.)

Wir haben schon oben erwähnt, daß $F_2(-\nu,\gamma,x)$ verschwindet, wenn ν eine ganze positive Zahl ist. Um auch für diesen Fall eine von $F(-\nu,\gamma,x)$ linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung (20) zu haben, führen wir die Funktionen

$$M(-\nu,\gamma,x)=\lim_{\alpha\to-\nu}\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)\cdot\frac{1}{2}F_2(\alpha,\gamma,x)\cdot(-1)^{\nu} \tag{42}$$

ein. Für diese Funktionen gibt es eine ähnlich wie (40) gebaute erzeugende Funktion. Um diese zu finden, multiplizieren wir zunächst (40) mit $\frac{x^{\gamma-1}\cdot e^{-x}}{x-y}$ und integrieren dann beide Seiten der Gleichung nach x von 0 bis $+\infty$. Rechts erhalten wir durch Vertauschung von Summation und Integration:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{h^{\nu}}{\nu!}\frac{\Gamma(\gamma+\nu)}{\Gamma(\gamma)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{x-y}x^{\gamma-1}\cdot F(-\nu,\gamma,x)\,dx.$$

Diese Integrale lassen sich nach (36) auswerten, da die dortigen Voraussetzungen erfüllt sind:

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{x-y}x^{\gamma-1}\cdot F(-\nu,\gamma,x)\,dx=\lim_{\alpha\to-\nu}\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\cdot y^{\gamma-1}e^{-y}\cdot\frac{1}{2}F_2(\alpha,\gamma,y)$$

$$=-\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(\gamma+\nu)}\cdot y^{\gamma-1}e^{-y}M(-\nu,\gamma,y).$$

Auf der linken Seite führen wir folgende Umformung durch:

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{x}{1-h}}x^{\gamma-1}}{(1-h)^{\gamma}(x-y)}dx=\frac{1}{1-h}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{x}{1-h}}}{\frac{x}{1-h}-\frac{y}{1-h}}\left(\frac{x}{1-h}\right)^{\gamma-1}d\frac{x}{1-h}\cdot\lim_{\alpha\to0}F\left(\alpha,\gamma,\frac{x}{1-h}\right)$$

$$=-\frac{1}{(1-h)^{\gamma}}\frac{y^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{-\frac{y}{1-h}}M\left(0,\gamma,\frac{y}{1-h}\right),$$

so daß also schließlich

$$\frac{e^{-\frac{yh}{1-h}}}{(1-h)^{\gamma}}\cdot M\left(0,\gamma,\frac{y}{1-h}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}h^{\nu}M(-\nu,\gamma,y).$$

(Eingegangen am 14. Juli 1931.)

Stabilität im Liapounoffschen Sinne und Fastperiodizität.

Von

A. Markoff in Leningrad.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 708
§ 1. Fundamentaleigenschaften der Bewegungen 710
§ 2. Ein Hilfssatz 715
§ 3. Fastperiodische Bewegungen 717
§ 4. Stabiltät nach Liapounoff 721
§ 5. Stationäre Mengen 725
§ 6. Der Hauptsatz 728
§ 7. Die Andronow-Wittsche Vermutung 731

Einleitung.

1. A. A. Andronow und A. A. Witt haben mir folgendes Problem gestellt: „zu beweisen, daß jede für $t \to +\infty$ nach Liapounoff stabile [1]) rekurrente [2]) Bewegung eines dynamischen Systems [3]) fastperiodisch [4]) [5]) ist."

[1]) Vgl. A: Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892 (französische umgearbeitete Übersetzung in Ann. Fac. Toulouse, (2) **9**). Liapounoff führt dort den allgemeinen Begriff der Stabilität einer Bewegung in bezug auf ein Parametersystem ein. In dem Andronow-Wittschen Problem und in der vorliegenden Arbeit handelt es sich aber nur um denjenigen Spezialfall, in welchem dieses Parametersystem zu der vollständigen Bestimmung des Bewegungszustandes dienen kann.

[2]) Der wichtige Begriff einer rekurrenten Bewegung ist von G. D. Birkhoff eingeführt. Vgl. G. D. Birkhoff, Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques. Bull. Soc. Math. France **40** (1912), S. 303—323.

[3]) Unter einem „dynamischen System" wird hier ein physikalisches System verstanden, dessen Zustand durch eine endliche Anzahl mit der Zeit sich stetig ändernder reeller Größen $x_1, \ldots, x_n$ beschrieben werden kann (vgl. G. D. Birkhoff, Dynamical Systems, New York 1927). Letztere werden der einzigen Bedingung unterworfen, einem Differentialgleichungssystem (1) zu genügen.

[4]) Die Definition des Begriffs einer fastperiodischen Bewegung ist von Ph. Franklin ausdrücklich formuliert. Vgl. Ph. Franklin, Almost periodic recurrent motions. Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 325—331.

[5]) Dieser Begriff stammt indessen letzten Endes von H. Bohr. Vgl. H. Bohr, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I, Acta, math. **45** (1925), S. 29—127.

Es zeigte sich bald, daß dieses Problem mit verschiedenen anderen auf die fastperiodischen Bewegungen sich beziehenden Fragestellungen eng verwandt ist. Allen diesen Problemen kommt die gemeinsame Eigentümlichkeit zu: Es wird allemal verlangt, aus gewissen in bezug auf den Variationssinn der Zeit „einseitigen" Stabilitätseigenschaften der Bewegungen eine „zweiseitige" Eigenschaft — die Fastperiodizität — logisch abzuleiten. In der vorliegenden Arbeit werden drei derartige Probleme in ihrem gegenseitigen Zusammenhange behandelt und gelöst [6]).

2. Im § 1 wird an bekannte allgemeine Tatsachen erinnert. Es werden hier drei die einzige Grundlage dieser Untersuchung bildende Fundamentaleigenschaften der Bewegungen zusammengestellt. Ferner sind hier einige für das Folgende wichtige Hilfssätze angeführt [7]).

Der nächste Paragraph spielt eine Hilfsrolle. Es werden dort gewisse Zahlenmengeneigenschaften definiert und ein Hilfssatz über diese „Δ_m-Eigenschaften" bewiesen [8]).

Der Inhalt von § 3 schließt sich an die in der Fußnote [4]) zitierte Arbeit von Ph. Franklin und eine Comptes-Rendus-Note des Verfassers [9]) an. Die Hauptresultate dieser beiden Arbeiten werden unter Benutzung des Hilfssatzes von § 2 wesentlich verschärft.

Im § 4 wird der Begriff der bedingten Stabilität im Liapounoffschen Sinne definiert, und zwar nicht (wie bei Liapounoff selbst) für die Bewegungen, sondern für die einzelnen Bewegungszustände, was im allgemeinen gewisse Vorteile hat, in wichtigsten Spezialfällen aber auf dasselbe hinauskommt [10]). Es wird ferner der Begriff der gleichmäßigen (bedingten) Liapounoffschen Stabilität eingeführt und ein auf diesen Begriff sich beziehender Hilfssatz bewiesen.

Im § 5 werden einige Hilfssätze über die aus vollständigen Bahnen bestehenden „stationären" [10a]) Mengen bewiesen.

Im § 6 wird das Hauptresultat dieser Untersuchung aufgestellt; der Satz III, welcher in gewissen Fällen von der einseitigen Liapounoffschen Stabilität auf die Fastperiodizität zu schließen gestattet.

---

[6]) Vgl. die Sätze I, III, IV.

[7]) Diese Hilfssätze sind trotz ihrer Bekanntheit mit ausführlichen Beweisen begleitet, was den Hauptzweck hat, die Ableitbarkeit aller dieser Tatsachen aus den Eigenschaften $\mathfrak{E}$ I, $\mathfrak{E}$ II, $\mathfrak{E}$ III (§ 1) allein (ohne direkte Benutzung der Gleichungen) (1) ins Licht zu setzen.

[8]) Eine eingehende Betrachtung der Δ_m-Eigenschaften würde vielleicht interessant sein, liegt aber außer dem Plane dieser Arbeit.

[9]) C. R. **189** (1929), S. 732—734.

[10]) Vgl. den Hilfssatz XI und die Definition XII (§ 5).

[10a]) Obwohl das Wort „stationär" in unserer Bedeutung niemals benutzt war, ist der Begriff wohlbekannt, Vgl. loc. cit. [2]) S. 308 ff.

Endlich wird im § 7 das oben formulierte Andronow-Wittsche Problem im positiven Sinne gelöst[11]) und ein anderes noch ungelöstes daran anschließendes Problem aufgestellt.

Ich muß hier meinen herzlichsten Dank Prof. N. M. Günther für wertvolle Ratschläge aussprechen.

3. Es werden die üblichen mengentheoretischen Bezeichnungen benutzt: $x \in A$ bedeutet, daß x der Menge A angehört; $A \subset B$ daß A eine Teilmenge von B ist. Durchschnitte bzw. Vereinigungsmengen werden durch die Zeichen $\times$ bzw. $+$ und Π bzw. Σ bezeichnet. Speziell bedeutet $\prod_{x \in B} A_x$ bzw. $\sum_{x \in B} A_x$ den Durchschnitt bzw. die Vereinigungsmenge aller Mengen A_x mit $x \in B$. Die leere Menge wird durch O bezeichnet. Der n-dimensionale Zahlenraum durch E_n. E_1 bedeutet also die Zahlengerade. Sind x und y Punkte des E_n, so wird ihre Euklidische Entfernung durch $\varrho(x, y)$ bezeichnet.

Sind ferner A, B Teilmengen von E_n, so wird durch $\varrho(A, y)$ bzw. $\varrho(A, B)$ die untere Schranke der Entfernungen $\varrho(x, y)$ mit $x \in A$ bzw. $x \in A$, $y \in B$ bezeichnet. Diese untere Schranke nennen wir auch Entfernung zwischen A und y bzw. A und B. Durch $S(x, \delta)$ bzw. $S(A, \delta)$ bezeichnen wir die sphärische δ-Umgebung des Punktes x bzw. der Menge A, d. h. die Menge der Punkte y mit $\varrho(x, y) < \delta$ bzw. $\varrho(A, y) < \delta$; durch $D(A)$ den Durchmesser der Menge A, d. h. die obere Schranke der Entfernungen $\varrho(x, y)$ mit $x \in A$, $y \in A$; durch $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A, d. h. die Menge aller Punkte y mit $\varrho(A, y) = 0$.

Unter einer Zahl wird immer eine reelle Zahl verstanden. Sind a und b Zahlen, so wird durch (a, b) bzw. $[a, b]$ die Menge aller Zahlen t mit $a < t < b$ bzw. $a \leqq t \leqq b$ bezeichnet. (a, b) wird „das Zahlenintervall (a, b)“, $[a, b]$ „die Zahlenstrecke $[a, b]$“ genannt. Speziell ist also $[a, a]$ eine einpunktige Zahlenstrecke.

§ 1.

Fundamentaleigenschaften der Bewegungen.

1. Wir werden die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

betrachten. Dabei sollen die X_i in einem Gebiete G des E_n erklärte reelle, eindeutige Funktionen der n „Koordinaten“ $x_1, \ldots, x_n$ sein. Für jeden

[11]) Vgl. den Satz IV.

Punkt von G soll eine Umgebung existieren, in welcher alle X_i Lipschitzschen Bedingungen genügen.

Definition I. Sind

$$x_i = f_i(t) \quad (a < t < b;\ i = 1, \ldots, n;\ -\infty \leqq a < b \leqq +\infty), \tag{2}$$

$$x_i = g_i(t) \quad (c < t < d;\ i = 1, \ldots, n;\ -\infty \leqq c < d \leqq +\infty) \tag{3}$$

Lösungen des Systems (1), so sagen wir, daß (3) eine *Fortsetzung* von (2) ist, wenn (a, b) eine echte Teilmenge von (c, d) ist und wenn dabei

$$f_i(t) \equiv g_i(t) \qquad (a < t < b;\ i = 1, \ldots, n)$$

gilt. Die in diesem Sinne unfortsetzbaren Lösungen des Systems (1) nennen wir *Bewegungen.*

Ist (2) eine Bewegung, so betrachten wir das Funktionensystem $\{f_i\}$ als eine einzige in (a, b) erklärte Funktion — eine Funktion, deren Werte Punkte von E_n sind — und bezeichnen sie durch *einen* Buchstaben, etwa f. Wir sprechen dann von der „Bewegung f" und schreiben statt (2):

$$x = f(t) \qquad (a < t < b),$$

wo also x einen Punkt von E_n bedeutet.

2. Aus den bekannten Existenz-, Unitäts- und Stetigkeitssätzen lassen sich folgende Fundamentaleigenschaften der Bewegungen ableiten:

𝔈 I. Ist $y \in G$ und $v \in E_1$, so gibt es eine und nur eine der Bedingung

$$y = f(v) \tag{4}$$

genügende Bewegung f.

𝔈 II. Bezeichnet man (was im folgenden stets getan wird) die einzige der Bedingung (4) genügende Bewegung durch f_{vy}, so gilt die Identität:

$$f_{vy}(v + t) \equiv f_{wy}(w + t), \tag{5}$$

falls nur ihre linke Seite sinnvoll ist (dann ist auch ihre rechte Seite sinnvoll).

Diese Eigenschaft ist eine Folgerung der Unabhängigkeit der X_i von t

Wegen (5) ist der Ausdruck $f_{uy}(u + t)$ nur von t und y abhängig und kann darum durch $\varphi_t y$ bezeichnet werden:

$$\varphi_t y \equiv f_{uy}(u + t). \tag{6}$$

Der Ausdruck $\varphi_t y$ ist für $(a_y < t < b_y)$ erklärt, wo a_y und b_y gewisse von y abhängige (eventuell unendliche) Zahlen sind. Dabei ist $a_y < 0 < b_y$ und es gilt

$$\varphi_0 y \equiv y. \tag{7}$$

Bedienen wir uns der wohlbekannten hydromechanischen Interpretation des Gleichungssystems (1), so bedeutet $\varphi_t y$ den Ort, zu dem ein anfangs

im Punkte y sich befindendes Flüssigkeitsteilchen nach dem Ablauf der Zeit t gelangt. Die dritte Fundamentaleigenschaft der Bewegungen ist nun die Stetigkeit der auf diese Weise durch die Funktion $\varphi_t y$ bestimmten stationären Flüssigkeitsströmung.

$\mathfrak{E}$ III. Ist $\varphi_v y$ für $v = t$ und $y = x$ sinnvoll, so kann man jeder Zahl $\eta > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ so zuordnen, daß die Bedingungen

$$|v - t| < \delta, \quad \varrho(y, x) < \delta$$

die Existenz von $\varphi_v y$ und das Erfülltsein der Ungleichung:

$$\varrho(\varphi_v y, \varphi_t x) < \eta$$

zur Folge haben. Mit anderen Worten: $\varphi_v y$ als Funktion des Paares (v, y) betrachtet ist in einer offenen Menge des $n+1$-dimensionalen Raumes der Paare (v, y) erklärt und ist daselbst stetig.

Die drei Eigenschaften $\mathfrak{E}$ I, $\mathfrak{E}$ II und $\mathfrak{E}$ III bilden die Grundlage der vorliegenden Arbeit.

An dieser Stelle seien noch die sehr nützlichen, aus $\mathfrak{E}$ I und $\mathfrak{E}$ II sofort folgenden Formeln

$$\varphi_v f(u) \equiv f(u + v), \tag{8}$$

$$\varphi_v \varphi_u y \equiv \varphi_{u+v} y \tag{9}$$

angeführt, wo f eine beliebige Bewegung bedeutet.

Die Identität (8) bzw. (9) ist gültig, 1. sobald $f(u)$ und $f(u+v)$ bzw. $\varphi_u y$ und $\varphi_{u+v} y$ existieren, 2. sobald $\varphi_v f(u)$ bzw. $\varphi_v \varphi_u y$ existiert.

3. Wir beweisen nun folgenden

Hilfssatz I. *Es sei F eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge des Gebietes G, $\eta > 0$ und $l \geqq 0$. Ist dann $\varphi_t x$ für*

$$0 \leqq t \leqq l, \quad x \in F \tag{10}$$

sinnvoll, so gibt es eine Zahl $\delta > 0$ derart, daß auch $\varphi_t y$ stets sinnvoll ist und der Ungleichung

$$\varrho(\varphi_t x, \varphi_t y) < \eta \tag{11}$$

genügt, sobald x und t den Bedingungen (10) *genügen und*

$$\varrho(x, y) < \delta \tag{12}$$

ist.

Beweis. Es sei Φ die Menge aller den Bedingungen (10) genügenden Paare (t, x); Γ die Menge der Paare (t, x), für welche $\varphi_t x$ sinnvoll ist. Als Teilmenge von E_{n+1} betrachtet, ist Φ beschränkt, abgeschlossen und in der nach $\mathfrak{E}$ III offenen Menge Γ enthalten. Es sei θ die notwendig positive Entfernung der Menge Φ vom Komplemente der Menge Γ im E_{n+1}; $\Phi_1 = \overline{S\left(\Phi, \frac{\theta}{2}\right)}$.

Dann ist auch Φ_1 beschränkt, abgeschlossen und in Γ enthalten. Der Ausdruck $\varphi_t x$ als Funktion des Punktes (t, x) betrachtet, ist in Φ_1 erklärt und ist daselbst stetig. Demnach ist $\varphi_t x$ in Φ_1 gleichmäßig stetig, und es gibt eine Zahl $\sigma > 0$ so, daß die Ungleichung

$$\varrho(\varphi_u x, \varphi_v y) < \eta$$

immer erfüllt wird, sobald u, v, x, y den Bedingungen

$$(u, x) \in \Phi_1, \quad (v, y) \in \Phi_1, \quad (u - v)^2 + \varrho^2(x, y) < \sigma^2$$

genügen. Setzt man endlich

$$\delta = \min\left[\frac{\theta}{2}, \sigma\right],$$

so überzeugt man sich leicht, daß δ die verlangte Eigenschaft besitzt.

4. Definition II. Die Zahl w gehöre dem Definitionsintervall der Bewegung f an. Die Menge aller Punkte $f(t)$ mit $t \geqq w$ (bzw. $t \leqq w$) wird im folgenden die *positive* (bzw. *negative*) *w-Halbbahn* von f heißen; die Menge sämtlicher Punkte $f(t)$ die *Bahn* von f.

Die Bahn von f wird im folgenden durch Orb f bezeichnet; die positive (bzw. negative) w-Halbbahn von f durch $\mathrm{Orb}_w^+ f$ (bzw. $\mathrm{Orb}_w^- f$).

Definition III. Die Bewegung f ist (*im elementaren Sinne*) *positiv* (*bzw. negativ*) *stabil*, wenn die abgeschlossene Hülle einer und dann jeder [12]) ihrer positiven (bzw. negativen) Halbbahnen beschränkt und in G enthalten ist. f ist (*im elementaren Sinne*) *beiderseits stabil*, wenn Orb f beschränkt und in G enthalten ist [13]).

Man sieht leicht, daß eine Bewegung dann und nur dann beiderseits stabil ist, wenn sie zugleich positiv und negativ stabil ist.

5. Hilfssatz II. *Ist die obere* (*bzw. untere*) *Schranke des Definitionsintervalls der Bewegung f endlich, so gibt es für jede beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von G eine zu ihr punktfremde positive* (*bzw. negative*) *Halbbahn von f* [14]).

Beweis. Nehmen wir an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es eine Bewegung mit einem Definitionsintervall (a, b) und eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge F des Gebietes G derart, daß $b < +\infty$ ist und daß jede der Mengen $\mathrm{Orb}_{w_m}^+ f$ $(m = 1, 2, \ldots)$ mit

[12]) Denn zwei positive Halbbahnen $\mathrm{Orb}_u f$ und $\mathrm{Orb}_v f$ $(u < v)$ einer und derselben Bewegung f unterscheiden sich nicht mehr als um die Menge der Punkte $f(t)$, für welche $u \leqq t \leqq v$ ist. Diese Menge ist aber, offenbar beschränkt, abgeschlossen und in G enthalten.

[13]) Vgl. loc. cit. [2]), S. 308.

[14]) Vgl. loc. cit. [2]), S. 307.

$$w_m = \max\left[b - \frac{1}{m}, \frac{a+b}{2}\right] \tag{13}$$

Punkte von F enthält. Wir ordnen jedem natürlichen m einen gemeinsamen Punkt x^m der Mengen F und $\mathrm{Orb}^+_{w_m} f$ zu. Es sei

$$x^m = f(t_m),$$
$$w_m \leqq t_m < b. \tag{14}$$

Die Folge $x^1, x^2, \ldots$ enthält — wegen der Beschränktheit der Menge F — eine konvergente Teilfolge $x^{m_1}, x^{m_2}, \ldots$ $(m_1 < m_2 < \ldots)$, deren Limes durch x bezeichnet sei:

$$\lim_{i \to \infty} x^{m_i} = x. \tag{15}$$

Wegen der Abgeschlossenheit der Menge F gehört x zu F und — da $F \subset G$ ist — auch zu G.

Nach Ⓔ I gibt es daher die durch die „Anfangsdaten“ b, x bestimmte Bewegung f_{bx}. Diese möge im Intervalle (c, d) definiert sein.

Offenbar ist $c < b$, und die Intervalle (a, b) und (c, d) haben gemeinsame Punkte. Es sei t ein solcher Punkt. Wir wollen zeigen, daß

$$f_{bx}(t) = f(t) \tag{16}$$

ist.

Wir bemerken für diesen Zweck, daß die Folge $t_1, t_2, \ldots$ — wegen (13) und (14) — gegen b konvergiert. Demnach ist auch

$$\lim_{i \to \infty} t_{m_i} = b. \tag{17}$$

Formel (8) ergibt ferner

$$f(t) = \varphi_{t-t_{m_i}} f(t_{m_i}) = \varphi_{t-t_{m_i}} x^{m_i}, \tag{18}$$

$$f_{bx}(t) = \varphi_{t-b} f_{bx}(b) = \varphi_{t-b} x. \tag{19}$$

Nun ist (16) eine unmittelbare Folgerung aus (15), (17), (18), (19) und Ⓔ III. Man schließt aus (16) unter Heranziehung von Ⓔ I, daß die Bewegungen f und f_{bx} identisch sind. Das ist aber unmöglich, da b dem Definitionsintervall der Bewegung f nicht angehört. Wir sind also zu einem Widerspruch gelangt und damit den Hilfssatz II bewiesen.

Aus dem Hilfssatze II folgt der bekannte

Korollar. *Jede positiv (negativ) stabile Bewegung hat ein positiv (negativ) unendliches Definitionsintervall. Jede beiderseits stabile Bewegung hat die ganze Zahlengerade als Definitionsintervall*[15]).

6. Hilfssatz III. *Es sei f eine beiderseits stabile Bewegung. Für jede Zahl $\eta > 0$ und jede Zahl $l \geqq 0$ läßt sich eine Zahl $\delta > 0$ so an-*

[15]) Vgl. loc. cit. [2]), S. 308.

geben, daß die Ungleichung (11) *immer erfüllt wird, sobald* t, x *und* y *den Bedingungen*

$$0 \leqq t \leqq l, \quad x \in \overline{\mathrm{Orb}\, f} \tag{20}$$

und (12) *genügen.*

Beweis. Es sei x ein beliebiger Punkt der Menge $\overline{\mathrm{Orb}\, f}$; $x^1, x^2, \ldots$ eine gegen x konvergierende Folge, deren Elemente Punkte von $\mathrm{Orb}\, f$ sind:

$$x^i = f(t_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ist $\varphi_t x$ für irgendeinen Wert von t sinnvoll, so ist — wegen (8) und $\mathfrak{E}$ III —

$$\lim_{i \to \infty} f(t_i + t) = \lim_{i \to \infty} \varphi_t x^i = \varphi_t x.$$

Daraus folgt, daß (sobald $f_{0x}(t)$ existiert)

$$f_{0x}(t) = \varphi_t x \in \overline{\mathrm{Orb}\, f}$$

ist. Man hat also: $\mathrm{Orb}\, f_{0x} \subset \overline{\mathrm{Orb}\, f}$ und demnach $\overline{\mathrm{Orb}\, f_{0x}} \subset \overline{\mathrm{Orb}\, f}$. Nun ist $\overline{\mathrm{Orb}\, f}$ laut Voraussetzung eine beschränkte Teilmenge von G. Also ist auch $\overline{\mathrm{Orb}\, f_{0x}}$ eine solche, und die Bewegung f_{0x} ist beiderseits stabil. Daraus folgt — nach dem Korollar aus dem Hilfssatze II —, daß $f_{0x}(t)$, d. h. $\varphi_t x$ für jeden Wert von t und jeden Punkt $x \in \overline{\mathrm{Orb}\, f}$ sinnvoll ist.

Somit ist der Hilfssatz I auf $F = \overline{\mathrm{Orb}\, f}$ und beliebige Zahlen $\eta > 0$, $l \geqq 0$ anwendbar. Ihre Anwendung liefert aber gerade die Behauptung des Hilfssatzes III.

Den soeben bewiesenen Hilfssatz III findet man auch in der oben zitierten Arbeit von Ph. Franklin[16]).

Der hier angeführte Beweis ist aber vom Franklinschen wesentlich verschieden. Wir stützen uns nämlich nur auf die drei Fundamentaleigenschaften der Bewegungen $\mathfrak{E}$ I, $\mathfrak{E}$ II und $\mathfrak{E}$ III, während bei Franklin die Lipschitzschen Bedingungen für $X_1, \ldots, X_n$ direkt benutzt werden.

§ 2.

Ein Hilfssatz.

1. Definition IV. Es sei m eine natürliche Zahl. Wir werden sagen, daß die Zahlenmenge A die *Eigenschaft* Δ_m besitzt, wenn für jede $m+1$-gliedrige Zahlenfolge

$$t_1, \ldots, t_{m+1} \tag{21}$$

[16]) Loc. cit. [4]), S. 326—327.

zwei den Bedingungen

$$1 \leqq i < j \leqq m+1, \tag{22}$$

$$t_i - t_j \in A \tag{23}$$

genügende Indizes i, j sich angeben lassen.

Definition V. Wir werden sagen, daß die Zahlenmenge A *reichlich verteilt* ist, wenn es eine nicht negative Zahl l derart gibt, daß jede Zahlenstrecke der Länge l mindestens einen Punkt der Menge A enthält.

2. Hilfssatz IV. *Für jede natürliche Zahl m ist jede die Eigenschaft Δ_m besitzende Zahlenmenge reichlich verteilt.*

Beweis. Die von m abhängige Aussage: „jede Zahlenmenge mit der Eigenschaft Δ_m ist reichlich verteilt" sei durch $\mathfrak{A}_m$ bezeichnet. Dann ist $\mathfrak{A}_1$ richtig, denn die ganze Zahlengerade ist offenbar die einzige Zahlenmenge mit der Eigenschaft Δ_1. Um den Hilfssatz IV allgemein zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß $\mathfrak{A}_m$ eine Folgerung von $\mathfrak{A}_{m-1}$ ist $(m = 2, 3, \ldots)$.

Wir nehmen also an, daß $\mathfrak{A}_{m-1}$ richtig ist, und betrachten eine die Eigenschaft Δ_m besitzende Zahlenmenge A. Man muß zeigen, daß A reichlich verteilt ist. Zwei Fälle können hier auftreten. Die Menge A kann nämlich auch die Eigenschaft Δ_{m-1} besitzen. Dann ist sie nach unserer Annahme sicher reichlich verteilt.

Im entgegengesetzten Falle ist die Eigenschaft Δ_{m-1} bei A nicht vorhanden, und es gibt eine m-gliedrige Zahlenfolge $v_1, \ldots, v_m$, für welche durchweg

$$v_i - v_j \text{ non} \in A \qquad (1 \leqq i < j \leqq m) \tag{24}$$

gilt. Wir setzen

$$l = \max[v_1, \ldots, v_m] - \min[v_1, \ldots, v_m] \tag{25}$$

und werden zeigen, daß jede Zahlenstrecke der Länge l Punkte von A enthält.

Es sei wirklich $[a, a+l]$ eine solche Zahlenstrecke. Man setze

$$t_s = a + v_s - \min[v_1, \ldots, v_m] \qquad (s = 1, \ldots, m), \tag{26}$$

$$t_{m+1} = 0. \tag{27}$$

Da A laut Voraussetzung die Eigenschaft Δ_m besitzt, gibt es zwei den Bedingungen (22) und (23) genügende Indizes i, j. Hier kann nicht $j < m+1$ sein, denn es ist jedenfalls $i < m+1$, und wir hätten nach (26) und (24): $t_i - t_j = v_i - v_j$ non $\in A$ im Widerspruch zu (23). Also ist $j = m+1$, was — wegen (23) und (27) — die Aussage $t_i \in A$ zur Folge hat.

Aus (22) folgt andererseits, daß $1 \leqq i \leqq m$ ist, was wegen (25) und (26) die Ungleichungen $a \leqq t_i \leqq a+l$ liefert.

Also hat wirklich die Strecke $[a, a+l]$ mit der Menge A einen gemeinsamen Punkt (nämlich t_i), w. z. b. w.

§ 3.

Fastperiodische Bewegungen.

1. Nun kehren wir zur Betrachtung der durch (1) definierten Bewegungen zurück und formulieren folgende Definitionen:

Definition VI. Die Bewegung f habe die Zahlengerade als Definitionsintervall; η sei eine positive Zahl. Wir sagen dann, daß die Zahl v eine *η-Verschiebungszahl* der Bewegung f ist, wenn die Ungleichung

$$\varrho\{f(t), f(t+v)\} < \eta$$

für jeden Wert von t erfüllt ist.

Definition VII. Wir sagen, daß die Bewegung f *fastperiodisch* ist wenn folgendes gilt:

1. f ist beiderseits stabil.

2. Die Menge der η-Verschiebungszahlen von f ist bei jeder Wahl von $\eta > 0$ reichlich verteilt.

Die letzte Definition ist, wie man sieht, der wohlbekannten Bohrschen Definition einer stetigen fastperiodischen Funktion[17]) nachgebildet. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß die Werte der hier in Betracht kommenden Funktionen nicht Zahlen, sondern Punkte des E_n sind und daß diese Funktionen den Bedingungen (1) unterworfen werden. Außerdem ist noch die Stabilitätsbedingung 1. hinzugefügt. Man darf kaum zweifeln, daß ohne diese letzte Einschränkung der Begriff einer fastperiodischen Bewegung zu weit und mechanisch uninteressant wäre[18]).

Man überzeugt sich leicht, daß eine durch die Gleichungen (2) definierte beiderseits stabile Bewegung dann und nur dann fastperiodisch ist, wenn jede der Funktionen f_i im Bohrschen Sinne fastperiodisch ist. Um das einzusehen, braucht man nur den Bohrschen Hilfssatz über die gemeinsamen Verschiebungszahlen mehrerer fastperiodischen Funktionen[19]) heranzuziehen.

Diese Eigenschaft fastperiodischer Bewegungen kann also auch zu ihrer Definition dienen. Doch ist Definition VII für unsere Zwecke bequemer.

2. Es sollen nun einige neue charakteristische Eigenschaften fastperiodischer Bewegungen angegeben und dazu folgende Begriffe eingeführt werden:

Definition VIII. Die Bewegung f habe die Zahlengerade als Definitionsintervall. Wir sagen, daß f die *Eigenschaft* S^+ (bzw. S^-, bzw. S) besitzt, wenn folgendes gilt:

---

[17]) Loc. cit. [5]), S. 30.

[18]) Vgl. auch den Beweis unseres Satzes I, wo diese Einschränkung eine wichtige Rolle spielt.

[19]) Loc. cit. [5]), S. 37–39.

1. f ist negativ (bzw. positiv, bzw. beiderseits) stabil.

2. Man kann jeder Zahl $\eta > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ so zuordnen, daß die Ungleichung

$$\varrho\{f(w_1 + w), f(w_2 + w)\} < \eta \tag{28}$$

für jeden nichtnegativen (bzw. nichtpositiven, bzw. reellen) Wert von w erfüllt wird, sobald w_1 und w_2 der Bedingung

$$\varrho\{f(w_1), f(w_2)\} < \delta \tag{29}$$

genügen.

3. Von den soeben definierten drei Eigenschaften: S^+, S^- und S war letztere (zwar ohne die Stabilitätsbedingung) bereits von Franklin eingeführt[30]). Diese Eigenschaft ist offenbar dem gleichzeitigen Vorhandensein der Eigenschaften S^+ und S^- äquivalent. Der nun folgende Satz zeigt aber, daß diese logische Zerspaltung der Eigenschaft S nur eine scheinbare ist.

Satz I. *Jede der drei Eigenschaften S^+, S^-, S ist eine charakteristische Eigenschaft fastperiodischer Bewegungen.*

Beweis. Wir beweisen diesen Satz, indem wir zeigen: 1. jede fastperiodische Bewegung besitzt die Eigenschaft S; 2. jede Bewegung, welche eine der Eigenschaften S^+ oder S^- besitzt, ist fastperiodisch.

1. Es sei f eine fastperiodische Bewegung. Es ist zu beweisen, daß f die Eigenschaft S besitzt.

Die beiderseitige Stabilität der Bewegung f folgt sofort aus ihrer Fastperiodizität[31]) und es bleibt nur das Erfülltsein von 2. in Definition VIII nachzuweisen, was nach Franklin[32]) folgendermaßen vollzogen wird.

Man bestimme zunächst eine Zahl $l \geqq 0$, so daß jede Zahlenstrecke der Länge l mindestens eine $\frac{\eta}{3}$-Verschiebungszahl ($\eta > 0$ beliebig vorgegeben) von f enthält. Das ist möglich, da die $\frac{\eta}{3}$-Verschiebungszahlen von f eine reichlich verteilte Menge bilden.

Man wähle dann $\delta > 0$ gemäß dem Hilfssatze III, so daß die Ungleichung

$$\varrho(\varphi_t x, \varphi_t y) < \frac{\eta}{3}$$

eine Folgerung von (12) und (20) wird.

Sind dann w_1, w_2, w beliebige der Bedingung (29) genügende Zahlen, so nehmen wir eine der Zahlenstrecke $[-w, -w+l]$ gehörende $\frac{\eta}{3}$-Verschiebungszahl v der Bewegung f und bekommen mit Rücksicht auf (8):

---

[30]) Loc. cit. [4]), S. 328.

[31]) Vgl. Definition VII.

[32]) Loc. cit. [4]), S. 328—329.

$$0 \leqq v + w \leqq l,$$

$$\varrho\{f(w_1 + w), f(w_1 + w + v)\} < \frac{\eta}{3},$$

$$\varrho\{f(w_2 + w), f(w_2 + w + v)\} < \frac{\eta}{3},$$

$$\varrho\{f(w_1 + w + v), f(w_2 + w + v)\} = \varrho\{\varphi_{v+w} f(w_1), \varphi_{v+w} f(w_2)\} < \frac{\eta}{3},$$

was die Ungleichung (28) sofort liefert.

2. Es sei nun f eine Bewegung mit der Eigenschaft S^+. Man muß beweisen, daß f fastperiodisch ist, daß also die Bedingungen 1. und 2. in Definition VII erfüllt sind. Zunächst sei dies für 2. in Definition VII gezeigt.

Es sei also eine Zahl $\eta > 0$ vorgegeben. Wir müssen zeigen, daß die Menge der η-Verschiebungszahlen von f reichlich verteilt ist.

Wir bestimmen dazu eine Zahl $\delta > 0$ gemäß 2. in Definition VIII, so daß (28) für jeden nichtnegativen Wert von w erfüllt wird, sobald w_1 und w_2 der Bedingung (29) genügen.

Wir betrachten nun die Menge $\mathrm{Orb}_0^- f$. Diese Menge ist — wegen des Erfülltseins der Bedingung 1. in Definition VIII — beschränkt und kann daher als Summe einer endlichen Anzahl von Mengen $A_1, \ldots, A_m$, deren Durchmesser sämtlich kleiner als δ sind, dargestellt werden:

$$\mathrm{Orb}_0^- f = \sum_{i=1}^{m} A_i, \tag{30}$$

$$D(A_i) < \delta \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{31}$$

wobei m eine natürliche Zahl ist. Wir wollen beweisen, daß die Menge aller η-Verschiebungszahlen von f die Eigenschaft Δ_m besitzt.

Es sei in der Tat eine $m+1$-gliedrige Zahlenfolge (21) beliebig vorgegeben. Wir setzen

$$T = \max[t_1, \ldots, t_{m+1}] \tag{32}$$

und bilden die Punktfolge

$$f(t_1 - T - k), \ldots, f(t_{m+1} - T - k),$$

wobei k eine natürliche Zahl bedeutet. Wegen (30) und (32) gehört jedes Element dieser $m+1$-gliedrigen Folge der Menge $\mathrm{Orb}_0^- f$ und demnach einer der Mengen A_i an. Da aber die Anzahl der letzteren Mengen nur m ist, gibt es zwei Indexe p_k und q_k $(> p_k)$, für welche die Punkte $f(t_{p_k} - T - k)$ und $f(t_{q_k} - T - k)$ einer und derselben Menge A_i angehören. Wir haben dann nach (31)

$$\varrho\{f(t_{p_k} - T - k), f(t_{q_k} - T - k)\} < \delta, \tag{33}$$

$$1 \leqq p_k < q_k \leqq m + 1. \tag{34}$$

Solche Paare (p_k, q_k) bestimmen wir nun für jede natürliche Zahl k. Wir erhalten somit eine unendliche Paarenfolge

$$(35) \qquad (p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots,$$

deren sämtliche Glieder den Bedingungen (33) und (34) genügen.

Nun gibt es aber nur endlich viele der Bedingung: $1 \leqq p < q \leqq m+1$ genügende Paare ganzer Zahlen (p, q). Ein Paar, etwa (i, j), muß daher in der Folge (35) unendlich oft vorkommen. Es ist dann aber leicht einzusehen, daß $t_i - t_j$ eine η-Verschiebungszahl der Bewegung f ist.

Ist in der Tat eine Zahl t beliebig vorgegeben, so wähle man eine den Bedingungen

$$(36) \qquad k \geqq t_j - T - t,$$

$$(37) \qquad p_k = i, \quad q_k = j$$

genügende natürliche Zahl k, was ja immer möglich ist, da das Paar (i, j) in der Folge (35) unendlich oft vorkommt. Wegen (33) und (37) ist dann

$$\varrho\{f(t_i - T - k), f(t_j - T - k)\} < \delta,$$

was infolge von (36) und der auf δ auferlegten Bedingung die Ungleichung

$$\varrho\{f(t + t_i - t_j), f(t)\} < \eta$$

ergibt. Diese Ungleichung ist somit für jeden Wert von t befriedigt. Also ist $t_i - t_j$ wirklich eine η-Verschiebungszahl von f.

Beachten wir ferner, daß i und j wegen (34) der Bedingung (22) genügen und daß die Folge (21) beliebig war, so können wir daraus schließen, daß die Menge der η-Verschiebungszahlen der Bewegung f die Eigenschaft Δ_m besitzt. Nach dem Hilfssatze IV ist diese Menge infolgedessen reichlich verteilt, was wir zeigen wollten.

Also ist 2. in Definition VII tatsächlich erfüllt, und es bleibt uns nur die beiderseitige Stabilität der Bewegung f nachzuweisen. Dieser Beweis kann nun folgendermaßen geführt werden.

Es sei $x = f(t)$ ein beliebiger Punkt von Orb f, η eine beliebige positive Zahl. Wir nehmen eine der Ungleichung $v \geqq t$ genügende η-Verschiebungszahl v der Bewegung f, was nach dem soeben Bewiesenen immer möglich ist, da die Menge dieser Zahlen reichlich verteilt ist. Es ist dann

$$\varrho\{x, f(t - v)\} < \eta, f(t - v) \in \mathrm{Orb}_0^- f.$$

Daraus folgt — wegen der Willkürlichkeit der Zahl η —, daß $x \in \overline{\mathrm{Orb}_0^- f}$ ist. Da aber x ein beliebiger Punkt von Orb f war, ist demzufolge $\overline{\mathrm{Orb}\, f} \subset \overline{\mathrm{Orb}_0^- f}$, also auch $\overline{\overline{\mathrm{Orb}\, f}} \subset \overline{\mathrm{Orb}_0^- f}$, und da $\overline{\mathrm{Orb}_0^- f}$ — wegen 1. in

Definition VIII — eine beschränkte Teilmenge von G ist, ist auch $\overline{\text{Orb } f}$ beschränkt und in G enthalten, w. z. b. w.

Mutatis mutandis wird der Beweis im Falle der Eigenschaft S^- geführt.

4. Aus der Zusammenstellung des Hilfssatzes IV mit dem Beweise des Satzes I ergibt sich als Nebenresultat noch folgender

Satz II. *Eine beiderseits stabile Bewegung f ist dann und nur dann fastperiodisch, wenn man für jede Zahl $\eta > 0$ eine natürliche Zahl m so angeben kann, daß die Menge der η-Verschiebungszahlen von f die Eigenschaft Δ_m besitzt.*

§ 4.

Stabilität nach Liapounoff.

1. Die Eigenschaften S^+, S^- und S sind offenbar mit der Liapounoffschen Stabilität[1]) sehr nahe verwandt. Will man die Definitionen aller dieser Begriffe hydromechanisch interpretieren, so muß man in allen Fällen über die gleichzeitigen Lagen zweier Flüssigkeitsteilchen sprechen und unter gewissen Bedingungen die Kleinheit der Entfernung zwischen diesen Lagen verlangen.

Es liegt daher nahe zu vermuten, daß zwischen der Stabilität im Liapounoffschen Sinne einerseits und den Eigenschaften S^+, S^-, S andererseits, d. h. zwischen der Liapounoffschen Stabilität und der Fastperiodizität auch gewisse logische Beziehungen vorhanden sein müssen. Mann kann insbesondere erwarten, daß die Fastperiodizität in manchen Fällen aus der Liapounoffschen Stabilität folgen wird. Eine Vermutung dieser Art wurde von Andronow und Witt tatsächlich ausgesprochen. Diese Vermutung, deren Richtigkeit wir im § 7 erweisen werden, gab den ersten Anstoß zur vorliegenden Untersuchung.

2. Für unsere Zwecke wird es bequem sein, einen der bedingten Liapounoffschen Stabilität entsprechenden Begriff einzuführen, welcher sich aber nicht auf die Bewegungen, sondern auf die einzelnen Punkte des Gebietes G beziehen wird. Dieser Begriff kann auch „bedingte Stabilität nach Liapounoff" heißen und möge folgendermaßen definiert sein.

Definition IX. Es sei $B \subset G$. Wir sagen, daß der Punkt $x\,(\in G)$ L_B^+- (bzw. L_B^--, bzw. L_B-) *stabil* [ausführlich: *in bezug auf die Menge B nach Liapounoff positiv* (bzw. *negativ*, bzw. *beiderseits*) *stabil*] ist, wenn folgendes gilt:

1. Die Bewegung f_{0x} ist positiv (bzw. negativ, bzw. beiderseits) stabil.

2. Man kann jeder Zahl $\eta > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ so zuordnen, daß die Ungleichung (11) für jeden nichtnegativen (bzw. nichtpositiven, bzw. reellen) Wert von t erfüllt wird, sobald y den Bedingungen

(38) $$y \in B$$

und (12) genügt[23]).

Ein Punkt ist nach dieser Definition offenbar dann und nur dann L_B-stabil, wenn er zugleich L_B^+- und L_B^--stabil ist. Ist x L_B^+- (bzw. L_B^--, bzw. L_B-) stabil und ist $C \subset B$, so ist x auch L_C^+- (bzw. L_C^--, bzw. L_C-) stabil.

3. Wir beweisen folgenden

Hilfssatz V. *Jeder L_B^+- (L_B^--, L_B-) stabile Punkt ist auch $L_{\overline{B}\times G}^+$- ($L_{\overline{B}\times G}^-$-, $L_{\overline{B}\times G}$-) stabil.*

Beweis. Es genügt offenbar, den Fall eines L_B^+-stabilen Punktes zu betrachten. Es sei also x ein L_B^+-stabiler Punkt. Wir müssen zeigen, daß x auch $L_{\overline{B}\times G}^+$-stabil ist.

Die erste Bedingung dafür — die positive elementare Stabilität der Bewegung f_{0x} —, ist schon in unserer Voraussetzung enthalten, und es bleibt zu beweisen, daß jeder Zahl $\eta > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ so zugeordnet werden kann, daß das Bestehen von (11) für $t \geqq 0$ eine Folgerung von

(39) $$y \in \overline{B} \times G$$

und (12) wird. Es genügt zum letzteren Zwecke, δ gemäß 2. in Definition IX so zu wählen, daß die Ungleichung

(40) $$\varrho(\varphi_t x, \varphi_t z) < \frac{\eta}{2}$$

für jede Zahl $t \geqq 0$ erfüllt wird, sobald z den Bedingungen

(41) $$z \in B,$$

(42) $$\varrho(x, z) < \delta$$

genügt.

Sind in der Tat die Bedingungen (12) und (39) erfüllt und ist $t \geqq 0$ beliebig vorgegeben, so können wir — wegen $\mathfrak{E}$ III — eine Zahl $\sigma > 0$ derart bestimmen, daß

(43) $$\varrho(\varphi_t y, \varphi_t z) < \frac{\eta}{2}$$

wird, sobald z der Bedingung

(44) $$\varrho(y, z) < \sigma$$

genügt; und wenn wir dann

(45) $$\theta = \min[\sigma, \delta - \varrho(x, y)]$$

setzen, so wird auch $\theta > 0$ sein.

---

[23]) Damit ist auch gefordert, daß $\varphi_t y$ für $t \geqq 0$ (bzw. $t \leqq 0$, bzw. $-\infty < t < +\infty$) stets existieren muß, sobald y den Bedingungen (12) und (38) genügt.

Nehmen wir nun einen den Bedingungen (41) und

$$\varrho(y,z)<\theta \tag{46}$$

genügenden Punkt z, was wegen (39) gewiß möglich ist, so wird (44) und demnach auch (43) erfüllt. Andererseits ist $\varrho(x,z)\leqq\varrho(x,y)+\varrho(y,z)$, was — wegen (45) und (46) — die Ungleichung (42) liefert, und da außerdem $z\in B$ ist, so folgt daraus — kraft der auf δ auferlegten Bedingung —, daß auch (40) erfüllt ist. Aus (40) und (43) folgt aber die Ungleichung (11), deren Bestehen zu beweisen war.

4. Wir brauchen einen auf die Liapounoffsche Stabilität sich beziehenden Gleichmäßigkeitsbegriff, welchen wir mittels folgender Definition einführen:

Definition X. A und B seien Teilmengen des Gebietes G. Wir sagen, daß die L_B^+- (L_B^--, L_B-) *Stabilität* in A *gleichmäßig*, oder auch daß A *gleichmäßig* L_B^+- (L_B^--, L_B-) *stabil* ist, wenn folgendes gilt:

1. Die Menge

$$\overline{\sum_{x\in A}\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x}}\left(\overline{\sum_{x\in A}\mathrm{Orb}_0^- f_{0x}},\ \overline{\sum_{x\in A}\mathrm{Orb}\, f_{0x}}\right) \tag{47}$$

ist beschränkt und in G enthalten.

2. Man kann jeder Zahl $\eta>0$ eine Zahl $\delta>0$ so zuordnen, daß die Ungleichung (11) für $t\geqq 0$ ($t\leqq 0$, $-\infty<t<+\infty$) stets erfüllt wird, sobald x und y den Bedingungen

$$x\in A,\quad y\in B \tag{48}$$

und (12) genügen.

5. Man sieht leicht, daß eine Menge dann und nur dann gleichmäßig L_B-stabil ist, wenn sie zugleich gleichmäßig L_B^+- und gleichmäßig L_B^--stabil ist. Ist eine Menge gleichmäßig L_B^+- (L_B^--, L_B-) stabil, so sind alle Punkte dieser Menge L_B^+- (L_B^--, L_B-) stabil. Dagegen ist das Umgekehrte schon wegen 1. in Definition X nicht allgemeingültig — alle Punkte der Menge A können wohl L_B^+- (L_B^--, L_B-) stabil sein, ohne daß die L_B^+- (L_B^--, L_B-) Stabilität in A gleichmäßig wäre. Die Gültigkeit dieser Umkehrung im Falle einer beschränkten, abgeschlossenen und in B enthaltenen Menge A bildet den Inhalt des folgenden Hilfssatzes.

Hilfssatz VI. *Sind alle Punkte der beschränkten und abgeschlossenen Menge A L_B^+- (L_B^--, L_B-) stabil und ist $A\subset B$, so ist die L_B^+- (L_B^--, L_B-) Stabilität in A gleichmäßig.*

Beweis. Es genügt offenbar, den Fall der L_B^+-Stabilität zu betrachten. Es sei also A eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von B, deren sämtliche Punkte L_B^+-stabil sind. Man muß zeigen, daß dann die Bedingungen 1., 2. in Definition X erfüllt werden.

Wir beginnen mit 1. in Definition X und betrachten zunächst einen beliebigen Punkt $x \in A$. Die Bewegung f_{0x} ist — kraft Voraussetzung und 1. in Definition IX — im elementaren Sinne positiv stabil. Demnach ist $\overline{\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x}}$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge des Gebietes G, und die Entfernung $\varrho(\overline{\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x}}, E_n - G)$ ist positiv. Wir bestimmen nun für jeden Punkt $x \in A$ eine Zahl $\delta(x) > 0$ gemäß 2. in Definition IX so, daß die Ungleichung

$$\varrho(\varphi_t x, \varphi_t y) < \tfrac{1}{2}\varrho(\overline{\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x}}, E_n - G)$$

für $t \geqq 0$ stets erfüllt wird, sobald y den Bedingungen (38) und

$$\varrho(x, y) < \delta(x)$$

genügt.

Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatze können wir dann eine endliche Anzahl von Punkten $x^1, \ldots, x^m$ der beschränkten, abgeschlossenen Menge A so herausgreifen, daß A durch die sphärischen $\delta(x^i)$-Umgebungen dieser Punkte überdeckt wird. Ist dann $x \in A$, so gibt es einen der Bedingung

$$\varrho(x^j, x) < \delta(x^j) \tag{49}$$

genügenden Punkt x^j. Beachten wir nun, daß x wegen der vorausgesetzten Inklusion $A \subset B$ auch der Menge B angehört, so können wir aus (49) mit Rücksicht auf (6) die Ungleichung

$$\varrho\{f_{0x^j}(t), f_{0x}(t)\} < \tfrac{1}{2}\varrho(\overline{\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x^j}}, E_n - G) \qquad (t \geqq 0)$$

ableiten. Demnach ist

$$\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x} \subset S\left\{\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x^j}, \ \tfrac{1}{2}\varrho(\overline{\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x^j}}, E_n - G)\right\},$$

$$\overline{\sum_{x \in A} \mathrm{Orb}_0^+ f_{0x}} \subset \sum_{j=1}^{m} \overline{S\left\{\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x^j}, \ \tfrac{1}{2}\varrho(\overline{\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x^j}}, E_n - G)\right\}}; \tag{50}$$

und da jeder Summand der rechten Seite der Inklusion (50) — wie leicht ersichtlich — beschränkt und in G enthalten ist, ist auch die linke Seite von (50), d. i. die Menge (47), eine beschränkte Teilmenge von G, was wir zeigen wollten.

Wir gehen nun zum Beweise des Erfülltseins der Bedingung 2. in Definition X über.

Es sei eine Zahl $\eta > 0$ beliebig vorgegeben. Wir ordnen jedem Punkte $x \in A$ eine Zahl $\delta'(x) > 0$ derart zu, daß die Ungleichung (40) für jede Zahl $t \geqq 0$ erfüllt wird, sobald z den Bedingungen (41) und

$$\varrho(x, z) < \delta'(x)$$

genügt. Diese Zuordnung ist wegen unserer Voraussetzungen möglich.

Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatze können wir dann eine endliche Anzahl von Punkten $x^1, \ldots, x^m$ der beschränkten und abgeschlossenen Menge A so herausgreifen, daß A durch die sphärischen $\frac{1}{2}\delta'(x^j)$-Umgebungen dieser Punkte überdeckt wird:

$$A < \sum_{j=1}^{m} S\left(x^j, \tfrac{1}{2}\delta'(x^j)\right). \tag{51}$$

Wir setzen

$$\delta = \min\left[\tfrac{1}{2}\delta'(x'), \ldots, \tfrac{1}{2}\delta'(x^m)\right] \tag{52}$$

und werden zeigen, daß die so bestimmte Zahl δ die in 2. in Definition X verlangte Eigenschaft besitzt.

Sind in der Tat die Bedingungen (12) und (48) erfüllt, so kann man wegen (51) einen der Ungleichung

$$\varrho(x, x^i) < \tfrac{1}{2}\delta'(x^i) \tag{53}$$

genügenden Punkt x^i wählen. Aus (12), (52) und (53) bekommt man

$$\varrho(y, x^i) < \delta'(x^i),$$

woraus — kraft der auf die Zahlen $\delta'(x)$ auferlegten Bedingung — das Bestehen der Ungleichung

$$\varrho(\varphi_t x^i, \varphi_t y) < \tfrac{\eta}{2} \tag{54}$$

für $t \geqq 0$ folgt.

Andererseits ist $x \in B$, da $x \in A$ und nach Voraussetzung $A < B$ ist. Aus (53) folgt demnach die Ungleichung

$$\varrho(\varphi_t x^i, \varphi_t x) < \tfrac{\eta}{2} \qquad (t \geqq 0). \tag{55}$$

Aus (54) und (55) folgt aber, daß die Ungleichung (11) für $t \geqq 0$ tatsächlich erfüllt wird, w. z. b. w.

§ 5.

Stationäre Mengen.

1. Definition XI. Wir werden sagen, daß die Menge A *stationär* ist, wenn sie als Vereinigungsmenge von Bahnen gewisser Bewegungen dargestellt werden kann.

2. Es gelten folgende Hilfssätze, von denen die ersten zwei fast selbstverständlich sind.

Hilfssatz VII. *Eine Teilmenge A des Gebietes G ist dann und nur dann stationär, wenn*

$$\sum_{x \in A} \mathrm{Orb}\, f_{0x} \subset A \tag{56}$$

ist, wenn mit anderen Worten die Aussage $x \in A$ immer die Inklusion $\mathrm{Orb}\, f_{0x} \subset A$ *zur Folge hat.*

Hilfssatz VIII. *Der Durchschnitt und die Vereinigungsmenge einer beliebigen Menge von stationären Mengen sind wieder stationäre Mengen.*

Hilfssatz IX. *Hat die Bewegung f die Zahlengerade als Definitionsintervall, so sind*

$$G \times \prod_{w \in E_1} \overline{\mathrm{Orb}_w^+ f}, \qquad G \times \prod_{w \in E_1} \overline{\mathrm{Orb}_w^- f} \tag{57}$$

stationäre Mengen[24]).

Beweis. Es genügt offenbar, den Stationäritätsbeweis für die erste der Mengen (57) ausdrücklich durchzuführen.

Es sei also

$$x \in G \times \prod_{w \in E_1} \overline{\mathrm{Orb}_w^+ f}. \tag{58}$$

Wir müssen zeigen gemäß Hilfssatz VII, daß dann $\mathrm{Orb}\, f_{0x}$ in der ersten Menge (57) enthalten ist, daß mit anderen Worten jeder Punkt

$$x' = f_{0x}(t) = \varphi_t x \tag{59}$$

jeder Menge $\overline{\mathrm{Orb}_w^+ f}$ angehört.

Die Zahlen t und w seien von nun an fixiert, $\eta > 0$ beliebig vorgegeben und $\delta > 0$ gemäß $\mathfrak{E}$ III so bestimmt, daß die Ungleichung (12) die Existenz von $\varphi_t y$ und die Ungleichung (11) immer zur Folge hat.

Wegen (58) ist $x \in \overline{\mathrm{Orb}_{w-t}^+ f}$, und es gibt eine den Bedingungen

$$v \geqq w - t, \tag{60}$$

$$\varrho\{x, f(v)\} < \delta \tag{61}$$

genügende Zahl v. Aus (8), (59), (60) und (61) folgt aber

$$f(v+t) \in \mathrm{Orb}_w^+ f, \qquad \varrho\{x', f(v+t)\} < \eta,$$

und daraus — da η beliebig war —: $x' \in \overline{\mathrm{Orb}_w^+ f}$, w. z. b. w.

Hilfssatz X. *Ist B eine stationäre Menge, so ist auch $G \times \overline{B}$ stationär*[25]).

Hilfssatz XI. *Ist die Menge B stationär, so ist auch die Menge aller L_B^+- (bzw. L_B^--) stabilen Punkte stationär.*

Beweis. Die Menge B sei stationär, der Punkt x L_B^+-stabil, und

$$x' = f_{0x}(u) = \varphi_u x \tag{62}$$

[24]) Vgl. loc. cit. [2]), S. 309.

[25]) Folgt leicht aus $\mathfrak{E}$ III. Die Durchführung des Beweises sei dem Leser überlassen.

sei ein beliebiger Punkt der Menge $\mathrm{Orb}\, f_{0x}$. Wir müssen zeigen gemäß Hilfssatz VII, daß auch x' L_B^+-stabil ist, daß mit anderen Worten folgende Bedingungen erfüllt sind:

1′. Die Bewegung $f_{0x'}$ ist im elementaren Sinne positiv stabil.

2′. Man kann jeder Zahl $\eta > 0$ eine Zahl $\delta' > 0$ so zuordnen, daß die Ungleichung

$$\varrho(\varphi_t x', \varphi_t y') < \eta \tag{63}$$

für jeden nichtnegativen Wert von t erfüllt wird, sobald y' den Bedingungen

$$y' \in B, \tag{64}$$

$$\varrho(x', y') < \delta' \tag{65}$$

genügt.

Man sieht sogleich ein, daß die Bedingung 1′. tatsächlich erfüllt ist. Ist wirklich $z = f_{0x'}(t)$ $(t \geqq 0)$ ein beliebiger Punkt von $\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x'}$, so haben wir — wegen (6), (8) und (62) —: $z = f_{0x}(u+t) \in \mathrm{Orb}_u^+ f_{0x}$. Es ist also $\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x'} \subset \mathrm{Orb}_u^+ f_{0x}$, demzufolge $\overline{\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x'}} \subset \overline{\mathrm{Orb}_u^+ f_{0x}}$, und da die Bewegung f_{0x} kraft Voraussetzung und 1. in Definition IX positiv stabil ist, ist letztere Menge beschränkt und $\subset G$. Also ist auch $\overline{\mathrm{Orb}_0^+ f_{0x'}}$ eine beschränkte Teilmenge von G, und $f_{0x'}$ ist eine im elementaren Sinne positiv stabile Bewegung.

Es sei nun eine Zahl $\eta > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen zunächst eine Zahl $\delta > 0$ gemäß 2. in Definition IX, so daß (11) für $t \geqq 0$ immer erfüllt wird, sobald y den Bedingungen (12) und (38) genügt. Es können zwei Fälle vorkommen:

1. $u \geqq 0$. Es genügt hier, zu beachten, daß aus (7), (9) und (62) die Gleichung

$$x = \varphi_{-u} x'$$

folgt, und die Zahl $\delta' > 0$ auf Grund von $\mathfrak{E}$ III so zu bestimmen, daß die Ungleichung

$$\varrho(x, \varphi_{-u} y') < \delta \tag{66}$$

aus (65) folgen wird. Sind dann in der Tat die Bedingungen (64) und (65) erfüllt und ist $t \geqq 0$, so hat man die Ungleichung (66), wo der Punkt $\varphi_{-u} y' = f_{0y'}(-u)$ der stationären Menge B angehört. Es folgt daraus — nach (9) und nach der auf δ auferlegten Bedingung —, daß

$$\varrho(\varphi_t x', \varphi_t y') = \varrho(\varphi_{t+u} x, \varphi_{t+u} \varphi_{-u} y') < \eta$$

ist, da ja auch $t + u \geqq 0$ ist.

2. $u < 0$. Wir bestimmen hier die Zahl $\delta' > 0$ auf Grund des Hilfssatzes I [26]), so daß die Bedingung

$$\varrho(\varphi_t x', \varphi_t y') < \min[\eta, \delta]$$

immer erfüllt wird, sobald $0 \leqq t \leqq -u$ ist und y' der Bedingung (65) genügt. Sind dann die Bedingungen (64) und (65) erfüllt, so hat man, wie vorher, die Ungleichung (66) mit $\varphi_{-u} y' \in B$. Für $t \geqq -u$ folgt daraus die Ungleichung (63). Letztere ist aber auch für $0 \leqq t \leqq -u$ gültig, wegen der auf δ' auferlegten Bedingung. Also ist (63) tatsächlich für $t \geqq 0$ immer erfüllt, sobald y' den Bedingungen (64) und (65) genügt.

Damit ist auch das Bestehen von $2'$. in allen Fällen bewiesen.

Aus dem Hilfssatze XI ergibt sich das

Korollar. *Ist B stationär, so ist auch die Menge aller L_B-stabilen Punkte stationär.*

Denn diese Menge ist ja der Durchschnitt zweier stationären Mengen: der Menge aller L_B^+-stabilen Punkte und der Menge aller L_B^--stabilen Punkte.

3. Auf Grund des Hilfssatzes XI und seines Korollars sind wir berechtigt, im Falle einer stationären Menge B von L_B^+- (L_B^--, L_B-) stabilen Bahnen (bzw. Bewegungen) zu sprechen. Diese Begriffe können folgendermaßen definiert sein:

Definition XII. Es sei B eine stationäre Menge. Wir sagen, daß die *Bewegung* f und ihre *Bahn* L_B^+- (L_B^--, L_B-) *stabil* sind, wenn einer (und dann jeder) der Punkte von Orb f L_B^+- (L_B^--, L_B-) stabil ist.

§ 6.

Der Hauptsatz.

1. Definition XIII. Wir sagen, daß die Bewegung f in der Menge A *stattfindet*, wenn Orb $f \subset A$ ist.

Satz III. *Es sei F eine beschränkte abgeschlossene und stationäre Teilmenge des Gebietes G. Sind alle in F stattfindenden Bewegungen L_F^+- (L_F^--) stabil, so sind sie alle fastperiodisch und L_F-stabil. Die L_F-Stabilität ist dann in F gleichmäßig.*

Beweis. Die in F stattfindenden Bewegungen seien L_F^+-stabil. Wir werden zunächst zeigen, daß sie alle fastperiodisch sind.

Dazu bemerken wir vor allem, daß — nach Definition XII — alle auf den Bahnen der in F stattfindenden Bewegungen liegenden Punkte

[26]) Wir wenden hier diesen Hilfssatz auf die einpunktige Menge $F = (x')$ an, unter Einsetzung von $\min[\eta, \delta]$ statt η und $-u$ statt l.

L_F^+-stabil sind. Die Menge dieser Punkte ist aber wegen der Stationärität von F mit F identisch. Also sind alle Punkte der beschränkten und abgeschlossenen Menge F L_F^+-stabil; nach dem Hilfssatze VI ist demzufolge die L_F^+-Stabilität in F gleichmäßig.

Es ist nun leicht einzusehen, daß jede in F stattfindende Bewegung die Eigenschaft S^+ besitzt.

Ist nämlich f eine solche Bewegung, so ist $\mathrm{Orb}\, f \subset F$ also auch wegen der Abgeschlossenheit von F —: $\overline{\mathrm{Orb}\, f} \subset F$, woraus die beiderseitige Stabilität der Bewegung f sofort folgt. Diese Bewegung genügt a fortiori der Bedingung 1. in Definition VIII und hat die ganze Zahlengerade als Definitionsintervall.

Ist ferner eine Zahl $\eta > 0$ beliebig vorgegeben, so können wir wegen der gleichmäßigen L_F^+-Stabilität von F eine Zahl $\delta > 0$ so wählen, daß die Ungleichung (11) für jeden nichtnegativen Wert von t erfüllt wird, sobald x und y den Bedingungen $x \in F$, $y \in F$, $\varrho(x, y) < \delta$ genügen. Sind dann w_1, w_2 beliebige der Ungleichung (29) genügende Zahlen und ist $w \geqq 0$, so gilt $f(w_1) \in F$, $f(w_2) \in F$, und demzufolge — kraft (8) und der auf δ auferlegten Bedingung —

$$\varrho\{f(w_1 + w), f(w_2 + w)\} = \varrho\{\varphi_w f(w_1), \varphi_w f(w_2)\} < \eta .$$

Also genügt f auch der Bedingung 2. in Definition VIII.

Wir haben damit gezeigt, daß alle in F stattfindenden Bewegungen die Eigenschaft S^+ besitzen, oder — was nach dem Satze I dasselbe ist — daß sie alle fastperiodisch sind.

Es sei nun x ein beliebiger Punkt der Menge F. Wir werden zeigen, daß x L_F-stabil ist.

Wir bemerken vor allem, daß die Bewegung f_{0x} nach (56) in der stationären Menge F stattfindet, also nach dem soeben Bewiesenen fastperiodisch ist. Daraus folgt aber nach dem Satze I, daß diese Bewegung die Eigenschaft S besitzt.

Wir nehmen nun eine beliebige Zahl $\eta > 0$ und bestimmen die Zahl $\sigma > 0$ gemäß 2. in Definition VIII so, daß immer

$$\varrho\{f_{0x}(u_1 + u), f_{0x}(u_2 + u)\} < \frac{\eta}{3}$$

ist, sobald u_1, u_2 der Bedingung

$$\varrho\{f_{0x}(u_1), f_{0x}(u_2)\} < \sigma$$

(u_1, u_2, u sonst beliebig) genügen.

Nun sei die Zahl $\delta > 0$ so gewählt, daß die Ungleichung

$$\varrho(\varphi_w x, \varphi_w y) < \min\left[\frac{\eta}{3}, \frac{\sigma}{3}\right]$$

für jeden nichtnegativen Wert von w erfüllt wird, sobald y den Bedingungen

(67) $$y \in F$$

und (12) genügt. Es gibt solche Zahlen, da x kraft Voraussetzung L_F^+-stabil ist.

Wir nehmen jetzt einen beliebigen den Bedingungen (12) und (67) genügenden Punkt y, eine beliebige Zahl t und werden zeigen, daß die Ungleichung (11) besteht.

Für diesen Zweck sei bemerkt, daß die Bewegung f_{0y} — wegen (56) und (67) — in der stationären Menge F stattfindet, also nach dem Bewiesenen fastperiodisch ist. Diese Bewegung besitzt also — infolge von Satz I — die Eigenschaft S, und es ist möglich, eine Zahl $\theta > 0$ so zu bestimmen, daß

$$\varrho\{f_{0y}(v_1 + v),\ f_{0y}(v_2 + v)\} < \frac{\eta}{3}$$

eine Folgerung von

$$\varrho\{f_{0y}(v_1),\ f_{0y}(v_2)\} < \theta$$

wird.

Da ferner die $\min\left[\theta, \frac{\sigma}{3}\right]$-Verschiebungszahlen der fastperiodischen Bewegung f_{0y} reichlich verteilt sind, gibt es eine den Bedingungen

(68) $$w \geqq \max[0, -t],$$

(69) $$\varrho\{f_{0y}(0), f_{0y}(w)\} < \min\left[\theta, \frac{\sigma}{3}\right]$$

genügende Zahl w.

Aus (6), (12), (67), (68) und der auf δ auferlegten Bedingung folgt aber, daß

(70) $$\varrho\{f_{0x}(w), f_{0y}(w)\} = \varrho(\varphi_w x, \varphi_w y) < \frac{\sigma}{3},$$

(71) $$\varrho\{f_{0x}(0), f_{0y}(0)\} = \varrho(\varphi_0 x, \varphi_0 y) < \frac{\sigma}{3}$$

ist.

Formeln (69), (70) und (71) ergeben nun

$$\varrho\{f_{0x}(0), f_{0x}(w)\} < \sigma,$$

woraus — wegen (6) und der auf σ auferlegten Bedingung — die Ungleichung

(72) $$\varrho(\varphi_t x, \varphi_{w+t} x) < \frac{\eta}{3}$$

folgt; Formeln (6), (69) und die auf θ auferlegte Bedingung ergeben andererseits

(73) $$\varrho(\varphi_t y, \varphi_{w+t} y) < \frac{\eta}{3}.$$

Formeln (12), (67), (68) und die auf δ auferlegte Bedingung liefern endlich

(74) $$\varrho(\varphi_{w+t} x, \varphi_{w+t} y) < \frac{\eta}{3}.$$

Aus (72), (73) und (74) folgt nun die Ungleichung (11). Letztere ist also für jeden Wert von t erfüllt, sobald y den Bedingungen (12) und (67) genügt. Beachten wir jetzt, daß die Bewegung f_{0x} als in F stattfindende, im elementaren Sinne beiderseits stabil ist und daß η eine beliebige positive Zahl war, so können wir daraus schließen, daß der Punkt x L_F-stabil ist. Also sind alle Punkte von F L_F-stabil.

Nach dem Hilfssatze VI und Definitionen XII, XIII ist demzufolge die L_F-Stabilität in F gleichmäßig, und alle in F stattfindenden Bewegungen sind L_F-stabil. Damit ist unser Beweis vollendet.

2. Die Abgeschlossenheitsbedingung für die Menge F spielte beim Beweise des Satzes III eine wichtige Rolle und ist tatsächlich unentbehrlich. Der Satz III ist deshalb nicht ohne weiteres auf eine einzelne nach Liapounoff stabile Bahn anwendbar, da letztere nicht abgeschlossen zu sein braucht. Eine einzelne Bewegung f kann wohl beiderseits und unbedingt nach Liapounoff stabil und doch nicht fastperiodisch sein. Der Satz III lehrt nur, daß im letzten Falle gewisse nicht $L^{+}_{\overline{\mathrm{Orb}\, f}}$-stabile und gewisse nicht $L^{-}_{\overline{\mathrm{Orb}\, f}}$-stabile in $\overline{\mathrm{Orb}\, f}$ stattfindende Bewegungen vorhanden sein müssen. Alles das wird durch folgendes einfache Beispiel illustriert.

Beispiel. Es sei $n = 1$, $G = E_1$, $X_1 \equiv 1 - x_1^2$. Dann wird durch

$$x_1 = \mathrm{th}\, t \quad (t \in E_1) \tag{75}$$

eine L_G-stabile Bewegung definiert[27]), welche offenbar nicht fastperiodisch ist. Das steht in keinem Widerspruch mit dem Satze III, da die Bahn der Bewegung (75) — der Zahlenintervall $(-1, +1)$ — nicht abgeschlossen ist. Betrachten wir aber die abgeschlossene Hülle dieser Menge — die Zahlenstrecke $[-1, +1]$ —, so sehen wir sogleich, daß es zwei in $[-1, +1]$ stattfindende Bewegungen gibt: $x_1 = 1$ $(t \in E_1)$ und $x_1 = -1$ $(t \in E_1)$, von denen die erste nicht $L^{-}_{[-1,\,+1]}$-, die zweite nicht $L^{+}_{[-1,\,+1]}$-stabil ist.

§ 7.

Die Andronow-Wittsche Vermutung.

1. Definition XIV. Eine Teilmenge F des Gebietes G ist eine *Minimalmenge*, wenn sie in bezug auf die Eigenschaft stationär, beschränkt, abgeschlossen und nicht leer zu sein irreduzibel ist, wenn mit andern Worten F diese Eigenschaft besitzt, jede echte Teilmenge von F aber entweder nicht stationär oder nicht abgeschlossen oder leer ist[28]).

Definition XV. Eine Bewegung ist *rekurrent*, wenn sie in einer Minimalmenge stattfindet[28]).

---

[27]) Der Beweis dieser Tatsache sei dem Leser überlassen.

[28]) Vgl. loc. cit. [2]), S. 311; loc. cit. [3]), S. 198, 199.

Man schließt leicht aus dem Hilfssatze VIII, daß verschiedene Minimalmengen immer punktfremd sind. Daraus folgt, daß jede rekurrente Bewegung in einer und nur in einer Minimalmenge — in der *Minimalmenge dieser rekurrenten Bewegung* — stattfindet.

Nach Definition III ist jede rekurrente Bewegung im elementaren Sinne beiderseits stabil, da ihre Bahn in einer beschränkten, abgeschlossenen Teilmenge von G enthalten ist, also eine beschränkte und in G enthaltene abgeschlossene Hülle besitzt. Demzufolge hat jede rekurrente Bewegung — nach Korollar aus dem Hilfssatze II — die ganze Zahlengerade als Definitionsintervall. Aus den Hilfssätzen IX und X folgt ferner der

Hilfssatz XII. *Ist F die Minimalmenge der rekurrenten Bewegung f so gilt*

$$\overline{\operatorname{Orb} f} = \prod_{w \in E_1} \overline{\operatorname{Orb}_w^+ f} = \prod_{w \in E_1} \overline{\operatorname{Orb}_w^- f} = F. \text{ [29]}$$

Die hier vorkommenden Durchschnitte sind nämlich — nach dem Hilfssatze IX — stationär. Ferner sind sie — als Durchschnitte abgeschlossener Mengen — abgeschlossen und offenbar in F enthalten, da $\operatorname{Orb} f \subset F$ ist.

Desgleichen ist $\overline{\operatorname{Orb} f}$ nach dem Hilfssatz X stationär. Außerdem ist diese Menge abgeschlossen, in F enthalten und nicht leer. Endlich ist offenbar

$$\prod_{w \in E_1} \overline{\operatorname{Orb}_w^+ f} = \prod_{m=1}^{\infty} \overline{\operatorname{Orb}_m^+ f}, \qquad \prod_{w \in E_1} \overline{\operatorname{Orb}_w^- f} = \prod_{m=1}^{\infty} \overline{\operatorname{Orb}_{-m}^- f},$$

$$\overline{\operatorname{Orb}_m^+ f} \supset \overline{\operatorname{Orb}_{m+1}^+ f} \neq O \neq \overline{\operatorname{Orb}_{-(m+1)}^- f} \subset \overline{\operatorname{Orb}_{-m}^- f} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

also — nach dem Cantorschen Durchschnittssatze —

$$\prod_{w \in E_1} \overline{\operatorname{Orb}_w^+ f} \neq O \neq \prod_{w \in E_1} \overline{\operatorname{Orb}_w^- f}.$$

Daraus folgt nach Definition XIV, daß $\overline{\operatorname{Orb} f}$, $\prod_{w \in E_1} \overline{\operatorname{Orb}_w^+ f}$, $\prod_{w \in E_1} \overline{\operatorname{Orb}_w^- f}$ keine echte Teilmengen von F sein können, also mit F zusammenfallen, w. z. b. w.

2. Es ist jetzt unser Ziel, die Richtigkeit der folgenden Behauptung nebst ihrer Umkehrung zu bestätigen.

Satz IV_1. *Jede rekurrente Bewegung, welche in bezug auf ihre eigene Bahn nach Liapounoff positiv (bzw. negativ) stabil ist, ist fastperiodisch.*

Es werden im folgenden zwei Beweise dieses Satzes angegeben. Der erste stützt sich auf den in § 6 bewiesenen Hauptsatz; der zweite auf einen weiter unten ohne Beweis angeführten Satz von Birkhoff.

---

[29]) Diese Gleichungen können auch zur Definition der Minimalmengen dienen. Vgl. loc. cit. [2]), S. 311.

3. Wir schicken dem ersten Beweis zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz XIII. *Jede rekurrente Bewegung, welche in bezug auf ihre Bahn nach Liapounoff positiv stabil ist, ist auch in bezug auf ihre Minimalmenge nach Liapounoff positiv stabil.*

Beweis. f sei eine rekurrente Bewegung, F ihre Minimalmenge. Ist dann f $L^+_{\overline{\mathrm{Orb}\, f}}$-stabil, so ist der Punkt $f(0)$ $L^+_{\overline{\mathrm{Orb}\, f}}$-stabil und demzufolge nach Hilfssatz V auch $L^+_{\overline{\mathrm{Orb}\, f}\times G}$-stabil. Nach dem Hilfssatze XII ist aber $\overline{\mathrm{Orb}\, f} = F \subset G$. Also ist $f(0)$ L^+_F-stabil, woraus nach Definition XII die L^+_F-Stabilität der Bewegung f folgt.

Hilfssatz XIV. *Ist eine rekurrente Bewegung in bezug auf ihre Minimalmenge nach Liapounoff positiv stabil, so sind alle in dieser Minimalmenge stattfindenden Bewegungen in bezug auf dieselbe nach Liapounoff positiv stabil.*

Beweis. F sei eine Minimalmenge, f eine in F stattfindende L^+_F-stabile Bewegung. Wir werden zeigen, daß dann jeder Punkt der Menge F L^+_F-stabil ist.

Ist wirklich $x \in F$, so ist f_{0x} eine in F stattfindende, also positiv stabile Bewegung. Die Bedingung 1. in Definition IX ist somit erfüllt.

Ist ferner eine Zahl $\eta > 0$ beliebig vorgegeben, so kann man — wegen der L^+_F-Stabilität des Punktes $f(0)$ $(\in \mathrm{Orb}\, f)$ — die Zahl $\sigma > 0$ so bestimmen, daß die Ungleichung

$$\varrho\{\varphi_v f(0), \varphi_v z\} < \frac{\eta}{2}$$

für jeden nichtnegativen Wert von v erfüllt wird, sobald z den Bedingungen

$$z \in F, \quad \varrho\{f(0), z\} < \sigma$$

genügt.

Nach dem Hilfssatze XII gilt ferner $F \subset \overline{\mathrm{Orb}_0^-\, f_{0x}}$ und demzufolge $f(0) \in \overline{\mathrm{Orb}_0^-\, f_{0x}}$. Es gibt daher eine den Ungleichungen

$$u \leqq 0, \tag{76}$$

$$\varrho\{f(0), f_{0x}(u)\} < \frac{\sigma}{2} \tag{77}$$

genügende Zahl u.

Man wähle nun die Zahl $\delta > 0$ gemäß $\mathfrak{E}$ III, so daß

$$\varrho(\varphi_u x, \varphi_u y) < \frac{\sigma}{2} \tag{78}$$

eine Folgerung von (12) wird[30]). Es ist dann leicht einzusehen, daß δ die in 2. in Definition IX $(B = F)$ verlangte Eigenschaft besitzt.

---

[30]) Das ist möglich, da der Punkt $\varphi_u x = f_{0x}(u)$ tatsächlich existiert.

Ist wirklich (12) erfüllt und ist dabei $y \in F$, so hat man die Ungleichung (78), welche mit (6) und (77) zusammen die Formel

$$\varrho\{f(0), \varphi_u y\} < \sigma$$

liefert. Hier ist außerdem $\varphi_u y \in F$, da ja y der stationären Menge F angehört. Zieht man nun die auf die Zahl σ auferlegte Bedingung und die Formel (9) heran, so kann man daraus schließen, daß die Ungleichung

$$\varrho\{\varphi_v f(0), \varphi_{u+v} y\} < \frac{\eta}{2} \tag{79}$$

für jeden nichtnegativen Wert von v erfüllt wird. Aus (77) folgt ebenso

$$\varrho\{\varphi_v f(0), \varphi_{u+v} x\} < \frac{\eta}{2} \qquad (v \geqq 0). \tag{80}$$

(79) und (80) liefern zusammen

$$\varrho(\varphi_{u+v} x, \varphi_{u+v} y) < \eta \qquad (v \geqq 0).$$

Wegen (76) ist um so mehr die Ungleichung (11) für $t \geqq 0$ immer erfüllt, was wir zeigen wollten.

Damit ist bewiesen, daß die Bedingung 2. in Definition IX für $B = F$ erfüllt ist. Also ist der willkürlich gewählte Punkt $x \in F$ L_F^+-stabil. Daraus folgt endlich, daß alle in F stattfindenden Bewegungen L_F^+-stabil sind, w. z. b. w.

4. Der eigentliche Beweis des Satzes IV_1 bedarf jetzt weniger Zeilen. Ist f eine in bezug auf Orb f nach Liapounoff positiv stabile rekurrente Bewegung, F ihre Minimalmenge, so ist f nach Hilfssatz XIII auch L_F^+-stabil. Daraus folgt nach Hilfssatz XIV, daß alle in F stattfindenden Bewegungen L_F^+-stabil sind. Nun ist aber F als Minimalmenge beschränkt, abgeschlossen und stationär. Wir können deshalb den Satz III anwenden und erhalten das Resultat: alle in F stattfindenden Bewegungen sind fastperiodisch. Speziell ist f eine fastperiodische Bewegung, w. z. b. w.

5. Wir gehen nun zum zweiten Beweis des Satzes IV_1 über. Dieser Beweis stützt sich auf folgenden

Satz von Birkhoff[31]). *Eine beiderseits stabile Bewegung f ist dann und nur dann rekurrent, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: es gibt für jede Zahl $\eta > 0$ eine Zahl $l \geqq 0$, so daß es jedem Zahlenpaar u, w eine den Ungleichungen*

$$u \leqq v \leqq u + l, \quad \varrho\{f(v), f(w)\} < \eta$$

genügende Zahl v sich zuordnen läßt.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man den Satz IV_1 folgendermaßen beweisen:

---

[31]) Loc. cit. [2]), S. 312.

Es sei f eine $L^+_{\mathrm{Orb}\,f}$-stabile rekurrente Bewegung, η eine beliebige positive Zahl. Wir werden zeigen, daß die Menge der η-Verschiebungszahlen der Bewegung f reichlich verteilt ist, daß mit andern Worten eine Zahl $l \geqq 0$ derart existiert, daß jede Zahlenstrecke der Länge l mindestens eine η-Verschiebungszahl von f enthält.

Wir bemerken für diesen Zweck, daß der Punkt $x = f(0) \in \mathrm{Orb}\,f$ kraft Voraussetzung $L^+_{\mathrm{Orb}\,f}$-stabil ist. Man kann also eine Zahl $\delta > 0$ so bestimmen, daß die Ungleichung

$$\varrho\{\varphi_t x, \varphi_t y\} < \frac{\eta}{2}$$

für jeden Wert von $t \geqq 0$ erfüllt wird, sobald y den Bedingungen

$$y \in \mathrm{Orb}\,f, \quad \varrho(x, y) < \delta$$

genügt.

Man bestimme nun die Zahl $l \geqq 0$ auf Grund des oben angeführten Birkhoffschen Satzes, so daß für jede Zahl u eine den Bedingungen

$$u \leqq v \leqq u + l, \tag{81}$$

$$\varrho\{f(0), f(v)\} < \frac{\delta}{2} \tag{82}$$

genügende Zahl v existiert. Dann besitzt l die verlangte Eigenschaft.

Es sei wirklich $[u, u + l]$ eine beliebige Zahlenstrecke der Länge l; v eine den Bedingungen (81) und (82) genügende Zahl. Unsere Behauptung wird bewiesen, wenn wir zeigen, daß v eine η-Verschiebungszahl von f ist.

Wir bestimmen zu diesem Zwecke eine Zahl $\sigma > 0$ gemäß $\mathfrak{E}$III, so daß die Ungleichung

$$\varrho(\varphi_v x, \varphi_v y) < \frac{\delta}{2}$$

eine Folgerung von $\varrho(x, y) < \sigma$ wird. Ist dann eine beliebige Zahl t vorgelegt, so ist nach dem Hilfssatze XII $x = f(0) \in \overline{\mathrm{Orb}_t^-}\, f$, und es gibt eine den Bedingungen

$$\varrho\{f(0), f(w)\} < \min[\sigma, \delta], \tag{83}$$

$$w \leqq t \tag{84}$$

genügende Zahl w.

Aus (8) und (83) folgt aber wegen der auf σ auferlegten Bedingung, daß

$$\varrho\{f(v), f(w + v)\} < \frac{\delta}{2} \tag{85}$$

ist, was mit (82) zusammen die Ungleichung

$$\varrho\{f(0), f(w + v)\} < \delta \tag{86}$$

liefert. Ziehen wir nun die auf die Zahl δ auferlegte Bedingung heran, so können wir aus (8), (83), (84) und (86) die Ungleichungen

$$\varrho\{f(t-w), f(t)\} < \tfrac{\eta}{2},$$

$$\varrho\{f(t-w), f(t+v)\} < \tfrac{\eta}{2}$$

ableiten. Aus diesen Ungleichungen folgt endlich

$$\varrho\{f(t), f(t+v)\} < \eta,$$

was somit für jeden Wert von t erfüllt wird. Also ist v eine η-Verschiebungszahl der Bewegung f, was wir zeigen wollten.

Wir haben damit das Erfülltsein von 2. in Definition VII nachgewiesen. Nun ist aber auch 1. in Definition VII erfüllt: f als rekurrente Bewegung ist im elementaren Sinne beiderseits stabil[32]). Also ist f fastperiodisch, w. z. b. w.

6. Es ist leicht, auch die Umkehrung des Satzes IV_1 zu beweisen, nämlich den

Satz IV_2. *Jede fastperiodische Bewegung ist rekurrent und in bezug auf ihre eigene Bahn nach Liapounoff positiv stabil,*

Der erste Teil dieser Behauptung wird nach Franklin[33]) folgendermaßen bewiesen:

Es sei f eine fastperiodische Bewegung, η eine beliebige positive Zahl. Wir nehmen eine Zahl $l \geqq 0$, so daß jede Zahlenstrecke der Länge l mindestens eine η-Verschiebungszahl von f enthält. Sind dann u, w beliebige Zahlen, so besitzt f eine der Zahlenstrecke $[u-w, u-w+l]$ angehörende η-Verschiebungszahl t. Setzt man nun $v = w + t$, so gilt

$$u \leqq w + t = v \leqq u + l, \qquad \varrho\{f(v), f(w)\} = \varrho\{f(w+t), f(w)\} < \eta.$$

Die Zahl l genügt also der im oben angeführten Birkhoffschen Satze formulierten Bedingung, und die Bewegung f ist demnach rekurrent, da ja die Zahl $\eta > 0$ willkürlich war.

Der zweite Teil des Satzes IV_2 folgt leicht aus dem Satze I. Ist nämlich f eine fastperiodische Bewegung, η eine beliebige Zanl > 0, so besitzt f nach dem Satze I die Eigenschaft S^+, und es gibt eine Zahl $\delta > 0$ derart, daß (28) für $w \geqq 0$ immer erfüllt wird, sobald w_1 und w_2 der Bedingung (29) genügen. Ist nun $y = f(u)$ ein beliebiger der Bedingung

$$\varrho\{f(0), f(u)\} = \varrho\{f(0), y\} < \delta$$

genügender Punkt von Orb f, so hat man mit Rücksicht auf (8)

$$\varrho\{\varphi_t f(0), \varphi_t y\} = \varrho\{f(t), f(u+t)\} < \eta \qquad (t \geqq 0),$$

---

[32]) Vgl. S. 25.

[33]) Loc. cit. [4]), S. 328.

woraus die $L^{+}_{\mathrm{Orb}\,f}$-Stabilität des Punktes $f(0)$ unmittelbar folgt. Mithin ist auch die Bedingung f nach Definition XII $L^{+}_{\mathrm{Orb}\,f}$-stabil, w. z. b. w.

7. Man kann den Inhalt der Sätze IV_1 und IV_2 auf folgende Weise zusammenfassend formulieren:

Satz IV. *Eine Bewegung ist dann und nur dann fastperiodisch, wenn sie rekurrent und in bezug auf ihre eigene Bahn nach Liapounoff positiv (bzw. negativ) stabil ist.*

Dadurch ist eine wirkliche logische Zerspaltung des dynamischen Fastperiodizitätsbegriffs ausgeführt: jede der logischen Komponenten dieses Begriffs — „rekurrent" und „in bezug auf die eigene Bahn nach Liapounoff positiv stabil" — ist, allein genommen, für die Fastperiodizität unzureichend. Es sind in der Tat rekurrente Bewegungen bekannt, welche die Eigenschaft S nicht besitzen, welche also nach dem Satze I nicht fastperiodisch sind. Zu dieser Klasse gehören z. B. die von Birkhoff konstruierten[34]) auf einer Torusfläche stattfindenden „diskontinuierlichen" rekurrenten Bewegungen. Andererseits ist die im § 6 definierte Bewegung (75) im Liapounoffschen Sinne sogar unbedingt und beiderseits stabil und doch nicht fastperiodisch.

8. Es liegt nahe, nach einigen Verschärfungsmöglichkeiten für den Satz IV zu fragen. Wir sahen nur, daß die Rekurrenzbedingung im Wortlaute dieses Satzes nicht einfach fortgelassen werden darf. Kann sie aber nicht durch die schwächere Bedingung der Poissonschen Stabilität ersetzt werden? Diese letztere Bedingung kann in unserer Schreibweise durch die Inklusion

$$\mathrm{Orb}\,f \subset \prod_{t \in (a,\,b)} \overline{\mathrm{Orb}_t^{+}\,f} \times \prod_{t \in (a,\,b)} \overline{\mathrm{Orb}_t^{-}\,f} \tag{87}$$

ausgedrückt werden, wo (a, b) der Definitionsintervall der Bewegung f ist.

Es folgt sogleich aus dem Hilfssatze II, daß jede nach Poisson stabile Bewegung auf der ganzen Zahlengeraden definiert ist, daß also (87) nur dann bestehen kann, wenn $a = -\infty$, $b = +\infty$ gilt. Man schließt direkt aus dem Hilfssatze XII, daß jede rekurrente Bewegung nach Poisson stabil ist[35]).

Unsere Frage lautet nun so: Ist jede nach Poisson stabile und nach Liapounoff in bezug auf ihre eigene Bahn positiv stabile Bewegung fastperiodisch?

Die Möglichkeit einer positiven Antwort wird durch das Beispiel von § 6 durchaus nicht ausgeschlossen, denn die Bewegung (75) ist offenbar

[34]) Loc. cit. [2]), S. 318—323.

[35]) Vgl. loc. cit [2]), S. 311.

nicht nach Poisson stabil. Ich vermute jedoch, daß die Antwort im allgemeinen negativ lautet, und formuliere folgendes

Problem. Ein Differentialsystem (1) so zu konstruieren, daß eine nach Poisson stabile, nach Liapounoff in bezug auf ihre eigene Bahn positiv stabile, nicht fastperiodische Bewegung vorhanden sei. Dabei sollen die X_i $(i = 1, \ldots, n)$ in einem Gebiete G des E_n erklärte reelle eindeutige Funktionen sein. Für jeden Punkt $x \in G$ soll eine Umgebung existieren, in welcher die X_i Lipschitzschen Bedingungen genügen.

Dieses Problem kann noch auf verschiedene Weisen modifiziert werden. Man kann z. B. die positive Liapounoffsche Stabilität durch die beiderseitige, die bedingte (in bezug auf die eigene Bahn) durch die unbedingte (in bezug auf G) ersetzen.

Astr. Inst. in Leningrad, 25. Januar 1932.

(Eingegangen am 29. Januar 1932.)

Diophantische Approximationen von Irrationalzahlen mit Kettenbruchnennern von eingeschränktem Wachstum.

Von

J. F. Koksma in Hilversum (Niederlande).

§ 1.

Einleitung.

Es sei bei gegebenem positivem ganzem n θ_ν eine reelle Irrationalzahl, $f_\nu(x)$ ein Polynom vom Grade k_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ mit reellen Koeffizienten. Das Glied vom Grade k_ν habe die Gestalt $\theta_\nu x^{k_\nu}$, und es gelte $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_n$.

Wir betrachten das System der n Diophantischen Ungleichungen[1])

$$0 < f_\nu(x) < \beta_\nu \pmod 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

wo β_ν eine Zahl ist mit

$$0 < \beta_\nu \leqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Ein ganzes x heißt eine (ganzzahlige) Lösung des Systems (1), wenn ein Gitterpunkt $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ existiert derart, daß die Ungleichungen

$$0 < f_\nu(x) - y_\nu < \beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

alle erfüllt sind.

Wir fragen uns nun, ob (1) unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat oder nicht.

Ist β_ν von x unabhängig, so wissen wir, daß (1) in der Tat unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat. Wegen der Irrationalität von θ_ν sind

[1]) Die beiden Ungleichungen

$$0 < f_\nu(x) < \beta_\nu \pmod 1$$

heißen also *eine Diophantische* Ungleichung.

dem bekannten Weylschen Gleichverteilungstheorem[2]) gemäß die Zahlensysteme

$$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \qquad (x = 1, 2, \ldots)$$

nämlich gleichverteilt modulo 1.

Man kann nun die Frage erschweren und sich die Aufgabe setzen, Funktionen $\beta_\nu(x)$ mit (2) anzugeben, welche mit wachsendem x nach Null streben, derart, daß bei gegebenen θ_ν und k_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ das Diophantische System (1) unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat.

Bei der Lösung dieses Problems spielt die Natur der Irrationalzahl θ_ν im allgemeinen eine wichtige Rolle.

In dieser Abhandlung wird eine Lösung des genannten Problems hergeleitet, wobei nur Irrationalzahlen θ_ν betrachtet werden, deren Kettenbruchnenner als Funktionen ihrer Indizes betrachtet nicht allzu stark wachsen.

Wählt man in (1) $n = 1$ und $f_1(x) = \theta_1 f(x)$, wo $f(x)$ ein Polynom $x^k + \ldots$, k-ten Grades ist $(k \geqq 2)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, so ist klar, daß die gewonnenen Resultate dieser Arbeit aussagen, wie scharf die Irrationalzahl θ_1 mindestens zu approximieren ist durch rationale Brüche, deren Nenner eine vorgeschriebene spezielle Gestalt $f(x)$ hat.

Die Ergebnisse dieser Abhandlung sind zusammengefaßt in Satz 1. Der Spezialfall Satz 2 und einige Beispiele dienen dazu, die Tragweite des Satzes 1 zu demonstrieren (§ 1).

Der Beweis von Satz 1 beruht auf zwei wesentlichen Hilfsmitteln: **1.** einem grundlegenden Satz von Herrn J. G. van der Corput: Satz 5 (§ 5) und **2.** dem Satz 4 (§ 4), dessen Beweis § 2, § 3 und § 4 in Anspruch nimmt. Den Beweis von Satz 1 selbst findet man in § 5.

In früheren Arbeiten[3]) habe ich ähnliche Sätze wie Satz 1 hergeleitet. Dabei wurde auch Satz 5 (§ 5) benutzt; statt Satz 4 (§ 4) wurden aber andere Hilfsmittel verwendet. Im Anhang (§ 6) wird hierauf näher eingegangen.

Satz 1. Bedingungen. 1. *Es sei n eine gegebene natürliche Zahl, und θ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ eine gegebene reelle Irrationalzahl mit der Kettenbruchdarstellung*

$$\theta_\nu = d_{0,\nu} + \frac{1}{d_{1,\nu}} + \frac{1}{d_{2,\nu}} \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

---

[2]) H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo 1, Math. Annalen 77 (1916), S. 312–352.

J. G. van der Corput, Diophantische Ungleichungen; I. Zur Gleichverteilung modulo 1, Acta Math. **56** (1931), S. 373–456.

[3]) J. F. Koksma, Over stelsels Diophantische ongelijkheden (Diss. Groningen 1930). Wiskundige Opgaven met oplossingen door leden van het Wiskundig Genootschap **15**, 2 (1931), Nr. 101–106, S. 186–216.

und es gelte

$$d_{\varrho,\nu} + 1 \leqq \varphi_\nu(\varrho) \quad (\varrho = 1, 2, \ldots; \nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

wo $\varphi_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *eine für* $t \geqq 1$ *definierte, monoton nicht-abnehmende Funktion ist*

2. *Es seien* l_ν *und* k_ν *gegebene ganze Zahlen, mit*

$$2 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_n; \quad \varkappa_\nu = 2^{k_\nu}, \quad l_\nu \neq 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

und es sei $f_\nu(x)$ *ein Polynom in* x *vom Grade* k_ν *mit reellen Koeffizienten; das Glied vom Grade* k_ν *habe die Gestalt*

$$l_\nu \theta_\nu x^{k_\nu}. \tag{6}$$

3. *Es seien* $\chi(x)$ *und* $\psi_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *für alle hinreichend großen ganzen Werte des positiven Argumentes* x *definierte, positive Funktionen*[4]*,* $\chi(x)$ *monoton nicht-wachsend,* $\psi_\nu(x)$ *monoton nicht-abnehmend; es gelte*

$$\chi(x) \leqq 1; \quad \psi_\nu(x) \geqq 3 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

und wenn

$$\Phi_\nu(x) = \psi_\nu(x) \log \psi_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

gesetzt wird, gelte

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \text{ ganz}}} \frac{\{\Phi_1(x)\, \Phi_2(x) \ldots \Phi_\nu(x)\}^{\frac{3\varkappa_\nu - 4}{4}} \{\Phi_\nu(x)\, \varphi_\nu((42\, k_\nu + 17) \log^2 x)\}^{1/2}}{x\, \chi(x)} = 0 \tag{9}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

4. *Es sei eine Folge* F *von Intervallen*

$$J(a) \ldots a \leqq x < a + [a\, \chi(a)] \quad [5] \tag{10}$$

gegeben, wo die natürliche Zahl $a \to \infty$*, wenn* $J(a)$ *die Folge durchläuft.*

Behauptungen. 1. *Das Diophantische System*

$$o < f_\nu(x) < \frac{1}{\psi_\nu(x)} \pmod 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

hat unendlich viele ganzzahlige Lösungen x *in den Intervallen* (10).

2. *Wenn neben den Bedingungen* 1, 2, 3, 4 *noch gilt*

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \text{ ganz}}} \frac{\psi_\nu(x + [x\, \chi(x)])}{\psi_\nu(x)} = 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

---

[4]) D. h. es gibt eine geeignet gewählte feste Zahl $\bar{y} > 0$, derart, daß $\chi(x)$ und $\psi_\nu(x)$ für $x \geqq \bar{y}$ definiert sind.

[5]) $[u]$ sei für reelles u die größte ganze Zahl $\leqq u$.

so gilt, wenn $A'(a)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen x von (11) in $J(a)$ darstellt, die Beziehung

$$\lim_{a\to\infty} \frac{A'(a)\,\psi_1(a)\,\psi_2(a)\dots\psi_n(a)}{a\,\chi(a)} = 1. \tag{13}$$

Bemerkung 1. In Bedingung 3 wird gefordert, daß $\psi_\nu(x)$ monoton sei; diese Einschränkung ist nicht notwendig; man kann mit weniger auskommen. Der Anwendung auf den Fall $n=1$ wegen beweise ich die erste der Behauptungen ohne Verwendung der Monotonie von $\psi_\nu(x)$ unter der Annahme:

Für hinreichend großes a gebe es in jedem der $J(a)$ der Folge F wenigstens eine von ν unabhängige ganze Zahl a^* mit

$$a \leqq a^* < a + [a\,\chi(a)];\quad \psi_\nu(a^*) = \max_{a\leqq x<a+[a\chi(a)]} \psi_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \tag{14}$$

Beim Beweise des zweiten Teils jedoch setze ich die Monotonie von $\psi_\nu(x)$ im Sinne von Bedingung 3 voraus und verzichte auf Verfeinerungen dieser Art.

Bemerkung 2. Aus Bedingung 3 des Satzes folgt, daß für hinreichend großes ganzes x

$$\Phi_\nu(x) > 1, \quad \frac{1}{\chi(x)} \geqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

ist, so daß aus (5), d. h. $3\varkappa_\nu - 4 \geqq 8$ und (9) folgt

$$\frac{\varphi_\nu^{1/2}(\gamma_\nu \log^2 x)}{x} \to 0, \quad \text{für} \quad x \to \infty \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

wo

$$\gamma_\nu = 42\,k_\nu + 17 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

gesetzt ist.

Weil wegen Bedingung 1 des Satzes $\varphi_\nu(t)$ monoton ist, gilt diese Limesbeziehung für beliebiges $x \to \infty$. Zu jedem $t > 0$ gibt es eine Zahl $x > 1$ mit

$$t = \gamma_\nu \log^2 x; \quad \text{d. h.} \quad x = e^{\sqrt{\frac{t}{\gamma_\nu}}}; \quad x \to \infty, \quad \text{für} \quad t \to \infty,$$

so daß

$$\frac{\varphi_\nu^{1/2}(t)}{e^{\sqrt{\frac{t}{\gamma_\nu}}}} \to 0, \quad \text{für} \quad t \to \infty \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

gilt, d. h.

$$\frac{\log \varphi_\nu(t)}{\sqrt{t}} < \frac{2}{\sqrt{\gamma_\nu}} = \frac{2}{\sqrt{42\,k_\nu + 17}} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n) \tag{15}$$

für hinreichend großes t; (15) sagt also etwas aus über die Größenordnung der Kettenbruchnenner $d_{\varrho,\nu}$ von θ_ν (vgl. Bedingung 1). Auf Verkleinerung der Zahl $42\,k_\nu + 17$ habe ich verzichtet.

Bemerkung 3. Aus (4) und der Monotonie von $\varphi_\nu(t)$ folgt

$$\varphi_\nu(t) \geqq 2, \quad \text{für } t \geqq 1; \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

deshalb geht wegen $3\varkappa_\nu - 4 \geqq 8$, (7) und (8) aus (9) hervor

$$\lim_{a \to \infty} a\chi(a) = \infty, \tag{17}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi_1(x)\psi_2(x)\ldots\psi_n(x)}{x\chi(x)} = 0 \tag{18}$$

und

$$\frac{\{\psi_\nu(x)\}^{\frac{3\varkappa_\nu - 2}{4}}}{x} \to 0, \quad \text{für } x \to \infty \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

(17) besagt, daß die Intervallänge von (10) nach Unendlich strebt, wenn $J(a)$ die Folge F durchläuft.

(18) mit $x = a$ lehrt uns wegen (13), daß

$$A'(a) \to \infty, \quad \text{für } a \to \infty,$$

d. h. System (11) hat unendlich viele Lösungen in den Intervallen $J(a)$.

(19) lehrt uns etwas über die Größenordnung der Funktionen $\psi_\nu(x)$ in (11).

Bemerkung 4. Für die Herleitung der Formeln (15), (16), (17), (18) und (19) wurden (12) und die Annahme der Monotonie von $\psi_\nu(x)$ nicht benutzt. Beim Beweis der ersten Behauptung von Satz 1 dürfen wir diese Ergebnisse also anwenden.

Satz 2. *Es seien θ, l, k und $\varkappa$ gegebene reelle Zahlen; $l \neq 0$ und ganz, $k \geqq 2$ und ganz, $\varkappa = 2^k$ und θ irrational mit*

$$\theta = d_0 + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots;$$

es gelte

$$d_\varrho + 1 \leqq \varphi(\varrho) \qquad (\varrho \geqq 1),$$

wo $\varphi(t)$ eine für $t \geqq 1$ definierte, monoton nicht-abnehmende Funktion ist. Es sei $u(x)$ ein Polynom in x vom Grade $\leqq k-1$ mit reellen Koeffizienten.

Schließlich sei $\eta(x)$ eine für alle hinreichend großen ganzen x definierte positive Funktion; es sei

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \text{ ganz}}} \frac{\varphi^{1/2}(\gamma \log^2 x)(\log x)^{\frac{3\varkappa - 2}{4}}}{\eta^{\frac{3\varkappa - 2}{4}}(x)} = 0 \qquad (\gamma = 42k + 17).$$

Unter diesen Bedingungen hat die Diophantische Ungleichung

$$o < l\theta x^k + u(x) < \frac{\eta(x)}{x^{\frac{3\varkappa - 2}{4}}} \pmod 1$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen x.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\eta(x) \leqq \frac{1}{3} x^{\frac{4}{3\varkappa-2}}$. Wir setzen in Satz 1:

$$n=1, \quad \theta_1=\theta, \quad d_{\varrho,1}=d_\varrho \ (\varrho \geqq 0), \quad \varphi_1(t)=\varphi(t),$$

$$l_1=l, \quad k_1=k, \quad \varkappa_1=\varkappa, \quad f_1(x)=l\theta x^k+u(x),$$

$$\chi(x)=1, \quad \psi_1(x)=\frac{x^{\frac{4}{3\varkappa-2}}}{\eta(x)}, \quad \Phi_1(x)=\frac{x^{\frac{4}{3\varkappa-2}}}{\eta(x)} \log \frac{x^{\frac{4}{3\varkappa-2}}}{\eta(x)},$$

$$J(a) \ldots a \leqq x < 2a,$$

wo die ganze Zahl $a \to \infty$.

Es ist ohne weiteres klar, daß die Bedingungen 1, 2, 3 und 4 von Satz 1 gelten (man beachte Bemerkung 1 bei Satz 1), wenn nur gezeigt wird, daß (9) gilt; d. h. es soll wegen obenstehender Substitution gezeigt werden:

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \text{ ganz}}} \frac{x\left(\log \frac{x^{\frac{4}{3\varkappa-2}}}{\eta(x)}\right)^{\frac{3\varkappa-2}{4}} \varphi^{1/2}(\gamma \log^2 x)}{\{\eta(x)\}^{\frac{3\varkappa-2}{4}} x} = 0,$$

für $\gamma = 42k+17$.

Aus $3\varkappa - 2 \geqq 10$, (16) und der in Satz 2 gegebenen Limesbeziehung geht für genügend großes x hervor

$$\eta(x) > 2,$$

so daß wegen $3\varkappa - 2 \geqq 10$ und der im Anfang des Beweises angenommenen Ungleichung

$$\frac{\eta(x)}{x^{\frac{4}{3\varkappa-2}}} \leqq \frac{1}{3}$$

gilt

$$0 < \left(\log \frac{x^{\frac{4}{3\varkappa-2}}}{\eta(x)}\right)^{\frac{3\varkappa-2}{4}} < (\log x)^{\frac{3\varkappa-2}{4}}$$

für hinreichend großes x.

Wir brauchen also nur zu zeigen, daß

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \text{ ganz}}} \frac{(\log x)^{\frac{3\varkappa-2}{4}} \varphi^{1/2}(\gamma \log^2 x)}{(\eta(x))^{\frac{3\varkappa-2}{4}}} = 0;$$

diese Beziehung ist aber im Satz 2 gegeben.

Weil die Bedingungen 1, 2, 3 und 4 erfüllt sind, liefert die erste Behauptung von Satz 1 uns sofort die Richtigkeit der Behauptung von Satz 2.

Beispiel 1. *Ist θ eine gegebene Irrationalzahl mit beschränkten Kettenbruchnennern (z. B. eine quadratische Irrationalzahl), so hat für jedes feste ganze $k \geqq 2$ $(\varkappa = 2^k)$ die Diophantische Ungleichung*

$$o < \theta x^k < \frac{\log x}{\sqrt[4]{x^{3\varkappa-2}}}\lambda(x) \pmod 1$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen, wenn nur $\lambda(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

Die Richtigkeit folgt unmittelbar aus Satz 2 mit $\varphi(t) = \bar{\gamma}_1$, wo $\bar{\gamma}_1$ geeignet gewählt $\geqq 1$ und nur von θ abhängig ist, und mit

$$l = 1, \quad u(x) = 0, \quad \eta(x) = \log x \cdot \lambda(x), \quad \varkappa = 2^k.$$

Speziell ist die in Satz 2 gewünschte Limesbeziehung erfüllt wegen

$$\frac{(\log x)^{\frac{3\varkappa-2}{4}}\varphi^{1/2}(\gamma \log^2 x)}{\{\eta(x)\}^{\frac{3\varkappa-2}{4}}} = \frac{\bar{\gamma}_1^{1/2}}{\{\lambda(x)\}^{\frac{3\varkappa-2}{4}}} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

Beispiel 2. *Ist $\theta = e^{\frac{2}{s+1}}$, wo s beliebig, fest, ganz, $\geqq 0$ ist, ist $\lambda(x) \geqq 1$, und $\to \infty$ für $x \to \infty$, so hat für jedes feste ganze $k \geqq 2$ $(\varkappa = 2^k)$ die Diophantische Ungleichung*

$$0 < \theta x^k < \left\{\frac{(\log x)^{\frac{3\varkappa+2}{4}}}{x}\right\}^{\frac{4}{3\varkappa-2}} \cdot \lambda(x) \pmod 1$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen x.

Mit $s = 1$, $k = 2$ folgt aus diesem Beispiel, daß

$$0 < ex^2 < \sqrt[5]{\frac{\log^7 x}{x^2}}\lambda(x) \pmod 1$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat.

Beweis. Wir unterscheiden vier verschiedene Fälle:

a) Es sei $s = 1$, also $\theta = e = \left[2, \overline{1, 2 + 2\lambda, 1}\right]_{\lambda=0}^{\infty}$ (Euler), [6])

b) Es sei $s = 0$,

also $\theta = e^2 = \left[7, \overline{2 + 3\lambda, 1, 1, 3 + 3\lambda, 10 + 12\lambda}\right]_{\lambda=0}^{\infty}$ (Stieltjes-Sundman),

c) Es sei s gerade > 0, also für ungerades $\sigma \geqq 3$,

$\theta = e^{\frac{2}{\sigma}} = \left[1, \overline{\frac{\sigma-1}{2} + 3\lambda\sigma,\ 6\sigma + 12\lambda\sigma,\ \frac{5\sigma-1}{2} + 3\lambda\sigma, 1}\right]_{\lambda=0}^{\infty}$ (Stieltjes-Hurwitz),

d) Es sei s ungerade > 1,

also $\theta = e^{\frac{1}{\sigma}}$ $(\sigma = 2, 3, \ldots)$ d. h. $\theta = \left[\overline{1, (1 + 2\lambda)\sigma - 1, 1}\right]_{\lambda=0}^{\infty}$ (Euler).

---

[6]) Für diese Kettenbrüche vergleiche man etwa: O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Berlin und Leipzig (1929), §§ 31, 32; S. 132 ff.

Wegen $\theta = (d_0, d_1, d_2, \ldots)$ ist es leicht einzusehen, daß es eine nur von s abhängige positive Zahl $\bar{\gamma}_3$ gibt, derart, daß in allen vier Fällen a), b), c) und d) gilt

$$d_\varrho + 1 \leqq \bar{\gamma}_3 \cdot \varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots).$$

Wir setzen nun in Satz 2

$$\theta = e^{\frac{2}{s+1}}, \quad \varphi(t) = \bar{\gamma}_3 t, \quad l = 1, \quad u(x) = 0, \quad \eta(x) = (\log x)^{\frac{3\varkappa+2}{3\varkappa-2}} \lambda(x).$$

Es ist klar, daß dann für jedes feste $\gamma > 0$

$$\frac{\varphi^{1/2}(\gamma \log^2 x)(\log x)^{\frac{3\varkappa-2}{4}}}{\eta^{\frac{3\varkappa-2}{4}}(x)} = \frac{(\bar{\gamma}_3 \gamma)^{1/2}}{\{\lambda(x)\}^{\frac{3\varkappa-2}{4}}} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty.$$

Weil alle Bedingungen erfüllt sind, liefert Satz 2 sofort die Behauptung des Beispiels. Ähnliche Beispiele lassen sich aus Satz 2 herleiten für den Fall, daß θ ein allgemeiner Hurwitzscher Kettenbruch ist.

Aus Satz 1 leiten wir zum Schluß her

Beispiel 3. *Es sei für gegebenes $n \geqq 2$, θ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ eine gegebene Irrationalzahl mit der Kettenbruchdarstellung*

$$\theta_\nu = d_{0,\nu} + \frac{1}{d_{1,\nu} + \ldots},$$

wo

$$d_{\varrho,\nu} + 1 \leqq \varphi_\nu(\varrho) \qquad (\varrho \geqq 1)$$

ist, während $\varphi_\nu(t)$ eine für $t \geqq 1$ definierte, monoton nicht-abnehmende Funktion ist, mit

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\log \varphi_\nu(t)}{\sqrt{t}} < \varepsilon_\nu = \frac{2\left(1 - \frac{\omega_n}{\omega_\nu}\right)}{\sqrt{42\nu + 59}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{20}$$

wo

$$\omega_\nu = \frac{2}{\nu(3 \cdot 2^\nu - 2) + 1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt ist. Dann hat das Diophantische System

$$\begin{cases} 0 < \theta_\nu x^{\nu+1} < \dfrac{1}{x^{\omega_n}} \pmod 1 & (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) \\ 0 < \varepsilon x^{n+1} < \dfrac{(\log x)^{n+1}}{x^{\omega_n}} \pmod 1 \end{cases}$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen x.

Deutet man mit $A'(a)$ die Anzahl dieser Lösungen aus

$$a \leqq x < a + \left[\frac{a}{\log a}\right] \qquad (a \text{ ganz} \geqq 3)$$

an, so gilt sogar

$$\lim_{a\to\infty} \frac{A'(a)}{a^{1-n\omega_n}(\log a)^n} = 1.$$

Beweis. Im Anfang des Beweises von Beispiel 2 wurde aus der Eulerschen Kettenbruchdarstellung von e geschlossen, daß wenn

$$e = d_{0,n} + \frac{1}{d_{1,n}} + \frac{1}{d_{2,n}} \dots$$

gesetzt wird, eine feste positive Zahl $\bar{\gamma}_2$ existiert mit

$$d_{\varrho,n} + 1 \leqq \bar{\gamma}_2 \varrho \qquad (\varrho = 1, 2, \dots).$$

Wir setzen nun in Satz 1

$$(21) \quad \begin{cases} \theta_n = e, \quad \varphi_n(t) = \bar{\gamma}_2 t, \quad \chi(x) = \dfrac{1}{\log x}, \quad \psi_\nu(x) = x^{\omega_n} = x^{\frac{2}{n(3\cdot 2^n - 2)+1}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu = 1, 2, \dots, n-1), \\ \psi_n(x) = \dfrac{x^{\omega_n}}{(\log x)^{n+1}}, \quad l_\nu = 1, \quad k_\nu = \nu + 1, \quad \varkappa_\nu = 2^{\nu+1}, \quad f_\nu(x) = \theta_\nu x^{\nu+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

und wir zeigen, daß die Bedingungen von Satz 1 erfüllt sind unter den Bedingungen von Beispiel 3.

Zu den Bedingungen 1, 2. Klar wegen der Bedingungen von Beispiel 3 und (21).

Zu Bedingung 3. Für alle hinreichend großen x sind wegen (21) $\chi(x)$ und $\psi_\nu(x)$ definiert, positiv und monoton im gewünschten Sinne, und es gilt (7). Zeigen wir jetzt (9). Dazu bemerken wir, daß wegen (20) eine positive Zahl $\bar{\varepsilon}_\nu$ existiert, unabhängig von x, mit

$$\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_\nu \sqrt{\gamma_\nu} = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_\nu \sqrt{(42\nu + 59)} < 1 - \frac{\omega_n}{\omega_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n-1),$$

derart, daß für hinreichend großes t (und x)

$$\varphi_\nu(t) < e^{\bar{\varepsilon}_\nu \sqrt{t}}, \quad \text{d. h.} \quad \varphi_\nu^{1/2}(\gamma_\nu \log^2 x) < x^{1/2\,\bar{\varepsilon}_\nu \sqrt{\gamma_\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n-1)$$

ist.

Zum Beweise von (9) unterscheiden wir nun zwei verschiedene Fälle.

A. Es sei $1 \leqq \nu \leqq n-1$. Dann folgt aus (8), (21) und $\gamma_\nu = 42\nu + 59$ $(= 42k + 17)$ für hinreichend großes x

$$0 < \frac{\{\Phi_1(x)\,\Phi_2(x) \dots \Phi_\nu(x)\}^{\frac{3\varkappa_\nu - 4}{4}}\, \Phi_\nu^{1/2}(x)\, \varphi_\nu^{1/2}(\gamma_\nu \log^2 x)}{x\,\chi(x)}$$

$$\leqq x^{\frac{3\nu 2^\nu - 2\nu + 1}{3n 2^n - 2n + 1} - 1} (\omega_n \log x)^{\frac{3\nu 2^\nu - 2\nu + 1}{2}} x^{1/2\,\bar{\varepsilon}_\nu \sqrt{\gamma_\nu}} \log x \to 0,$$

für $x \to \infty$, wegen $1 \leqq \nu \leqq n-1$ und $0 < \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_\nu \sqrt{\gamma_\nu} < 1 - \frac{\omega_n}{\omega_\nu}$.

In diesem Fall gilt also (9).

B. Es sei $\nu = n$. Aus (21) folgt für hinreichend große x

$$\varphi_n(x) = \bar{\gamma}_2 x, \quad \log \psi_{\bar{\nu}}(x) < \log x \qquad (1 \leqq \bar{\nu} \leqq n),$$

so daß aus (8) und (21) folgt (mit $\gamma_n = 42n + 59$)

$$0 < \frac{\{\Phi_1(x)\,\Phi_2(x) \ldots \Phi_n(x)\}^{\frac{3\varkappa_n - 4}{4}}\, \Phi_n^{1/2}(x)\, \varphi_n^{1/2}(\gamma_n \log^2 x)}{x\,\chi(x)}$$

$$< x^{\frac{\omega_n}{\omega_n}-1} (\log x)^{\frac{3n\,2^n - 2n + 1}{2} - \frac{(n+1)(3\cdot 2^n - 1)}{2}} (\log x)\,(\gamma_n \bar{\gamma}_2)^{1/2} \log x$$

$$< (\gamma_n \bar{\gamma}_2)^{1/2} (\log x)^{-\frac{1}{2}(3\cdot 2^n + n - 6)} < \frac{(\gamma_n \bar{\gamma}_2)^{1/2}}{\log x} \to 0,$$

$(n \geqq 2)$ für $x \to \infty$. Auch jetzt gilt also (9).

Bedingung 3 ist also erfüllt.

Zu Bedingung 4. Klar wegen der Bedingungen des Beispiels.

Zu Formel (12). Für $1 \leqq \nu \leqq n-1$ ist wegen (21) für hinreichend großes x

$$1 \leqq \frac{\psi_\nu(x + [x\chi(x)])}{\psi_\nu(x)} \leqq \left(1 + \frac{1}{\log x}\right)^{\omega_n} \to 1, \text{ für } x \to \infty,$$

und es gilt überdies wegen (21)

$$1 \leqq \frac{\psi_n(x + [x\chi(x)])}{\psi_n(x)} \leqq \left(1 + \frac{1}{\log x}\right)^{\omega_n} \left(\frac{\log x}{\log\left(x + \frac{x}{\log x}\right)}\right)^{n+1} \to 1,$$

für $x \to \infty$. Alle Bedingungen von Satz 1 sind also erfüllt.

Die Richtigkeit des Beispiels folgt nun sofort aus der Behauptung von Satz 1 und (21).

§ 2.

Kettenbrüche.

Hilfssatz 1. *Es sei θ eine beliebige reelle Irrationalzahl mit der Kettenbruchdarstellung*

$$\theta = d_0 + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots$$

Es sei $\varphi(t)$ eine für $t \geqq 1$ definierte monoton nicht-abnehmende Funktion, wofür

(22) $$d_\varrho + 1 \leqq \varphi(\varrho) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

ist. Dann gilt für jedes Paar ganzer Zahlen p und q $(q > 0)$

(23) $$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2 \varphi\left(2 + \frac{2}{\log 2} \log q\right)}.$$

Beweis. Es seien p und q zwei ganze Zahlen und es sei $q > 0$. Wir werden mit p_ϱ bzw. q_ϱ den Zähler bzw. den Nenner des ϱ-ten Näherungsbruches von θ bezeichnen, und zwar sei

$$(p_\varrho, q_\varrho) = 1 \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots);$$

hierin ist wie üblich $p_0 = d_0$, $q_0 = 1$ gesetzt.

In jenem Fall, daß $\frac{p}{q}$ nicht zu den Brüchen $\frac{p_\varrho}{q_\varrho}$ gehört, folgt (23) sofort aus einem bekannten Satz von Lagrange[7]) wegen $2\varphi(t) > 2$ für $t \geqq 1$. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß für gewisses $\bar{\varrho} \geqq 0$ gilt

$$p = p_{\bar{\varrho}}, \qquad q = q_{\bar{\varrho}}. \tag{24}$$

Bekanntlich gilt dann

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| = \left|\theta - \frac{p_{\bar{\varrho}}}{q_{\bar{\varrho}}}\right| \geqq \frac{1}{q_{\bar{\varrho}}(q_{\bar{\varrho}+1} + q_{\bar{\varrho}})}. \tag{25}$$

Weiter ist bekanntlich

$$q_{\bar{\varrho}}(q_{\bar{\varrho}+1} + q_{\bar{\varrho}}) < 2\, q_{\bar{\varrho}}\, q_{\bar{\varrho}+1} \leqq 2(d_{\bar{\varrho}+1} + 1)\, q_{\bar{\varrho}}^2, \tag{26}$$

d. h. wegen (22) und (24)

$$q_{\bar{\varrho}}(q_{\bar{\varrho}+1} + q_{\bar{\varrho}}) < 2\varphi(\bar{\varrho} + 1) \cdot q_{\bar{\varrho}}^2 = 2q^2 \varphi(\bar{\varrho} + 1). \tag{27}$$

Ich beweise jetzt die Ungleichung

$$2^{\frac{\varrho-1}{2}} \leqq q_\varrho \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots). \tag{28}$$

Es ist

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 = q_0 \quad \text{und} \quad 2^0 = 1 \leqq d_1 = q_1,$$

womit (28) für $\varrho = 0$ und $\varrho = 1$ bewiesen ist.

Wir nehmen nun an, daß $\varrho \geqq 2$ und daß (28) mit $\varrho - 2$ statt ϱ schon bewiesen ist. Dann geht aus (28) hervor

$$q_\varrho \geqq 2\, q_{\varrho-2} \geqq 2 \cdot 2^{\frac{\varrho-3}{2}} = 2^{\frac{\varrho-1}{2}}.$$

Hiermit ist (28) gezeigt worden.

Wir wenden jetzt (28) an mit $\varrho = \bar{\varrho}$ (also $\varrho \geqq 0$) und finden wegen (24)

$$\bar{\varrho} - 1 \leqq \frac{2 \log q_{\bar{\varrho}}}{\log 2} = \frac{2}{\log 2} \log q.$$

---

[7]) Für die Kettenbrüche vergleiche man O. Perron, l. c. [6]). Übrigens kann man Kettenbruchüberlegungen wie in den Beweisen der Hilfssätze 1, 3 verwendet sind (z. B. seit der Ostrowskischen Abhandlung „Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen", Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922) S. 77–98) zum Gemeingut der Mathematiker rechnen.

Aus (27) geht also hervor

$$q_\varrho(q_{\varrho+1}+q_\varrho)<2q^2\varphi\left(2+\frac{2}{\log 2}\log q\right), \tag{29}$$

weil $\varphi(t)$ monoton nicht-abnehmend ist.

Aus (25) und (29) folgt (23); w. z. b. w.

Hilfssatz 2. *Es sei* $A>0$, $B>0$, $K>0$, $D\geqq 1$ *und* $H\geqq 1$. *Es seien* $\Lambda(t)\geqq 2$ *und* $\omega(t)>0$ *zwei für* $t>0$ *definierte Funktionen; es seien* $\Lambda(t)$ *und* $\frac{t}{\omega(t)}$ *für* $t>0$ *monoton nicht-abnehmend und es sei* $\omega(t)$ *für* $t>0$ *stetig und monoton-wachsend mit*

$$\omega(t)\to\infty \quad \textit{für} \quad t\to\infty.$$

Es sei $\Omega(\omega)$ *die Umkehrfunktion von* $\omega(t)$ $(t>0)$. *Schließlich gelte*

$$\frac{\omega(t)\log\Lambda(t)}{t}\leqq K \textit{ für } t=A+B\log D, \tag{30}$$

$$D\leqq H\cdot\Lambda(A+B\log D). \tag{31}$$

Behauptung. *Es ist*

$$D\leqq H\cdot\Lambda\left(2A+\tfrac{1}{2}\,\Omega\left(2KB+\omega(2B\log(2H))\right)\right). \tag{32}$$

Beweis. Angenommen, (32) wäre falsch, so wäre

$$D>H\cdot\Lambda\left(2A+\tfrac{1}{2}\,\Omega\left(2KB+\omega(2B\log(2H))\right)\right). \tag{33}$$

Aus (33), (31) und der Monotonie von $\Lambda(t)$ folgt

$$0<\Omega\left(2KB+\omega(2B\log(2H))\right)<2B\log D, \tag{34}$$

also wegen der Monotonie von $\omega(t)$ und der Tatsache, daß $\Omega(\omega)$ die Umkehrfunktion von $\omega(t)$ ist, für $t>0$

$$2KB+\omega(2B\log(2H))<\omega(2B\log D),$$

d. h.

$$\frac{2KB}{\omega(2B\log D)}+\frac{\omega(2B\log(2H))}{\omega(2B\log D)}<1. \tag{35}$$

Aus (30) mit $t=A+B\log D$ folgt wegen (31)

$$K\frac{A+B\log D}{\omega(A+B\log D)}\geqq\log\Lambda(A+B\log D)\geqq\log D-\log H. \tag{36}$$

Wegen (34) ist $\log D>0$ und deshalb geht aus (36) und (35) hervor

$$K\frac{A+B\log D}{\omega(A+B\log D)}>\frac{2KB\log D}{\omega(2B\log D)}+\frac{\log D\cdot\omega(2B\log(2H))}{\omega(2B\log D)}-\log H. \tag{37}$$

Die Funktion $\frac{\omega(t)}{t}$ ist monoton nicht-wachsend, deshalb folgt aus

$$\log(2H)<\log D$$

(man vergleiche (33) und $\Lambda(t) \geqq 2$ für $t > 0$) die Beziehung

$$\frac{\omega(2B\log(2H))}{2B\log(2H)} \geqq \frac{\omega(2B\log D)}{2B\log D},$$

so daß

$$\frac{\log D \cdot \omega(2B\log(2H))}{\omega(2B\log D)} \geqq \log(2H) > \log H$$

ist. Aus (37) folgt deshalb

$$\frac{A+B\log D}{\omega(A+B\log D)} > \frac{2B\log D}{\omega(2B\log D)}. \tag{38}$$

Wegen (34) ist $2B\log D > 0$. Weil $\frac{t}{\omega(t)}$ für $t > 0$ monoton nicht-abnehmend ist, folgt aus (38) unmittelbar

$$A + B\log D > 2B\log D,$$

daher

$$B\log D < A,$$

daher wegen (31) und der Monotonie von $\Lambda(t)$

$$D \leqq H \cdot \Lambda(2A).$$

Diese Ungleichung widerspricht (33), wegen $\Omega > 0$ und der Monotonie von $\Lambda(t)$. Deshalb ist (33) falsch, also (32) richtig. W. z. b. w.

Hilfssatz 3. *Es sei θ eine Irrationalzahl, h' eine gegebene natürliche Zahl, es gelten die Kettenbruchdarstellungen*

$$\theta = d_0 + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots \quad ; \quad h'\theta = D_0 + \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \ldots \tag{39}$$

und es sei

$$d_\varrho + 1 \leqq \varphi(\varrho) \qquad (\varrho \geqq 1), \tag{40}$$

wo $\varphi(t)$ eine für $t \geqq 1$ definierte, monoton nicht-abnehmende Funktion ist, wobei eine für $t \geqq 1$ definierte, stetige, monoton wachsende Funktion $\omega(t) > 0$ mit

$$\omega(t) \to \infty \quad \text{für} \quad t \to \infty$$

zu finden ist, derart daß $\frac{t}{\omega(t)}$ monoton nicht-abnehmend ist für $t \geqq 1$.

Es sei ϱ eine ganze Zahl $\geqq 1$ und es gebe eine positive von t unabhängige Zahl C_ϱ, derart, daß

$$\frac{\omega(t)\log\varphi(t)}{t} \leqq C_\varrho, \quad \text{für} \quad t \geqq 3\log(2^\varrho D_1 D_2 \ldots D_\varrho)$$

ist.

Behauptung. *Bedeutet $\Omega(\omega)$ die für $\omega \geqq \omega(1)$ existierende Umkehrfunktion von $\omega(t)$ $(t \geqq 1)$, so gilt*

$$D_\varrho \leqq 2h'\varphi\left(\Omega(6C_\varrho\varrho + \omega(12\varrho\log(3h')))\right). \tag{41}$$

Beweis. Es sei $\frac{p_\varrho}{q_\varrho}$ bzw. $\frac{P_\varrho}{Q_\varrho}$ der ϱ-te Näherungsbruch von θ bzw. von $h'\theta$ und es gelte

$$q_0 = Q_0 = 1; \quad (p_\varrho, q_\varrho) = 1; \quad (P_\varrho, Q_\varrho) = 1 \quad (\varrho = 0, 1, \ldots).$$

Dann gilt (man beachte die Irrationalität von θ)

$$\left| h'\theta - \frac{P_{\varrho-1}}{Q_{\varrho-1}} \right| < \frac{1}{Q_{\varrho-1} Q_\varrho} \qquad (\varrho \geqq 1). \tag{42}$$

Setzen wir in Hilfssatz 1

$$\theta = \theta, \quad p = P_{\varrho-1}, \quad q = h' Q_{\varrho-1} \qquad (\varrho \geqq 1),$$

so sind wegen der Definition von $\varphi(x)$ in Hilfssatz 3 alle Bedingungen von Hilfssatz 1 erfüllt. Ungleichung (23) liefert

$$\left| \theta - \frac{P_{\varrho-1}}{h' Q_{\varrho-1}} \right| > \frac{1}{2h'^2 Q_{\varrho-1}^2 \varphi\left(2 + \frac{2}{\log 2} \log (h' Q_{\varrho-1})\right)} \qquad (\varrho \geqq 1),$$

d. h. wegen der Monotonie von $\varphi(t)$, sowie wegen

$$1 \leqq h' Q_{\varrho-1} \leqq h' Q_\varrho \quad \text{und} \quad \frac{2}{\log 2} < \frac{2 \log 2{,}8}{\log 2} < \frac{\log 8}{\log 2} = 3,$$

$$\left| h'\theta - \frac{P_{\varrho-1}}{Q_{\varrho-1}} \right| > \frac{1}{2h' Q_{\varrho-1}^2 \varphi(3 + 3 \log (h' Q_\varrho))} \qquad (\varrho \geqq 1).$$

Aus dieser Ungleichung und (42) folgt

$$Q_\varrho < 2h' Q_{\varrho-1} \varphi(3 + 3 \log (h' Q_\varrho)) \qquad (\varrho \geqq 1). \tag{43}$$

Weil Q_ϱ der Nenner des ϱ-ten Näherungsbruchs von $h'\theta$ ist, gilt

$$Q_\varrho \geqq D_\varrho Q_{\varrho-1} \qquad (\varrho \geqq 1),$$

so daß aus (43) folgt

$$D_\varrho \leqq \frac{Q_\varrho}{Q_{\varrho-1}} < 2h' \varphi(3 + 3 \log (h' Q_\varrho)) \qquad (\varrho \geqq 1).$$

Weil Q_ϱ mit ϱ wächst und $\varphi(t)$ für $t \geqq 1$ monoton nicht-abnehmend ist, nimmt das letzte Glied dieser Ungleichung mit wachsendem ϱ nicht ab. Setzt man

$$\Delta_\varrho = \mathrm{Max}(D_1, D_2, \ldots, D_\varrho) \qquad (\varrho \geqq 1), \tag{44}$$

so gilt also die Ungleichung

$$\Delta_\varrho < 2h' \varphi(3 + 3 \log (h' Q_\varrho)) \qquad (\varrho \geqq 1). \tag{45}$$

Mittels Induktion nach ϱ weisen wir nun die Ungleichung

$$Q_\varrho < (2\Delta_\varrho)^\varrho \qquad (\varrho \geqq 1) \tag{46}$$

nach. Wegen $Q_1 = D_1 = \Delta_1$ ist (46) klar für $\varrho = 1$. Wir nehmen an, daß $\varrho \geqq 2$, und daß (46) mit $\varrho - 1$ statt ϱ schon bewiesen ist. Für $\varrho \geqq 2$ ist dann

$$Q_\varrho = D_\varrho Q_{\varrho-1} + Q_{\varrho-2} \leqq 2\Delta_\varrho Q_{\varrho-1} < 2\Delta_\varrho (2\Delta_\varrho)^{\varrho-1} = (2\Delta_\varrho)^\varrho.$$

Hiermit ist (46) bewiesen. Aus (45) und (46) geht wegen der Monotonie von $\varphi(t)$ und $3 < 3\log 3$ hervor

$$\Delta_\varrho < 2h'\varphi(3 + 3\log h' + 3\varrho\log(2\Delta_\varrho)) \leqq 2h'\varphi(3\log(3h') + 3\varrho\log(2\Delta_\varrho)) \quad (\varrho \geqq 1).$$

Wir bemerken nun, daß wegen (44) gilt

$$2^\varrho D_1 D_2 \dots D_\varrho \leqq 2^\varrho \Delta_\varrho^\varrho \qquad (\varrho \geqq 1),$$

also

$$3\log(2^\varrho D_1 D_2 \dots D_\varrho) < 3\log(3h') + 3\varrho\log(2\Delta_\varrho) \qquad (\varrho \geqq 1).$$

Wegen der Bedingungen des zu beweisenden Hilfssatzes gilt also für die daselbst genannte Zahl $\bar{\varrho} \geqq 1$

$$(48) \qquad \frac{\omega(t)\log\varphi(t)}{t} \leqq C_{\bar{\varrho}}, \text{ für } t = 3\log(3h') + 3\bar{\varrho}\log(2\Delta_{\bar{\varrho}}).$$

Wegen (47) mit $\varrho = \bar{\varrho}$ und (48) sind die Bedingungen von Hilfssatz 2 erfüllt mit

$$(49) \quad \begin{cases} A = 3\log(3h'), \quad B = 3\bar{\varrho}, \quad K = C_{\bar{\varrho}}, \quad D = 2\Delta_{\bar{\varrho}}, \quad H = 4h', \\ \Lambda(t) = 2 \ (0 < t < 1), \quad \Lambda(t) = \varphi(t) \qquad (t \geqq 1), \end{cases}$$

während wir $\omega(t)$ für $t \geqq 1$ definieren wie in Hilfssatz 3 und weiter setzen

$$\omega(t) = \omega(1)\cdot t \qquad (0 < t < 1).$$

(Man beachte, daß die Bedingung $\Lambda(t) \geqq 2$ von Hilfssatz 2 erfüllt ist wegen (49), (40) und der Monotonie von $\varphi(x)$.)

Durch Anwendung von Hilfssatz 2 finden wir aus (32) und (49)

$$2\Delta_{\bar{\varrho}} \leqq 4h'\varphi\left(6\log(3h') + \frac{1}{2}\Omega\left(6C_{\bar{\varrho}}\bar{\varrho} + \omega(6\bar{\varrho}\log(8h'))\right)\right) \quad (\varrho \geqq 1).$$

Weil $\omega(t)$ und $\Omega(\omega)$ monoton wachsend sind, ist

$$\frac{1}{2}\Omega\left(6C_{\bar{\varrho}}\bar{\varrho} + \omega(6\bar{\varrho}\log(8h'))\right) \leqq \frac{1}{2}\Omega\left(6C_{\bar{\varrho}}\bar{\varrho} + \omega(12\bar{\varrho}\log(3h'))\right)$$

und

$$6\log(3h') = \frac{1}{2}\Omega\left(\omega(12\log(3h'))\right) \leqq \frac{1}{2}\Omega\left(6C_{\bar{\varrho}}\bar{\varrho} + \omega(12\bar{\varrho}\log(3h'))\right),$$

so daß wegen der Monotonie von $\varphi(t)$ aus unserem Ergebnis wegen (44)

$$D_{\bar{\varrho}} \leqq \Delta_{\bar{\varrho}} \leqq 2h'\varphi\left(\Omega\left(6C_{\bar{\varrho}}\bar{\varrho} + \omega(12\bar{\varrho}\log(3h'))\right)\right)$$

hervorgeht. Hiermit ist (41) gezeigt worden, also der Hilfssatz bewiesen.

§ 3.

Summen, die mit den elliptischen ϑ-Funktionen zusammenhängen.

Es wird jetzt als Hilfssatz 4 ein Satz der Herren G. H. Hardy und J. E. Littlewood zitiert, und zwar in einer van der Corputschen Fassung. Mittels einer Hardy-Littlewoodschen Methode leite ich aus diesem Hilfssatz die Hilfssätze 5 und 6 her[8]).

Hilfssatz 4. *Es seien a, b, ϑ, τ reelle Zahlen mit*

$$\vartheta \neq 0, \quad a < b \tag{50}$$

und es werde

$$S(a,b,\vartheta,\tau) = \sum_{x=a}^{b}{}' e^{\pi i(\vartheta x^2 + 2\tau x)} \tag{51}$$

gesetzt. Dann ist, falls $\vartheta > 0$ ist,

$$\left| S(a,b,\vartheta,\tau) - \frac{i+1}{\sqrt{2\vartheta}} \sum_{x=a\vartheta+\tau}^{b\vartheta+\tau}{}' e^{-\frac{\pi i}{\vartheta}(x-\tau)^2} \right| < \frac{7}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\right). \tag{52}$$

Bemerkung. Die Summe im rechten Glied von (51) wird erstreckt über alle ganzen Zahlen x mit $a \leqq x \leqq b$; existiert kein solches x, dann ist die Summe Null. Der Strich am Summenzeichen heißt, daß die Glieder für $x = a$ und für $x = b$, wenn sie überhaupt auftreten, zu halbieren sind. Analoges gilt für die Summe im linken Glied von (52).

Aus Hilfssatz 4 folgt die Richtigkeit folgender

Behauptung. Es sei ϑ' eine Zahl mit

$$0 < \vartheta' < 1,$$

dann ist

$$1 + \frac{1}{\sqrt{\vartheta'}} < \frac{2}{\sqrt{\vartheta'}},$$

so daß wegen $\left|\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right| = 1$ aus (52) mit ϑ' statt ϑ folgt

$$|S(a,b,\vartheta',\tau)| < \frac{1}{\sqrt{\vartheta'}} \left| \sum_{x=a\vartheta'+\tau}^{b\vartheta'+\tau}{}' e^{-\pi i\left(\frac{x^2}{\vartheta'} - \frac{2\tau x}{\vartheta'} + \frac{\tau^2}{\vartheta'}\right)} \right| + \frac{7}{\sqrt{\vartheta'}} \tag{53}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\vartheta'}} \left| \sum_{x=a\vartheta'+\tau}^{b\vartheta'+\tau}{}' e^{\pi i\left(\frac{x^2}{\vartheta'} - \frac{2\tau x}{\vartheta'}\right)} \right| + \frac{7}{\sqrt{\vartheta'}} = \frac{1}{\sqrt{\vartheta'}} \left| S\left(a\vartheta'+\tau, b\vartheta'+\tau, \frac{1}{\vartheta'}, \frac{-\tau}{\vartheta'}\right) \right| +$$

Der letzte Schritt folgt aus (51).

---

[8]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, Some Problems of Diophantine Approximation II, Acta Math. 37 (1914), S. 193–238; J. G. van der Corput, Über Summen, die mit den elliptischen ϑ-Funktionen zusammenhängen, Math. Annalen 87 (1922), S. 66–77. Bemerkung zu diesem Hilfssatz: Ich brauche die zu (52) analoge Ungleichung für den Fall $\vartheta < 0$ nicht.

Hilfssatz 5. Voraussetzungen. *Es seien* a, b, θ *und* τ *reell,* θ *irrational und* $a < b$ *und es gelte die Kettenbruchentwicklung*

$$\theta = d_0 + \frac{1}{d_1 + \dots}. \tag{54}$$

Wir definieren die von θ *abhängige Zahlenfolge* $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$ *durch die Beziehungen*

$$\theta_0 = \theta - [\theta] = \theta - d_0, \quad \theta_\varrho = \frac{1}{d_{\varrho+1} + \theta_{\varrho+1}} \quad (\varrho = 0, 1, \dots). \tag{55}$$

Behauptung. *Wird* $S(a, b, \theta, \tau)$ *definiert durch* (51) (*mit* $\theta \neq 0$, *statt* ϑ), *so gilt für jedes ganze* $r \geqq 0$

$$|S(a, b, \theta, \tau)| < \frac{1}{\sqrt{\theta_0 \theta_1 \dots \theta_r}} \left| S\left(a_r, b_r, \frac{1}{\theta_r}, \tau_r\right) \right| + 7 \sum_{\varrho=0}^{r} \frac{1}{\sqrt{\theta_0 \theta_1 \dots \theta_\varrho}}. \tag{56}$$

Hierin ist

$$\tau_0 = -\frac{\tau + \frac{1}{2}\lambda_0}{\theta_0}, \quad \tau_r = -\frac{\tau_{r-1} + \frac{1}{2}\lambda_r}{\theta_r} \quad (r = 1, 2, \dots), \tag{57}$$

wo $\lambda_r = 0$ *oder* $= 1$ *ist, je nachdem* d_r $(r = 0, 1, \dots)$ *gerade oder ungerade ist. Weiter gilt in* (56)

$$a_r = a\theta_0\theta_1 \dots \theta_r - \sum_{\varrho=0}^{r} \tau_\varrho \theta_\varrho \theta_{\varrho+1} \dots \theta_r \quad (r = 0, 1, \dots), \tag{58}$$

$$b_r = b\theta_0\theta_1 \dots \theta_r - \sum_{\varrho=0}^{r} \tau_\varrho \theta_\varrho \theta_{\varrho+1} \dots \theta_r \quad (r = 0, 1, \dots). \tag{59}$$

Bemerkung. Für $r = 0$ ist mit (58) und (59) gemeint

$$a_0 = a\theta_0 + \tau + \frac{1}{2}\lambda_0; \quad b_0 = b\theta_0 + \tau + \frac{1}{2}\lambda_0. \tag{60}$$

Beweis. Wir unterscheiden zwei verschiedene Schritte.

1. Es sei $r = 0$. Aus (55) und (51) folgt

$$|S(a, b, \theta, \tau)| = |S(a, b, \theta_0 + d_0, \tau)|$$
$$= |S(a, b, \theta_0, \tau)|, \text{ wenn } d_0 \text{ gerade ist,}$$

und

$$= \left| S\left(a, b, \theta_0, \tau + \frac{1}{2}\right) \right|, \text{ wenn } d_0 \text{ ungerade ist.}$$

Wegen der Definition von λ_r für $r = 0$ in Hilfssatz 5 gilt also

$$|S(a, b, \theta, \tau)| = \left| S\left(a, b, \theta_0, \tau + \frac{1}{2}\lambda_0\right) \right|. \tag{61}$$

Es gilt $0 < \theta_0 < 1$, so daß wegen der Behauptung bei Hilfssatz 4 die Formel (53) angewendet werden darf mit θ_0 statt ϑ' und $\tau + \frac{1}{2}\lambda_0$ statt τ.

Wir erhalten dann wegen (61)

$$|S(a,b,\theta,\tau)| = \left|S\left(a,b,\theta_0,\tau+\tfrac{1}{2}\lambda_0\right)\right|$$

$$< \frac{1}{\theta_0}\left|S\left(a\theta_0+\tau+\tfrac{1}{2}\lambda_0, b\theta_0+\tau+\tfrac{1}{2}\lambda_0, \frac{1}{\theta_0}, -\frac{\tau+\frac{1}{2}\lambda_0}{\theta_0}\right)\right| + \frac{7}{\theta_0}.$$

Wegen (57) und (60) steht hier die gewünschte Formel (56) für $r=0$, womit Hifssatz 5 für den Fall 1 bewiesen ist.

2. Es sei $r \geqq 1$. Wir werden jetzt annehmen, der Hilfssatz sei mit $r-1$ statt r bewiesen. Es gelte also

$$(62)\quad |S(a,b,\theta,\tau)| < \frac{1}{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r-1}}\left|S\left(a_{r-1},b_{r-1},\frac{1}{\theta_{r-1}},\tau_{r-1}\right)\right| + 7\sum_{\varrho=0}^{r-1}\frac{1}{\theta_0\theta_1\dots}$$

hierin ist

$$\tau_0 = -\frac{\tau+\frac{1}{2}\lambda_0}{\theta_0}, \qquad \tau_{r-1} = -\frac{\tau_{r-2}+\frac{1}{2}\lambda_{r-1}}{\theta_{r-1}} \quad (r=2,3,\dots),$$

wo $\lambda_{r-1}=0$ oder $=1$ ist, je nachdem d_{r-1} $(r=1,2,\dots)$ gerade oder ungerade ist. Weiter gilt in (62)

$$(63)\qquad a_{r-1} = a\theta_0\theta_1\dots\theta_{r-1} - \sum_{\varrho=0}^{r-1}\tau_\varrho\theta_\varrho\theta_{\varrho+1}\dots\theta_{r-1} \qquad (r=1,2,\dots),$$

$$(64)\qquad b_{r-1} = b\theta_0\theta_1\dots\theta_{r-1} - \sum_{\varrho=0}^{r-1}\tau_\varrho\theta_\varrho\theta_{\varrho+1}\dots\theta_{r-1} \qquad (r=1,2,\dots).$$

Nun ist wegen (55)

$$(65)\qquad 0 < \theta_{r-1} = \frac{1}{\theta_r - d_r} \qquad (r \geqq 1);$$

aus (51) und (65) folgt

$$(66)\quad \left|S\left(a_{r-1},b_{r-1},\frac{1}{\theta_{r-1}},\tau_{r-1}\right)\right| = |S(a_{r-1},b_{r-1},\theta_r+d_r,\tau_{r-1})|$$

$$= \left|S\left(a_{r-1},b_{r-1},\theta_r,\tau_{r-1}+\tfrac{1}{2}\lambda_r\right)\right|,$$

wo $\lambda_r=0$ ist, wenn d_r gerade und wo $\lambda_r=1$ ist, wenn d_r ungerade ist. Wegen (65) und $d_r \geqq 1$ ist

$$0 < \theta_r < 1.$$

Wir können deshalb die in der Behauptung bei Hilfssatz 4 hergeleitete Ungleichung (53) anwenden mit

$$\vartheta' = \theta_r, \qquad a = a_{r-1}, \qquad b = b_{r-1}, \qquad \tau = \tau_{r-1}+\tfrac{1}{2}\lambda_r.$$

Wegen (66) finden wir dann

$$(67)\quad \left|S\left(a_{r-1}, b_{r-1}, \frac{1}{\theta_{r-1}}, \tau_{r-1}\right)\right| = \left|S\left(a_{r-1}, b_{r-1}, \theta_r, \tau_{r-1}+\frac{1}{2}\lambda_r\right)\right|$$

$$< \frac{1}{|\theta_r|}\left|S\left(a_{r-1}\theta_r+\tau_{r-1}+\frac{1}{2}\lambda_r, b_{r-1}\theta_r+\tau_{r-1}+\frac{1}{2}\lambda_r, \frac{1}{\theta_r}, -\frac{\tau_{r-1}+\frac{1}{2}\lambda_r}{\theta_r}\right)\right| + \frac{7}{|\theta_r|}.$$

Wir setzen

$$(68)\qquad \tau_r = -\frac{\tau_{r-1}+\frac{1}{2}\lambda_r}{\theta_r};$$

d. h. τ_r genügt (57). Weiter setzen wir

$$(69)\qquad a_r = a_{r-1}\theta_r + \tau_{r-1} + \frac{1}{2}\lambda_r,$$

$$(70)\qquad b_r = b_{r-1}\theta_r + \tau_{r-1} + \frac{1}{2}\lambda_r.$$

Wegen (68) und (63) folgt dann aus (69)

$$a_r = a_{r-1}\theta_r - \theta_r\tau_r = a\theta_0\theta_1\ldots\theta_r - \sum_{\varrho=0}^{r}\tau_\varrho\theta_\varrho\theta_{\varrho+1}\ldots\theta_r,$$

so daß a_r der Bedingung (58) genügt.

Genau so folgt aus (68), (64) und (70), daß b_r der Bedingung (59) genügt.

Aus (67), (68), (69) und (70) folgt unmittelbar für $r \geqq 1$

$$\left|S\left(a_{r-1}, b_{r-1}, \frac{1}{\theta_{r-1}}, \tau_{r-1}\right)\right| < \frac{1}{|\theta_r|}\left|S\left(a_r, b_r, \frac{1}{\theta_r}, \tau_r\right)\right| + \frac{7}{|\theta_r|},$$

so daß aus (62) folgt

$$|S(a, b, \theta, \tau)| < \frac{1}{|\theta_0\theta_1\ldots\theta_r|}\left|S\left(a_r, b_r, \frac{1}{\theta_r}, \tau_r\right)\right| + 7\sum_{\varrho=0}^{r}\frac{1}{|\theta_0\theta_1\ldots\theta_\varrho|}.$$

Hiermit ist (56) und also Hilfssatz 5 bewiesen.

Hilfssatz 6. *Es seien a, b, θ und τ reell, θ irrational und $a < b$ und es gelte die Kettenbruchdarstellung*

$$\theta = d_0 + \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \ldots}}.$$

Die von θ abhängige Zahlenfolge $\theta_0, \theta_1, \ldots$ sei durch

$$(71)\qquad \theta_0 = \theta - [\theta] = \theta - d_0, \quad \theta_\varrho = \frac{1}{d_{\varrho+1} + \theta_{\varrho+1}} \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots)$$

definiert.

Behauptung. *Wird $S(a, b, \theta, \tau)$ definiert durch* (51) (*mit $\theta \neq 0$, statt ϑ*), *und ist r_1 die kleinste nicht-negative ganze Zahl mit*

$$(72)\qquad \theta_0\theta_1\ldots\theta_{r_1} < \frac{1}{b-a},$$

so gilt[9])

$$|S(a,b,\theta,\tau)| < \mathrm{Min}\left\{\frac{50}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1}}},\ (b-a)\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1-1}}+\frac{49}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1-1}}}\right\}.$$

Vorbemerkung. Wegen $d_{\varrho+1}\geqq 1$ $(\varrho\geqq 0)$ folgt aus (71)

$$(73)\quad 0<\theta_\varrho<1;\ \theta_\varrho\theta_{\varrho+1}=\frac{\theta_{\varrho+1}}{d_{\varrho+1}+\theta_{\varrho+1}}=\frac{1}{\frac{d_{\varrho+1}}{\theta_{\varrho+1}}+1}<\frac{1}{2}\quad(\varrho=0,1,2,\dots).$$

Aus (73) geht hervor, daß die in Hilfssatz 6 genannte Zahl r_1 existiert.

Beweis von Hilfssatz 6. Offenbar sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 5 erfüllt; dieser Hilfssatz, zuerst mit $r=r_1$ angewendet, liefert uns die Ungleichung (56) mit $r=r_1$, also

$$(74)\quad |S(a,b,\theta,\tau)|<\frac{1}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1}}}\left|S\left(a_{r_1},b_{r_1},\frac{1}{\theta_{r_1}},\tau_{r_1}\right)\right|+7\sum_{\varrho=0}^{r_1}\frac{1}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_\varrho}};$$

die im rechten Glied von (74) auftretenden Größen sind dabei durch (57), (58) und (59) mit $r=r_1$ definiert. Aus (58) und (59) geht hervor

$$b_{r_1}-a_{r_1}=(b-a)\,\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1},$$

also wegen (72)

$$b_{r_1}-a_{r_1}<1.$$

Wegen ihrer Definition durch (51) (man vergleiche die Bemerkung unter Hilfssatz 4) gilt also für die Summe $S\left(a_{r_1},b_{r_1},\frac{1}{\theta_{r_1}},\tau_{r_1}\right)$ die Ungleichung

$$\left|S\left(a_{r_1},b_{r_1},\frac{1}{\theta_{r_1}},\tau_{r_1}\right)\right|\leqq 1,$$

so daß aus (74) hervorgeht

$$|S(a,b,\theta,\tau)|<\frac{1}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1}}}+7\sum_{\varrho=0}^{r_1}\frac{1}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_\varrho}},$$

also

$$|S(a,b,\theta,\tau)|<\frac{1}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1}}}\{1+7\,(1+\sqrt{\theta_{r_1}}+\sqrt{\theta_{r_1}\theta_{r_1-1}}+\sqrt{\theta_{r_1}\theta_{r_1-1}\theta_{r_1-2}}+\dots+\sqrt{\theta_{r_1}\theta_{r_1}}$$

d. h. wegen (73)

$$<\frac{1}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1}}}\left\{1+7\left(1+1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\dots\right)\right\}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1}}}\left\{1+14\sum_{\varrho=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^\varrho}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1}}}\left\{1+\frac{14}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right\}<\frac{50}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1}}}$$

[9]) Im Fall $r_1=0$ wird im rechten Glied der erste Ausdruck gemeint.

(das letzte Zeichen $<$ gilt wegen $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ und $\frac{14}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{28+14\sqrt{2}}{2-1} < 49$).

Wir wenden jetzt Hilfssatz 5 abermals an und zwar mit $r = r_1 - 1$ (für $r_1 \geqq 1$). Dann folgt aus (56)

$$|S(a,b,\theta,\tau)| < \frac{1}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1-1}}}\left|S\left(a_{r_1-1}, b_{r_1-1}, \frac{1}{\theta_{r_1-1}}, \tau_{r_1-1}\right)\right| + 7\sum_{\varrho=0}^{r_1-1}\frac{1}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_\varrho}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1-1}}}\{(b_{r_1-1}-a_{r_1-1}) + 7(1+\sqrt{\theta_{r_1-1}}+\sqrt{\theta_{r_1-1}\theta_{r_1-2}}+\dots+\sqrt{\theta_{r_1-1}\theta_{r_1-2}\dots\theta_1})\},$$

also wegen (58), (59) und genau derselben (wegen (73) geltenden) Reihenabschätzung wie im vorigen Falle

$$< (b-a)\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1-1}} + \frac{49}{\sqrt{\theta_0\theta_1\dots\theta_{r_1-1}}}.$$

Hiermit ist Hilfssatz 6 bewiesen.

§ 4.

Abschätzung gewisser Summen.

Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz 7. Bedingungen. 1. *Es seien die ganzen Zahlen a und b gegeben mit*

$$a \leqq b - 64.$$

2. *Es sei θ eine gegebene Irrationalzahl mit der Kettenbruchdarstellung*

$$\theta = d_0 + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots, \tag{75}$$

wofür

$$d_\varrho + 1 \leqq \varphi(\varrho) \qquad (\varrho \geqq 1) \tag{76}$$

ist; hierin sei $\varphi(t)$ eine für $t \geqq 1$ definierte, monoton nicht-abnehmende Funktion, bei der eine für $t \geqq 1$ stetige, monoton wachsende Funktion $\omega(t) > 0$ mit

$$\omega(t) \to \infty \quad \text{für} \quad t \to \infty$$

gefunden werden kann, derart, daß $\frac{t}{\omega(t)}$ monoton nicht-abnehmend ist $(t \geqq 1)$ und daß

$$\frac{\omega(t)\log\varphi(t)}{t} \leqq c_1 \quad \text{für} \quad t \geqq \log(b-a) \tag{77}$$

ist, wo $c_1 > 0$ von t unabhängig ist.

3. *Es sei h eine beliebige natürliche Zahl, $f(x)$ bedeute ein Polynom in x zweiten Grades mit reellen Koeffizienten; das Glied vom zweiten Grade habe die Gestalt*

$$h\theta x^2.$$

Behauptung. *Wenn die Umkehrfunktion von* $\omega(t)$ *mit* $\Omega(\omega)$ $(t \geqq 1,\ \omega \geqq \omega(1))$ *angedeutet wird, so gilt die Ungleichung*

$$(78)\qquad \left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 77\left(\frac{h^{1/2}\varphi^{1/2}\left(\Omega\left(21\,c_1\log(b-a)+\omega(42\log(b-a)\log(6h))\right)\right)}{b-a}\right)$$

Bemerkung[10]). Auf genauere Bestimmung der Konstanten im rechten Glied von (78) habe ich verzichtet.

Beweis. Wegen Bedingung 3 von Hilfssatz 7 können wir schreiben

$$f(x) = h\theta x^2 + \tau_1 x + \tau_2,$$

wo τ_1 und τ_2 reell, unabhängig von x sind. Dann ist

$$\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)} = e^{2\pi i \tau_2}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i(h\theta x^2+\tau_1 x)}.$$

Wird $S(a, b, \vartheta, \tau)$ für $\vartheta \neq 0$ durch (51) in Hilfssatz 4 definiert, und gelten die Verabredungen der Bemerkung bei Hilfssatz 4, so gilt

$$\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)} = e^{2\pi i\tau_2} S(a, b, 2h\theta, \tau_1) + \frac{1}{2}\, e^{2\pi i\tau_2}\left\{e^{2\pi i(h\theta a^2+\tau_1 a)} - e^{2\pi i(h\theta b^2+\tau_1 b)}\right\},$$

d. h.

$$(79)\qquad \left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqq \frac{1}{b-a}\left|S(a, b, 2h\theta, \tau_1)\right| + \frac{1}{b-a}.$$

Die Zahl $2h\theta$ ist irrational. Wir stellen ihre Kettenbruchentwicklung wie folgt dar

$$(80)\qquad 2h\theta = D_0 + \frac{1}{D_1 + \frac{1}{D_2 + \ldots}},$$

und wir definieren die von $2h\theta$ abhängige Zahlenfolge $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \ldots$ durch die Beziehungen

$$(81)\qquad \Theta_0 = 2h\theta - D_0 = 2h\theta - [2h\theta],\quad \Theta_\varrho = \frac{1}{D_{\varrho+1} + \Theta_{\varrho+1}}\quad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots$$

Wir bemerken, daß nun die Bedingungen von Hilfssatz 6 mit $a = a$, $b = b$, $2h\theta$ statt θ, τ_1 statt τ, D_ϱ statt d_ϱ und Θ_ϱ statt θ_ϱ $(\varrho \geqq 0)$ erfüllt sind.

Deshalb lehrt uns Hilfssatz 6 folgendes:

Ist r_1 die kleinste nicht-negative ganze Zahl mit

$$(82)\qquad \Theta_0\Theta_1\ldots\Theta_{r_1} < \frac{1}{b-a},$$

---

[10]) Bei A. Walfisz, Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden (Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 245 – 268, insbes. S. 261), findet sich für den speziellen Fall $a = 0$, $b = N$, $\varphi = c_1 t^{c_2}$ ($c_1 > 0$, $c_2 > 0$ von θ abhängig) ein ähnlicher Hilfssatz. Da tritt aber statt h der Bruch $\frac{m}{n}$ ($m \geqq 1$, $n \geqq 1$ ganz) auf.

so ist

$$|S(a,b,2h\theta,\tau_1)| < \operatorname{Min}\left\{\frac{50}{\sqrt{\Theta_0\Theta_1\dots\Theta_{r_1}}},\ (b-a)\sqrt{\Theta_0\Theta_1\dots\Theta_{r_1-1}}+\frac{49}{\sqrt{\Theta_0\Theta_1\dots\Theta_{r_1-1}}}\right\}.$$

Wegen $D_\varrho \geqq 1$ und (81) ist

$$0 < \Theta_\varrho < 1 \qquad (\varrho \geqq 0), \tag{84}$$

deshalb folgt aus (83) und (79)

$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < \operatorname{Min}\left\{\frac{51}{(b-a)\sqrt{\Theta_0\Theta_1\dots\Theta_{r_1}}},\ \sqrt{\Theta_0\Theta_1\dots\Theta_{r_1-1}}+\frac{50}{(b-a)\sqrt{\Theta_0\Theta_1\dots\Theta_{r_1-1}}}\right\}.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei verschiedene Fälle:

1. Es sei $r_1 = 0$. Aus (85) und (81) mit $\varrho = 0$ folgt dann

$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < \frac{51}{(b-a)\sqrt{\Theta_0}} = 51\frac{\sqrt{D_1+\Theta_1}}{b-a}. \tag{86}$$

2. Es sei $r_1 \geqq 1$. Aus der Definition von r_1 bei (82) folgt

$$\Theta_0\Theta_1\dots\Theta_{r_1-1} \geqq \frac{1}{b-a}. \tag{87}$$

2a. Es sei

$$\sqrt{\Theta_0\Theta_1\dots\Theta_{r_1-1}} \leqq \left(\frac{\sqrt{D_{r_1+1}+1}}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

so daß aus (85) (zweiter Ausdruck) und (87) folgt

$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 51\left(\frac{\sqrt{D_{r_1+1}+1}}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{88}$$

2b. Es sei

$$\sqrt{\Theta_0\Theta_1\dots\Theta_{r_1-1}} > \left(\frac{\sqrt{D_{r_1+1}+1}}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

d. h.

$$\frac{1}{(b-a)\sqrt{\Theta_0\Theta_1\dots\Theta_{r_1}}} < \frac{1}{(b-a)\sqrt{\Theta_{r_1}}}\cdot\frac{\sqrt{b-a}}{(\sqrt{D_{r_1+1}+1})^{\frac{1}{2}}} < \left(\frac{\sqrt{D_{r_1+1}+1}}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

wegen (81) und (84) mit $\varrho = r_1$. Aus dieser Ungleichung und (85) folgt nun aber sofort (88).

Im Fall 1 für $r_1 = 0$ fanden wir (86); d. h. (88) gilt auch für $r_1 = 0$ $\left(\text{für } \frac{\sqrt{D_1+1}}{b-a} \geqq 1 \text{ ist (88) klar, und sonst ist nämlich } \frac{\sqrt{D_1+1}}{b-a} < \left(\frac{\sqrt{D_1+1}}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$; *wir haben also bewiesen, daß* (88) *allgemein für* $r_1 \geqq 0$ *gilt.*

Wir wollen aus (87) noch eine zweite Folgerung ziehen und bemerken, daß wegen (81) gilt

$$(89)\qquad \Theta_\varrho \Theta_{\varrho+1} = \frac{\Theta_{\varrho+1}}{D_{\varrho+1}+\Theta_{\varrho+1}} = \frac{1}{\frac{D_{\varrho+1}}{\Theta_{\varrho+1}}+1} < \frac{1}{2} \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots)$$

wegen $D_{\varrho+1} \geqq 1$ und (84).

Es ist also wegen (87) und (89)

$$\frac{1}{b-a} \leqq \Theta_0 \Theta_1 \ldots \Theta_{r_1-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{r_1}{2}\right]} \qquad (r_1 \geqq 1);$$

wegen $b-a \geqq 64 = 8^2 > (2{,}8)^4 > e^4$ und

$$\frac{r_1}{2} - \frac{1}{2} \leqq \left[\frac{r_1}{2}\right] < \frac{\log(b-a)}{\log 2}$$

ist

$$(90)\quad r_1 + 1 < 2 + \frac{2}{\log 2}\log(b-a) \leqq \left\{\frac{2}{\log e^4} + \frac{2}{\log 2}\right\}\log(b-a) < \frac{7}{2}\log(b-a),$$

wegen

$$\frac{2}{\log e^4} + \frac{2}{\log 2} < \frac{1}{2} + \frac{2\log 2{,}8}{\log 2} < \frac{1}{2} + \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{7}{2}.$$

Es ist klar, daß (90) auch für $r_1 = 0$ gilt, weil das zweite Glied > 1 ist. *Also gilt* (90) *allgemein für* $r_1 \geqq 0$.

Wir bemerken jetzt, daß aus (82) und (81) hervorgeht

$$b-a < \frac{1}{\Theta_0 \Theta_1 \ldots \Theta_{r_1}} < (D_1+1)(D_2+1)\ldots(D_{r_1+1}+1) \leqq 2^{r_1+1} D_1 D_2 \ldots D_{r_1+1},$$

so daß aus (77) hervorgeht

$$(91)\qquad \frac{\omega(t)\log\varphi(t)}{t} \leqq c_1, \quad \text{für} \quad t \geqq 3\log(2^{r_1+1} D_1 D_2 \ldots D_{r_1+1}).$$

Setzt man in Hilfssatz 3

$$\theta = \theta, \quad h' = 2h, \quad \varphi(t) = \varphi(t), \quad \omega(t) = \omega(t)$$

und

$$\bar{\varrho} = r_1 + 1, \qquad C_{\bar{\varrho}} = c_1,$$

so sieht man leicht aus den Bedingungen von Hilfssatz 7, aus (80) und (91), daß die Bedingungen von Hilfssatz 3 erfüllt sind.

(41) lehrt uns

$$(92)\qquad D_{r_1+1} \leqq 4h\,\varphi\left(\Omega\left(6c_1(r_1+1) + \omega\left(12(r_1+1)\log(6h)\right)\right)\right).$$

Wegen (90) und wegen der Monotonie von $\varphi(t)$, $\omega(t)$ und $\Omega(\omega)$ $(t \geqq 1, \omega \geqq \omega(1))$ geht aus (92) hervor

$$(93)\quad D_{r_1+1} + 1 \leqq 1 + 4h\,\varphi\left(\Omega(21c_1\log(b-a) + \omega(42\log(b-a)\log(6h)))\right).$$

Es ist wegen $b-a \geqq 64$

$$21c_1\log(b-a) > 0,$$

deshalb wegen der Monotonie von $\Omega(\omega)$

$$\Omega(21 c_1 \log(b-a) + \omega(42 \log(b-a) \log(6h)))$$
$$> \Omega(\omega(42 \log(b-a) \log(6h))) = 42 \log(b-a) \log(6h) > 42,$$

so daß wegen $\varphi(t) \geqq 2$ für $t \geqq 1$ (vgl. (76)) aus (93), (88) und $51 \sqrt[4]{5} < 51 \cdot \frac{3}{2}$ unmittelbar (78) folgt, w. z. b. w.

Satz 3[11]). *Wir bezeichnen mit Q den m-dimensionalen Quader*

$$Q \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo a_μ und b_μ ganz sind, $a_\mu < b_\mu$ ist und $m \geqq 1$ ist. Die reelle Funktion $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ sei in jedem Gitterpunkt $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von Q definiert.

Es sei ξ eine natürliche Zahl $\leqq b_1 - a_1 + 1$. Ist $\xi \geqq 2$, dann bezeichne Q_q für jedes positive ganze $q < \xi$ den Quader

$$Q_q \ldots a_1 \leqq x_1 < b_1 - q, \quad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \quad (\mu = 2, 3, \ldots, m)$$

und es werde dann gesetzt

$$f_q(x) = f(x_1 + q, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

für jeden Gitterpunkt von Q_q.

Behauptung. *Bezeichnen $A(Q)$ und $A(Q_q)$ die Anzahlen der Gitterpunkte in Q bzw. in Q_q, so gilt*

$$(94) \qquad \left| \frac{1}{A(Q)} \sum_{(x) \text{ in } Q} e^{2\pi i f(x)} \right|^2 < \frac{1}{\xi} + \frac{2}{\xi} \left| \sum_{q=1}^{\xi-1} \frac{1}{A(Q_q)} \sum_{(x) \text{ in } Q_q} e^{2\pi i f_q(x)} \right|.$$

Satz 4. Bedingungen. 1. *Es sei $a \leqq x < b$ ein Intervall (a und b ganz); diesem Intervall sei zugeordnet eine ganze Zahl k und es gelte*

$$k \geqq 2, \quad \varkappa = 2^k, \quad b - a \geqq 16\varkappa.$$

2. *Dem Intervall sei weiter zugeordnet eine Irrationalzahl θ mit der Kettenbruchdarstellung*

$$(95) \qquad \theta = d_0 + \frac{1}{d_1 + \ldots}$$

und es gelte

$$(96) \qquad d_\varrho + 1 \leqq \varphi(\varrho) \qquad (\varrho \geqq 1),$$

wo $\varphi(t)$ eine für $t \geqq 1$ definierte, monoton nicht-abnehmende Funktion ist, bei der eine für $t \geqq 1$ definierte stetige positive, monoton wachsende Funktion $\omega(t)$ zu finden ist, derart, daß $\frac{t}{\omega(t)}$ monoton nicht-abnehmend

---

[11]) J. G. van der Corput, Neue zahlentheoretische Abschätzungen (Zweite Mitteilung), Math. Zeitschrift 29 (1928), S. 397–426. Der Satz ist in der in Fußnote [3]) erwähnten ssertation zitiert als Satz 2 (S. 8).

ist $(t \geqq 1)$ *und daß*

$$\omega(t) \to \infty, \quad \text{für} \quad t \to \infty.$$

Weiter sei dem Intervalle eine von t *unabhängige Zahl* c_2 *zugeordnet, derart, daß*

$$\frac{\omega(t)\log\varphi(t)}{t} \leqq c_2 \quad \text{für} \quad t \geqq \log\frac{b-a}{\varkappa} \tag{97}$$

ist.

3. *Es sei dem Intervall schließlich ein Polynom* $f(x)$ *in* x *zugeordnet vom Grade* k *mit reellen Koeffizienten; das Glied vom Grade* k *habe die Gestalt*

$$h\theta x^k \qquad (h \text{ ganz} \geqq 1)$$

Behauptung. *Es gilt die Ungleichung*

$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 77\left(\frac{h^{1/2}\varphi^{1/2}\left(\Omega\left(21c_2\log(b-a)+\omega\left(42\left\{\log(b-a)\log(6h)+(k-2)\log^2(b-a)\right.\right.\right.\right.}{b-a}\right. \tag{98}$$

wo $\Omega(\omega)$ *die Umkehrfunktion von* $\omega(t)$ *darstellt* $(t \geqq 1;\ \omega \geqq \omega(1))$.

Bemerkung. Die in Bedingung 1 eingeführte Formel

$$b - a \geqq 16\,\varkappa$$

ist für die Gültigkeit von (98) nicht nötig. Vielmehr ist (98) für $3 \leqq b-a \leqq 16\varkappa$ trivial. Denn dann ist für $k \geqq 2$

$$3 \leqq b - a \leqq 2^{k+4} \leqq 2^{\varkappa+2}. \tag{99}$$

Wir setzen nun bequemlichkeitshalber

$$L = \varphi^{1/2}\left(\Omega\left(21c_2\log(b-a)+\omega\left(42\left\{\log(b-a)\log(6h)+(k-2)\log^2(b-a)\right\}\right)\right)\right) \tag{100}$$

und bemerken, daß $\omega(t)$ monoton wachsend, also auch ihre Umkehrfunktion monoton wachsend ist. Aus dieser Tatsache, der Monotonie von $\varphi(t)$ und (96) folgt für $b - a \geqq 3$

$$L \geqq \varphi^{1/2}(42) \geqq 1 \qquad (b-a \geqq 3); \tag{101}$$

Wegen $3\varkappa - 4 \geqq 8$ und $h \geqq 1$ folgt aus (100), (101) und (99), daß das rechte Glied von (98)

$$\geqq 77\cdot 2^{-\frac{4\varkappa+8}{3\varkappa-4}} > 77\cdot 2^{-\frac{6\varkappa}{2\varkappa}} = \frac{77}{8} > 1$$

ist, während das linke Glied ständig $\leqq 1$ ist. Hiermit ist (98) gezeigt.

Dem Beweis von Satz 4 schicken wir einige Bemerkungen voran.

Bemerkung 1. Offenbar enthält Hilfssatz 7 den Spezialfall des Satzes für $k = 2$. Wir brauchen also Satz 4 nur zu zeigen für $k \geqq 3$ unter der Annahme, daß der Satz gültig sei für $k - 1$ statt k.

Bemerkung 2. Die Bedingungen von Satz 3 sind alle erfüllt mit

$$m = 1, \quad a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad x_1 = x,$$

wenn für Q das Intervall

$$a \leqq x < b,$$

für $f(x)$ das im Satz 4 definierte Polynom und für ξ eine ganze Zahl mit

$$2 \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}(b-a)+1 \tag{102}$$

gewählt wird.

Bedeutet $f_q(x)$ die Funktion

$$f_q(x) = f(x+q) - f(x), \tag{103}$$

so lehrt uns Satz 3 wegen (94)

$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right|^2 < \frac{1}{\xi} + \frac{2}{\xi}\sum_{q=1}^{\xi-1}\left|\frac{1}{b-a-q}\sum_{x=a}^{b-q-1} e^{2\pi i f_q(x)}\right|. \tag{104}$$

Bemerkung 3. Wir zeigen, daß die Bedingungen des zu beweisenden Satzes 4 erfüllt sind mit

$$\begin{cases} k-1 \text{ statt } k, \quad \frac{\varkappa}{2} \text{ statt } \varkappa, \quad a = a, \quad b-q \text{ statt } b, \\ \theta = \theta, \quad d_\varrho = d_\varrho, \quad \varphi(t) = \varphi(t), \quad \omega(t) = \omega(t), \quad c_3 = c_2, \\ f_q(x) \text{ statt } f(x), \quad qh \text{ statt } h, \end{cases} \tag{105}$$

wenn q eine beliebige ganze Zahl ist mit

$$1 \leqq q \leqq \xi - 1.$$

Zu Bedingung 1. Wegen Bemerkung 1 ist $k \geqq 3$, also $k-1 \geqq 2$, es ist $\frac{\varkappa}{2} = 2^{k-1}$ und wegen (102) ist

$$q \leqq \xi - 1 \leqq \frac{1}{2}(b-a),$$

so daß wegen des ursprünglich in Bedingung 1 Gegebenen

$$b-a-q \geqq \frac{1}{2}(b-a) \geqq \frac{1}{2}\cdot 16\varkappa = 16\cdot\frac{\varkappa}{2}$$

ist.

Zu Bedingung 2. Nur (97) brauchen wir zu zeigen; sonst ist alles klar. Es gilt wegen der ursprünglichen Bedingung 2:

$$\frac{\omega(t)\log\varphi(t)}{t} \leqq c_3 \quad \text{für} \quad t \geqq \log\frac{b-a}{\varkappa}.$$

Nun ist

$$\frac{b-a-q}{\frac{\varkappa}{2}} \geqq \frac{b-a}{2\cdot\frac{\varkappa}{2}} = \frac{b-a}{\varkappa},$$

so daß die in (97) behauptete Ungleichung erst recht für

$$t \geqq \log \frac{b-a-q}{\frac{\varkappa}{2}}$$

gilt.

Zu Bedingung 3. Aus (103) und der ursprünglichen Bedingung 3 geht hervor, daß $f_q(x)$ ein Polynom $(k-1)$-ten Grades mit reellen Koeffizienten ist. Das Glied vom $(k-1)$-ten Grade hat die Gestalt $q\,h\,\theta\,x^{k-1}$. Hiermit ist alles gezeigt.

Beweis von Satz 4. In der vorangehenden Bemerkung 3 wurde gezeigt, daß die Bedingungen von Satz 4 nach der Substitution (105) erfüllt sind. Dabei wird k durch $k-1$ ersetzt, so daß wegen der ersten Bemerkung dieses Beweises Satz 4 angewendet werden kann. Aus (98) und (105) geht hervor

$$\left|\frac{1}{b-a-q}\sum_{x=a}^{b-q-1} e^{2\pi i f_q(x)}\right|$$

$$< 77\left(\frac{q^{1/2}h^{1/2}\varphi^{1/2}\left(\Omega(21c_2\log(b-a-q)+\omega(42\{\log(b-a-q)\log(6qh)+(k-3)\log^2(b-a-q)\}))\right)}{b-a-q}\right)^{\frac{8}{3\varkappa-8}}$$

Wegen $1 \leqq q \leqq \xi - 1$ geht aus (102) hervor

$$0 < 1 \leqq q \leqq \tfrac{1}{2}(b-a) < (b-a),$$

so daß wegen

$$3\varkappa - 8 \geqq 3\cdot 2^3 - 8 = 16$$

und der Monotonie von $\varphi(x)$, $\Omega(\omega)$ und $\omega(x)$, aus unserm Resultat und (100) sofort folgt

$$\left|\frac{1}{b-a-q}\sum_{x=a}^{b-q-1} e^{2\pi i f_q(x)}\right| < 77\left(\frac{2q^{1/2}h^{1/2}L}{b-a}\right)^{\frac{8}{3\varkappa-8}} < 154\left(\frac{q^{1/2}h^{1/2}L}{b-a}\right)^{\frac{8}{3\varkappa-8}}.$$

Wegen $1 \leqq q \leqq \xi - 1$ gilt also für jedes dieser ganzen q

$$\left|\frac{1}{b-a-q}\sum_{x=a}^{b-q-1} e^{2\pi i f_q(x)}\right| < 154\left(\frac{(\xi-1)^{1/2}h^{1/2}L}{b-a}\right)^{\frac{8}{3\varkappa-8}},$$

also gilt wegen der in Bemerkung 2 für jedes ganze ξ mit (102) bewiesenen Ungleichung (104)

$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right|^2 < \frac{1}{\xi} + \frac{2(\xi-1)}{\xi}\,154\left(\frac{(\xi-1)^{1/2}h^{1/2}L}{b-a}\right)^{\frac{8}{3\varkappa-8}}. \tag{106}$$

Hierin ist L durch (100) definiert, also von ξ unabhängig.

Ist nun σ eine Zahl mit

$$1 \leqq \sigma \leqq \tfrac{1}{2}(b-a), \tag{107}$$

so gibt es stets eine ganze Zahl ξ mit (102), derart, daß

$$\sigma < \xi \leqq \sigma + 1$$

ist. Aus (106) folgt deshalb für jedes σ mit (107)

$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right|^2 < \frac{1}{\sigma} + 308\left(\frac{\sigma^{1/2}h^{1/2}L}{b-a}\right)^{\frac{8}{3x-8}}. \tag{108}$$

Wir bemerken, daß das rechte Glied von (108) auch eine Bedeutung für $0 < \sigma \leqq 1$ hat. Das rechte Glied ist dann $> \frac{1}{\sigma} \geqq 1$; weil das linke Glied von (108) immer $\leqq 1$ ist, *so gilt* (108) auch für $0 < \sigma \leqq 1$, *also allgemein für* $0 < \sigma \leqq \frac{1}{2}(b-a)$. Wir bemerken nun, daß die Funktion

$$\left(\frac{\sigma^{1/2}h^{1/2}L}{b-a}\right)^{\frac{8}{3x-8}} - \frac{1}{\sigma}$$

in bezug auf $\sigma > 0$ stetig ist; diese Funktion hat einen negativen Wert, wenn σ sehr klein, einen positiven Wert, wenn σ sehr groß ist. Es gibt also eine positive Zahl σ_0, wofür

$$\frac{1}{\sigma_0} = \left(\frac{\sigma_0^{1/2}h^{1/2}L}{b-a}\right)^{\frac{8}{3x-8}} \tag{109}$$

gilt. Wegen (109) ist

$$\sigma_0^{\frac{3x-4}{3x-8}} = \sigma_0^{1+\frac{4}{3x-8}} = \left(\frac{\sigma_0^{1/2}h^{1/2}L}{b-a}\right)^{-\frac{8}{3x-8}} \cdot \sigma_0^{\frac{4}{3x-8}} = \left(\frac{h^{1/2}L}{b-a}\right)^{-\frac{8}{3x-8}},$$

d. h.

$$\frac{1}{\sigma_0} = \left(\frac{h^{1/2}L}{b-a}\right)^{\frac{8}{3x-4}}. \tag{110}$$

Wir unterscheiden jetzt zwei verschiedene Fälle.

1. Es sei

$$\sigma_0 \leqq \frac{1}{2}(b-a).$$

Dann darf (108) mit $\sigma = \sigma_0$ angewendet werden; (108) und (109) lehren

$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right|^2 < \frac{308+1}{\sigma_0}. \tag{111}$$

Nun ist

$$\sqrt{309} < 77,$$

so daß aus (111) und (110) folgt

$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 77\left(\frac{h^{1/2}L}{b-a}\right)^{\frac{4}{3x-4}},$$

so daß schließlich wegen (100) die Gültigkeit von (98) gezeigt ist. In diesem Fall 1 ist Satz 4 somit schon bewiesen.

2. Es sei jetzt

$$\sigma_0 > \frac{1}{2}(b-a).$$

Die Funktion

$$\left(\frac{\sigma^{1/2}h^{1/2}L}{b-a}\right)^{\frac{8}{3\varkappa-8}} - \frac{1}{\sigma}$$

ist monoton wachsend in bezug auf $\sigma > 0$. Aus $\sigma_0 > \frac{b-a}{2}$ und (109) geht also hervor

$$\left(\frac{\left\{\frac{1}{2}(b-a)\right\}^{1/2}h^{1/2}L}{b-a}\right)^{\frac{6}{3\varkappa-8}} < \frac{2}{b-a}. \tag{112}$$

Wenden wir jetzt (108) mit $\sigma = \frac{1}{2}(b-a)$ an, so folgt aus (108) und (112)

$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right|^2 < \frac{2(1+308)}{b-a},$$

d. h. wegen

$$\sqrt{618} < 77, \qquad \left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 77\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

also wegen $b-a>3$ und $\frac{4}{3\varkappa-4} \leqq \frac{4}{24-4} = \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 77\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\frac{4}{3\varkappa-4}}. \tag{113}$$

(101) besagt $L > 1$, also $hL > 1$.

Aus $hL > 1$, (100) und (113) folgt nun unmittelbar (98), so daß der Satz 4 auch in diesem zweiten Fall bewiesen ist.

§ 5.

Anwendung auf Diophantische Approximationen.

Die folgenden Betrachtungen stützen sich auf Satz 4 und auf den folgenden fundamentalen van der Corputschen Satz[12]).

---

[12]) Dieser Satz wird demnächst mit Beweis von Herrn J. G. van der Corput in den Acta Math. publiziert im dritten Teil der Abhandlung: Diophantische Ungleichungen (vgl. Fußnote [1])).

In der ersten in Fußnote [3]) erwähnten Arbeit kommt der Satz ohne Beweis als Satz 1 vor. (S. 6.)

Satz 5. *Es sei F eine Folge von m-dimensionalen Quadern*

$$Q \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo $m \geqq 1$ ist, a_μ und b_μ ganz sind und $a_\mu < b_\mu$ ist. Jedem Quader seien zugeordnet eine natürliche Zahl n, $2n$ reelle Zahlen α_ν und β_ν mit $\alpha_\nu < \beta_\nu \leqq \alpha_\nu + 1$ und n reelle Funktionen $f_\nu(x) = f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ definiert für jeden Gitterpunkt $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ aus Q. Es sei

$$T(c) = \sum_{(h)}{}' \left| \frac{1}{A(Q)} \sum_{x \text{ in } Q} e^{2\pi i (h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \ldots + h_n f_n(x))} \right| \tag{114}$$

gesetzt, wo $A(Q)$ die Anzahl der Gitterpunkte aus Q bezeichnet und $\sum_{(h)}'$ erstreckt wird über alle Gitterpunkte

$$(h) = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

mit

$$|h_\nu| \leqq \frac{cn}{\beta_\nu - \alpha_\nu} \log \frac{2n}{\beta_\nu - \alpha_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{115}$$

Wir nehmen an, daß $T(c)$ für jeden festen Wert $c > 0$ nach Null strebt, wenn Q die Folge F durchläuft. Es sei $A'(Q)$ die Anzahl der Gitterpunkte aus Q, welche dem Diophantischen System

$$\alpha_\nu < f_\nu(x) < \beta_\nu \pmod 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{116}$$

genügen.

Unter diesen Bedingungen ist, wenn Q die Folge F durchläuft

$$\operatorname{Lim} \frac{A'(Q)}{A(Q)(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \ldots (\beta_n - \alpha_n)} = 1. \tag{117}$$

Wir führen jetzt den Beweis von Satz 1, und zwar in 6 Schritten. Schritt 1 enthält einige Festsetzungen; die andern Schritte enthalten je eine Behauptung mit Beweis.

Man beachte Bemerkung 4 bei Satz 1.

Schritt 1. Es sei $\chi(x)$ die in Bedingung 3 von Satz 1 für großes ganzes x definierte Funktion. Wir definieren eine Folge F von Intervallen

$$J(a) \ldots a \leqq x < b = a + [a\chi(a)], \tag{118}$$

indem wir die natürliche Zahl a unbeschränkt wachsen lassen.

Wir werden sagen, daß eine Eigenschaft E für fast alle a gilt, wenn nur eine endliche Anzahl der natürlichen Zahlen a diese Eigenschaft E nicht besitzt.

Wegen (17), (118) und der ersten Ungleichung von (7) gilt für fast alle a

$$3 < \frac{a\chi(a)}{2} < b - a \leqq a\chi(a) \leqq a. \tag{119}$$

Schritt 2. Behauptung. *Es sei* $f_\nu(x)$ *das in der Bedingung* 2 *von Satz* 1 *definierte Polynom vom Grade* k_ν $(\varkappa_\nu = 2^{k_\nu})$, *wo das Glied vom Grade* k_ν *die Gestalt*

$$l_\nu \theta_\nu x^{k_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

hat. Es sei $\bar{\nu}$ *eine beliebige natürliche Zahl* $\leqq n$ *und*

$$(120) \qquad (h)_{\bar{\nu}} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) = (h_1, h_2, \ldots, h_{\bar{\nu}}, 0, \ldots, 0)$$

ein eventuell von a *abhängiger, aber von* x *in* $J(a)$ *unabhängiger Gitterpunkt mit*

$$(121) \qquad h_{\bar{\nu}} \neq 0; \quad h_{\bar{\nu}+1} = h_{\bar{\nu}+2} = \ldots = h_n = 0.$$

Schließlich sei

$$(122) \qquad h = |h_{\bar{\nu}} l_{\bar{\nu}}|$$

gesetzt.

Wird $\varphi_{\bar{\nu}}(t)$ *durch die Bedingung* 1 *von Satz* 1 *definiert und wird*

$$\delta_{\bar{\nu}} = \frac{42}{\sqrt{42 k_{\bar{\nu}} + 17}}$$

gesetzt, so gilt für fast alle a

$$(123) \qquad \left| \frac{1}{b-a} \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i (h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \ldots + h_{\bar{\nu}} f_{\bar{\nu}}(x))} \right|$$

$$< 154 \left(\frac{h^{1/2} \varphi_{\bar{\nu}}^{1/2} \left(\{ \delta_{\bar{\nu}} \log a + \sqrt{42 \{ \log a \log (6h) + (k_{\bar{\nu}} - 2) \log^2 a \}} \}^2 \right)}{a \chi(a)} \right)^{\frac{4}{3 \varkappa_{\bar{\nu}} - 4}}$$

Beweis. Wir zeigen, daß die Bedingungen von Satz 4 für fast alle a erfüllt sind, wenn a und b definiert werden durch (118), und

$$(124) \quad \begin{cases} k = k_{\bar{\nu}}, \quad \varkappa = \varkappa_{\bar{\nu}}, \quad \theta = \theta_{\bar{\nu}}, \quad d_\varrho = d_{\varrho,\bar{\nu}} \ (\varrho \geqq 0), \quad \varphi(t) = \varphi_{\bar{\nu}}(t), \\ \omega(t) = \sqrt{t}, \quad c_2 = \frac{1}{21} \delta_{\bar{\nu}} = \frac{2}{\sqrt{42 k_{\bar{\nu}} + 17}}, \end{cases}$$

$$(125) \quad \begin{cases} f(x) = h_1 f_1(x) + \ldots + h_{\bar{\nu}} f_{\bar{\nu}}(x), \text{ falls } h_{\bar{\nu}} l_{\bar{\nu}} > 0, \\ f(x) = -(h_1 f_1(x) + \ldots + h_{\bar{\nu}} f_{\bar{\nu}}(x)), \text{ falls } h_{\bar{\nu}} l_{\bar{\nu}} < 0 \end{cases}$$

gesetzt wird. (Wegen (121) und (5) ist stets $h_\nu l_{\bar{\nu}} \neq 0$).

Zu Bedingung 1. Wegen Bedingung 2 von Satz 1 sind die $n+1$ Zahlen $n, k_1, k_2, \ldots, k_n$ fest, also auch $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$. Für fast alle a ist also wegen (119), (17) und (124)

$$b - a \geqq 16 \varkappa_{\bar{\nu}} = 16 \varkappa.$$

Zu Bedingung 2. Es ist $\theta = \theta_{\bar{\nu}}$ irrational; es gelten (95) und (96) wegen (124), (3) und (4). Die verlangten Monotonieeigenschaften von $\varphi(t)$ und $\omega(t) = \frac{t}{\omega(t)} = \sqrt{t}$ gehen aus Bedingung 1 von Satz 1 und (124) hervor.

Aus (124) folgt weiter

$$\frac{\omega(t)\log\varphi(t)}{t} = \frac{\log\varphi_{\bar\nu}(t)}{\sqrt{t}} \quad \text{also} \quad < \frac{1}{21}\delta_{\bar\nu} = \frac{2}{\sqrt{42\,k_{\bar\nu}+17}},$$

für $t \geqq \gamma$, wegen (15); hierin ist $\bar\gamma > 0$ hinreichend groß unabhängig von t gewählt. Wegen (124), (17) und (119) ist aber für fast alle a

$$\log\frac{(b-a)}{\varkappa} = \log\frac{(b-a)}{\varkappa_{\bar\nu}} > \gamma,$$

so daß (97) für fast alle a erfüllt ist.

Zu Bedingung 3. Wegen (125), (124) und Bedingung 2 von Satz 1 ist $f(x)$ ein Polynom in x vom Grade $k = k_{\bar\nu}$ mit reellen Koeffizienten; das Glied vom Grade $k = k_{\bar\nu}$ hat die Gestalt

$$|h_{\bar\nu}\, l_{\bar\nu}|\,\theta_{\bar\nu}\, x^{k_{\bar\nu}} = h\theta x^k,$$

wegen (124) und (122).

Hiermit ist gezeigt, daß alle Bedingungen erfüllt sind. Für die Anwendung bemerken wir, daß die Umkehrfunktion von $\omega(t) = \sqrt{t}$ $(t > 0)$ gleich

$$\Omega(u) = u^2 \qquad (u > 0)$$

ist. Formel (98) liefert uns nun wegen (124)

(126)
$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 77\left(\frac{h^{1/2}\varphi_{\bar\nu}^{1/2}\left(\left\{\delta_{\bar\nu}\log(b-a)+\sqrt{42\left\{\log(b-a)\log(6h)+(k_{\bar\nu}-2)\log^2(b-a)\right\}}\right\}^2\right)}{b-a}\right)^{\frac{4}{3\varkappa_{\bar\nu}-4}}$$

(126) gilt für fast alle a. Man beachte nun, daß aus (119) für fast alle a

$$\log(b-a) \leqq \log a, \qquad b-a \geqq \frac{a\chi(a)}{2}$$

folgt; wegen $3\varkappa_\nu - 4 > 4$, wegen der Monotonie von $\varphi_{\bar\nu}(t)$ und wegen der aus (125) folgenden Identität

$$\left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| = \left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i\,(h_1 f_1(x)+\ldots+h_{\bar\nu} f_{\bar\nu}(x))}\right|,$$

geht deshalb (123) unmittelbar aus (126) hervor.

Schritt 3. Definition 1. Es sei a^* eine beliebige ganze Zahl mit (14), d. h. also auch mit

(127) $$a \leqq a^* < b; \qquad \Phi_\nu(a^*) = \max_{a \leqq x < b} \Phi_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

(für fast alle a) a^* existiert und ist nach der Bemerkung 1 bei Satz 1 von ν unabhängig.

Definition 2. *Es sei $\bar{\nu}$ eine beliebige ganze Zahl mit $1 \leqq \bar{\nu} \leqq n$. Es sei*

$$(h)_{\bar{\nu}} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) = (h_1, h_2, \ldots, h_{\bar{\nu}}, 0, \ldots, 0) \tag{128}$$

ein Gitterpunkt mit

$$h_{\bar{\nu}} \neq 0; \quad h_{\bar{\nu}+1} = h_{\bar{\nu}+2} = \ldots = h_n = 0, \tag{129}$$

und mit der Eigenschaft

$$|h_\nu| < \bar{c}\, \Phi_\nu(a^*) \qquad (\bar{c} \geqq 1;\ \nu = 1, 2, \ldots, \bar{\nu}) \tag{130}$$

wo $\bar{c}$ fest, d. h. von a, $\bar{\nu}$ und $(h)_{\bar{\nu}}$ unabhängig ist.

Dann kann für fast alle a gesetzt werden

$$T_{\bar{\nu}}(\bar{c}) = \sum_{(h)_{\bar{\nu}}}{}' \left| \frac{1}{b-a} \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i (h_1 f_1(x) + \ldots + h_{\bar{\nu}} f_{\bar{\nu}}(x))} \right|, \tag{131}$$

wo $(h)_{\bar{\nu}}$ über alle (von x in $a \leqq x < b$ unabhängigen) Gitterpunkte mit (128), (129) und (130) erstreckt wird.

Behauptung. *Es ist*

$$\lim_{a \to \infty} T_{\bar{\nu}}(\bar{c}) = 0 \qquad (1 \leqq \bar{\nu} \leqq n).$$

Beweis. Es sei $\bar{\nu}$ eine beliebige natürliche Zahl $\leqq n$. Es sei $R_{\bar{\nu}}(\bar{c})$ die Anzahl der Glieder in

$$\Sigma_{(h)_{\bar{\nu}}}{}'$$

im rechten Gliede von (131). Dann folgt aus der Behauptung (123) des vorigen Schrittes für fast alle a die Ungleichung

$$T_{\bar{\nu}}(\bar{c}) \leqq R_{\bar{\nu}}(\bar{c})\ 154\ \mathrm{Max}\left(\frac{h^{1/2}\, \varphi_{\bar{\nu}}^{1/2}\left(\left\{\delta_{\bar{\nu}} \log a + \sqrt{42\{\log a \log(6h) + (k_{\bar{\nu}} - 2)\log^2 a\}}\right\}^2\right)}{a\chi(a)} \right. \tag{132}$$

wo h in (122) definiert ist, $\varphi_{\bar{\nu}}(t)$ in Bedingung 1 von Satz 1, wo

$$\delta_{\bar{\nu}} = \frac{42}{\sqrt{42\, k_{\bar{\nu}} + 17}} \tag{133}$$

gilt und wo das Maximum genommen wird über die Werte, die man bekommt, wenn $(h)_{\bar{\nu}}$ alle Gitterpunkte mit (129) und (130) durchläuft (es sind, abgesehen von h, im rechten Gliede von (123) die von $\bar{\nu}$ abhängigen Größen unabhängig von der speziellen Wahl von $(h)_{\bar{\nu}}$).

Um $R_{\bar{\nu}}(\bar{c})$ nach oben abzuschätzen, bemerken wir, daß wegen (130) jede Koordinate h_ν von $(h)_{\bar{\nu}}$ höchstens

$$[2\bar{c}\, \Phi_\nu(a^*) + 1]$$

Werte annehmen kann; diese Anzahl ist also wegen (130), (7) und (8) für fast alle a

$$< 3\bar{c}\, \Phi_\nu(a^*),$$

so daß wir schließen können

$$R_{\bar\nu}(\bar c) < (3\bar c)^n \Phi_1(a^*)\Phi_2(a^*)\dots\Phi_{\bar\nu}(a^*). \tag{134}$$

Weil die n Zahlen $l_1, l_2, \dots, l_n$ fest sind, gibt es eine feste (also von $\bar\nu, \bar c, (h)_{\bar\nu}$ und a unabhängige) Zahl c_3 mit

$$|l_{\bar\nu}| < c_3.$$

Aus (122) und (130) geht also für fast alle a hervor

$$h = |h_{\bar\nu} l_{\bar\nu}| < c_3 \bar c \Phi_{\bar\nu}(a^*). \tag{135}$$

Es ist wegen (19) und $a^* < b \leqq 2a$ für fast alle a

$$\psi_{\bar\nu}(a^*) < \left(\frac{1}{2}a^*\right)^{\frac{4}{3\varkappa_{\bar\nu}-2}} < a^{2/5},$$

also wegen (8)

$$\Phi_{\bar\nu}(a^*) < a^{2/5}\log a,$$

so daß aus (135) hervorgeht

$$\log(6h) < \log(6c_3\bar c) + \frac{2}{5}\log a + \log\log a < \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 42}\right)\log a. \tag{136}$$

Wir bemerken weiter, daß für $k_{\bar\nu} \geqq 2$

$$(42k_{\bar\nu})^2 - 50\cdot 42\cdot k_{\bar\nu} - 67\cdot 17 < (42k_{\bar\nu})^2 - 50\cdot 42 k_{\bar\nu} + (25)^2$$

ist, d. h.

$$\sqrt{(42k_{\bar\nu}+17)(42k_{\bar\nu}-67)} < 42k_{\bar\nu} - 25 = 42k_{\bar\nu} + 17 - 42,$$

d. h.

$$\left(\frac{42}{\sqrt{42k_{\bar\nu}+17}} + \sqrt{42k_{\bar\nu}-67}\right)^2 < 42k_{\bar\nu} + 17. \tag{137}$$

Aus (136), (133) und der Monotonie von $\varphi_{\bar\nu}(t)$ folgt für fast alle a

$$\varphi_{\bar\nu}^{1/2}\left(\left\{\delta_{\bar\nu}\log a + \sqrt{42\left\{\log a\log(6h) + (k_{\bar\nu}-2)\log^2 a\right\}}\right\}^2\right)$$
$$\leqq \varphi_{\bar\nu}^{1/2}\left(\left\{\frac{42}{\sqrt{42k_{\bar\nu}+17}} + \sqrt{42k_{\bar\nu}-67}\right\}^2 \log^2 a\right),$$

d. h. wegen (137)

$$\leqq \varphi_{\bar\nu}^{1/2}\left((42k_{\bar\nu}+17)\log^2 a\right),$$

so daß aus (132), (134) und (135) wegen $3\varkappa_{\bar\nu} - 4 \geqq 8$ für fast alle a

$$T_{\bar\nu}(\bar c) \leqq (3\bar c)^n \cdot 154 \cdot \sqrt{c_3\bar c} \times \tag{137a}$$
$$\times \left(\frac{(\Phi_1(a^*)\Phi_2(a^*)\dots\Phi_{\bar\nu}(a^*))^{\frac{3\varkappa_{\bar\nu}-4}{4}} \Phi_{\bar\nu}^{1/2}(a^*)\varphi_{\bar\nu}^{1/2}(\{42k_{\bar\nu}+17\}\log^2 a)}{a\chi(a)}\right)^{\frac{4}{3\varkappa_{\bar\nu}-4}}$$

folgt.

Der Klammerausdruck im rechten Glied ist wegen der Monotonie von $\varphi_{\bar\nu}(t) > 0$ und von $\frac{1}{\chi(x)} > 0$ und wegen

$$\Phi_\nu(a^*) > 0 \ (1 \leqq \nu \leqq \bar\nu), \quad a \leqq a^* < 2a \quad \text{und} \quad 3\varkappa_{\bar\nu} - 4 > 0$$

höchstens

$$\left(\frac{2\,(\Phi_1(a^*)\,\Phi_2(a^*)\dots\Phi_{\bar\nu}(a^*))^{\frac{3\varkappa_{\bar\nu}-4}{4}}\,\Phi_{\bar\nu}^{1/2}(a^*)\,\varphi_{\bar\nu}^{1/2}(\{42\,k_{\bar\nu}+17\}\log^2 a^*)}{a^*\chi(a^*)}\right)^{\frac{4}{3\varkappa_{\bar\nu}-4}}$$

Aus (131) folgt $T_{\bar\nu}(\bar c) \geqq 0$; deshalb folgt also aus (137a) und (9) mit $x = a^*$

$$T_{\bar\nu}(\bar c) \to 0 \quad \text{für} \quad a^* \to \infty,$$

d. h. wegen $a^* \geqq a$, d. h. $a^* \to \infty$, für $a \to \infty$:

$$\lim_{a\to\infty} T_{\bar\nu}(\bar c) = 0 \qquad (\bar\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Hiermit ist die Behauptung bewiesen.

Schritt 4. Definition. Es sei a^* die zu a gehörige Zahl definiert in Definition 1 von Schritt 3; a^* genügt dann (14) und (127) für fast alle a. Es sei $\bar a_\nu$ eine in $a \leqq x < b$ liegende ganze Zahl mit

$$(138) \qquad a \leqq \bar a_\nu < b; \quad \psi_\nu(\bar a_\nu) = \min_{a\leqq x<b} \psi_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Behauptung. *Von den beiden, für fast alle a einen Sinn besitzenden Diophantischen Systemen*

$$(139) \quad 0 < f_\nu(x) < \frac{1}{\psi_\nu(u_\nu)} \pmod 1 \quad (u_\nu = a^* \text{ oder } u_\nu = \bar a_\nu;\ \nu = 1, 2, \dots, n)$$

bedeute $A^{(1)}_{139}(a)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen x von (139) aus (118), wenn $u_\nu = a^*$ und $A^{(2)}_{139}(a)$ diese Anzahl, wenn $u_\nu = \bar a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ ist. Dann gilt

$$(140) \quad \lim_{a\to\infty} \frac{A^{(u)}_{139}(a)\cdot\psi_1(u_1)\,\psi_2(u_2)\dots\psi_n(u_n)}{a\,\chi(a)} = 1 \quad \left(\begin{cases} u_\nu = a^* \\ u = 1 \end{cases} \text{oder} \begin{cases} u_\nu = \bar a_\nu \\ u = 2 \end{cases};\ \nu = 1, 2, \dots\right.$$

(*In* (139) *bedeutet $f_\nu(x)$ die in Bedingung* 2 *von Satz* 1 *definierte Funktion.*)

Beweis. Wir setzen in Satz 5 (§ 5)

$$(141) \quad m = 1, \quad a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad Q \equiv J(a) \equiv a \leqq x < b, \quad A(Q) = b - a,$$

definieren $J(a)$ durch (118), die Folge F wie in Schritt 1 und setzen noch

$$(142) \quad A'(Q) = A^{(u)}_{139};\ \alpha_\nu = 0,\ \beta_\nu = \frac{1}{\psi_\nu(u_\nu)} \quad \left(\begin{cases} u_\nu = a^* \\ u = 1 \end{cases} \text{oder} \begin{cases} u_\nu = \bar a_\nu \\ u = 2 \end{cases};\ \nu = 1, 2, \dots\right.$$

Wegen der zweiten Ungleichung von (7) und (142) gilt für fast alle a

$$\alpha_\nu < \beta_\nu \leqq 1 = \alpha_\nu + 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so daß alle Bedingungen von Satz 5 erfüllt sind, wenn es uns nur gelingt zu zeigen, daß der durch (114) definierte Ausdruck $T(c)$ für jedes feste $c > 0$ nach Null strebt, wenn Q die Folge F durchläuft, d. h. wenn $a \to \infty$.

Es ist für fast alle a

$$T(c) = \sum_{(h)}{}' \left| \frac{1}{b-a} \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i (h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \ldots + h_n f_n(x))} \right|, \tag{143}$$

wo $\sum_{(h)}{}'$ über alle Gitterpunkte

$$(h) = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

mit (man beachte (115) und (142))

$$|h_\nu| \leqq c n \psi_\nu(u_\nu) \log(2 n \psi_\nu(u_\nu)) \quad (u_\nu = a^*, \text{ oder } u_\nu = \bar{a}_\nu;\ \nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{144}$$

erstreckt wird.

Wegen (14) und (118) folgt aus (144) sowohl mit $u_\nu = a^*$, wie auch mit $u_\nu = \bar{a}_\nu$

$$|h_\nu| \leqq c n \psi_\nu(a^*) \log(2 n \psi_\nu(a^*)),$$

also wegen (7)

$$|h_\nu| < \bar{c} \psi_\nu(a^*) \log \psi_\nu(a^*) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{145}$$

wenn

$$\bar{c} = \operatorname{Max}(2 c n^2 + c n; 1).$$

Aus (145) folgt wegen (8) und $\bar{c} \geqq 1$, daß (130) erfüllt ist. Es gilt also folgendes:

Für jedes feste $c > 0$, genügt jeder Gitterpunkt

$$(h) = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

mit (144) auch (128), (129) und (130), wo $\nu \leqq n$ ist und $\bar{c}$ fest ist.

Wegen der Definition von $T_\nu(\bar{c})$ in Schritt 3 ist also

$$T(c) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} T_\nu(\bar{c}).$$

Es ist wegen (143) $T(c) \geqq 0$ und deshalb lehrt uns, die Behauptung von Schritt 3 (n ist ja fest)

$$\lim_{a \to \infty} T(c) = 0, \quad \text{für festes } c > 0.$$

Hiermit ist gezeigt, daß alle Bedingungen von Satz 5 durch die Substitutionen (141) und (142) erfüllt werden. Unter Anwendung dieses Satzes finden wir aus (117) wegen (141), (142) und $\frac{b-a}{a\chi(a)} \to 1$, für $a \to \infty$ (man

beachte (118) und (17)), sofort die Beziehung

$$\lim_{a\to\infty}\frac{A^{(u)}_{139}(a)\cdot\psi_1(u_1)\dots\psi_n(u_n)}{a\chi(a)}=1 \quad \left(\begin{cases}u_\nu=a^*\\ u=1\end{cases}\text{oder}\begin{cases}u_\nu=\bar a_\nu\\ u=2\end{cases};\ \nu=1,2,\dots,n\right).$$

Hiermit ist die Behauptung von Schritt 4 bewiesen.

Schritt 5. Beweis der Behauptung 1 von Satz 1. $A'=A'(a)$ stellt die Anzahl der Lösungen von (11) in (118) dar und wegen der Definition des vorigen Schrittes stellt $A^{(1)}_{139}(a)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von (139) mit $u_\nu=a^*$ dar, welche ebenfalls in (118) liegen. Aus (14), (11) und (139) folgt für fast alle a

$$A'\geqq A^{(1)}_{139}(a). \tag{146}$$

Aus (119) und der Tatsache, daß $\frac{1}{\chi(x)}$ monoton nicht-abnehmend ist, folgt wegen (7) und $a\leqq a^*<2a$

$$0<\frac{\psi_1(a^*)\,\psi_2(a^*)\dots\psi_n(a^*)}{a\chi(a)}<2\,\frac{\psi_1(a^*)\dots\psi_n(a^*)}{a^*\chi(a^*)}\to 0,\quad\text{für } a\to\infty,$$

wegen $a^*>a$ und (18) mit $x=a^*$.

Die eben hergeleitete Limesbeziehung lehrt uns wegen der im vorigen Schritt behaupteten Limesbeziehung (140)

$$\lim_{a\to\infty}A^{(1)}_{139}(a)=\infty,\quad\text{d. h. }\lim_{a\to\infty}A'=\infty,$$

wegen (146). Hiermit ist Behauptung 1 von Satz 1 wegen der oben angegebenen Bedeutung von A' bewiesen.

Schritt 6. Beweis von Behauptung 2 von Satz 1. Wir setzen jetzt voraus, daß $\psi_\nu(x)$ monoton nicht-abnehmend ist; dann ist wegen (14), (138) und (118)

$$a^*=b-1,\quad \bar a_\nu=a\qquad(\nu=1,2,\dots,n). \tag{147}$$

Wegen der Definition von $A'=A'(a)$ in Behauptung 2 von Satz 1 und von $A^{(u)}_{139}(a)$ in Schritt 5 $(u=1,2)$ folgt aus (11) und (139) wegen (147) und der Monotonie von $\psi_\nu(x)$

$$A^{(1)}_{139}(a)\leqq A'\leqq A^{(2)}_{139}(a). \tag{148}$$

Aus (147) und der Monotonie von $\psi_\nu(x)$ folgt überdies wegen (118) und (12)

$$1\leqq\frac{\psi_\nu(a^*)}{\psi_\nu(\bar a_\nu)}=\frac{\psi_\nu(b-1)}{\psi_\nu(a)}\leqq\frac{\psi_\nu(a+[a\chi(a)])}{\psi_\nu(a)}\to 1,\quad\text{für } a\to\infty. \tag{149}$$

Aus (148), (149) und (140) folgt

$$\lim_{a\to\infty}\frac{A'\psi_1(a)\,\psi_2(a)\dots\psi_n(a)}{a\chi(a)}=1;$$

hiermit ist (13), also Satz 1 bewiesen.

§ 6.

Anhang.

In der Einleitung wurde schon erwähnt, daß in den unter [3]) zitierten Arbeiten ähnliche Sätze wie Satz 1 bewiesen sind. Da wird auch Satz 5 verwendet; statt Satz 4 (§ 5) wird aber benutzt[13])

Satz 6. 1. *Dem Intervall*

$$a \leqq x < b \quad (a \text{ und } b \text{ ganz}, \ b - a > 3)$$

sei eine Irrationalzahl θ *zugeordnet, für die zwei positive Zahlen* L *und* d *existieren, derart, daß für jedes Paar ganzer Zahlen* p *und* q $(q > 0)$ *gilt*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > L q^{-d-1} \tag{150}$$

(*es sind dabei* L *und* d *von* p *und* q *unabhängig und es ist* $L \leqq 1$).

2. *Dem Intervall sei weiter ein Polynom* $f(x)$ *mit reellen Koeffizienten vom Grade* $k \geqq 1$ $(\varkappa = 2^k)$ *zugeordnet; das Glied vom Grade* k *habe die Gestalt*

$$h\theta x^k.$$

Behauptung. *Dann ist*

$$\left|\frac{1}{b-a}\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 50\left(\frac{(k!\,h)^d}{L(b-a)}\right)^{\frac{1}{(\varkappa-2)d+\frac{\varkappa}{2}}} \tag{151}$$

Der Hauptunterschied zwischen den Sätzen 4 und 6 liegt in den Bedingungen für θ (Bedingung 2 von Satz 4; 1 von Satz 6). Es gilt nun die folgende Tatsache:

Behauptung. *Wenn bei gegebenen* a, b, k, *die die Bedingung* 1 *von Satz* 4 *erfüllen mögen, eine Irrationalzahl* θ *der Bedingung* 2 *von Satz* 4 *genügt, so gibt es für jedes feste* $\varepsilon > 0$ *eine positive Zahl* $L(\varepsilon) \leqq 1$, *derart, daß* θ *auch der Bedingung* 1 *von Satz* 6 *genügt mit*

$$d = 1 + \varepsilon, \quad L = L(\varepsilon).$$

Der Beweis verläuft folgendermaßen: Es sei $\varepsilon > 0$, beliebig, fest. Weil θ der Bedingung 2 von Satz 4 genügt, sind die Bedingungen von

---

[13]) Dieser Satz 6 ist der Spezialfall von Satz 10 aus der in Fußnote [3]) zitierten Dissertation (S. 61), und zwar mit

$$R = 0, \quad m = 1, \quad t = 1.$$

Der genannte Satz 10 gilt nicht nur für ein Polynom $f(x)$, sondern für etwas allgemeinere Funktionen in mehreren Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$. In dieser Arbeit habe ich auf derartige Verallgemeinerungen verzichtet.

Hilfssatz 1 (§ 2) erfüllt, während wegen (97) und der Monotonie von $\omega(t)$ und $\varphi(t)$ $(t \geqq 1)$ gilt

$$\frac{\omega(t)\log\varphi(t)}{t} \leqq \operatorname{Max}\left\{\frac{\omega\left(\log\frac{b-a}{\varkappa}\right)\log\varphi\left(\frac{b-a}{\varkappa}\right)}{1};\ c_2\right\} \qquad (t \geqq 1),$$

d. h. bei geeignet gewähltem, von t unabhängem $c_4 > 0$

$$\varphi(t) \leqq e^{c_4\frac{t}{\omega(t)}} \leqq c_5 e^{\frac{\varepsilon}{7}t} \qquad (t \geqq 1), \tag{152}$$

bei geeignet gewähltem, nur von c_4 und ε abhängigem $c_5 > 1$, es ist ja $\omega(t) \to \infty$, für $t \to \infty$.

Wir wenden jetzt Hilfssatz 1 an und finden für beliebige ganze p und q $(q > 0)$ wegen (23) und $\frac{2}{\log 2} < 4$

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \tfrac{1}{2} q^{-2}\varphi^{-1}(2 + 4\log q) \geqq \tfrac{1}{2} q^{-2}\varphi^{-1}(7\log(3q)),$$

wegen der Monotonie von $\varphi(t)$; also wegen (152)

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2c_5} q^{-2} e^{-\varepsilon\log(3q)} = \frac{1}{2\cdot 3^{\varepsilon}\cdot c_5} q^{-2-\varepsilon},$$

so daß die Behauptung bewiesen ist mit

$$L(\varepsilon) = \frac{1}{2\cdot 3^{\varepsilon}\cdot c_5} < 1.$$

Aus der bewiesenen Tatsache geht nun aber auch hervor, daß der Satz 4 nicht anwendbar ist auf eine Zahl θ, für die man die Bedingung (150) von Satz 6 nur nachweisen kann mit einer Zahl

$$d > 1 + \vartheta,$$

wo ϑ eine (von θ abhängige) aber feste Zahl > 0 ist. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man nur weiß, daß θ eine algebraische Zahl vom Grade $g \geqq 3$ ist. In diesen Fällen kann man aber Satz 6 anwenden. In den anderen Fällen, wo also θ sowohl der Bedingung 1 von Satz 4 als der Bedingung 1 von Satz 6 genügt, ist für $\varepsilon > 0$

$$d = 1 + \varepsilon, \qquad k \geqq 2, \qquad \varkappa = 2^k,$$

$$d(\varkappa - 2) + \frac{\varkappa}{2} > (1 + \varepsilon)(\varkappa - 2) > \frac{3\varkappa - 4}{4}.$$

Weil sowohl (98) als auch (151) für große Werte von $b - a$ angewendet werden, ist Satz 6 in diesen Fällen weniger scharf als Satz 4.

Zum Beispiel ist in der unter [3]) zitierten Dissertation mit Hilfe von Satz 6 bewiesen, daß die Diophantische Ungleichung

$$0 < e x^2 < \frac{1}{x^{\omega}} \pmod 1$$

für jedes feste $\omega < \frac{1}{5}$ unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat, ein Resultat, daß viel weniger besagt, als das in Beispiel 2 dieser Einleitung erwähnte, wo behauptet wird, daß die Diophantische Ungleichung

$$0 < \varepsilon x^3 < \frac{\log^2 x}{\sqrt[5]{x^2}} \pmod 1$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat.

Schließlich bemerke ich noch, daß in den unter [3]) zitierten Arbeiten Systeme der Gestalt (1) betrachtet sind, wo n mit x nach Unendlich streben darf. In diesen Fällen würde Satz 4 dasselbe Resultat ergeben wie Satz 6.

(Eingegangen am 24. Februar 1932.)

Zusatz bei der Korrektur. Wie ich während der Drucklegung bemerkte, ist es möglich, den Beweis von Hilfssatz 7 zu vereinfachen und zu verallgemeinern. Obwohl dadurch die obigen Ergebnisse eine kleine Verschärfung erfahren, verzichte ich auf die Durchführung, weil ich mit einer anderen Methode auf diese Fragestellungen zurückzukommen hoffe.

Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Eine kontinuierliche Gruppe ist ein topologisches Kontinuum, welches zugleich eine Gruppe ist; sie wird also definiert durch eine Punktmenge, ein Umgebungssystem und eine Zusammensetzungsregel [1]).

Der Versuch, ganz allgemein die topologischen Relationen auf rein gruppentheoretische, oder das Umgebungssystem auf die Zusammensetzungsregel zurückzuführen, muß scheitern, weil schon die eingliedrigen kontinuierlichen Gruppen bekanntlich unstetige Automorphismen besitzen, also solche Selbstabbildungen, welche die Gruppenoperation erhalten, aber die topologischen Relationen zerstören. Daß auch für Gruppen ohne Abelsche Kompositionsfaktoren (sogenannte halbeinfache Gruppen) unstetige Automorphismen möglich sind, zeigt das folgende, mir von Herrn J. von Neumann mitgeteilte Beispiel.

Die sechsgliedrige Gruppe der komplexen Matrizes $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit Determinante 1 ist (bis auf einen diskreten Normalteiler der Ordnung 2) einfach und besitzt unstetige Automorphismen:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f(\alpha) & f(\beta) \\ f(\gamma) & f(\delta) \end{pmatrix},$$

wo f ein unstetiger Automorphismus des Körpers der komplexen Zahlen ist. Bei diesen Automorphismen werden sogar die eingliedrigen Untergruppen zerstört. Das heißt, eine rein gruppentheoretische Deutung der Lieschen Theorie ist für diese und andere derartige Gruppen unmöglich.

Um so überraschender ist es, daß für eine große Klasse von Lieschen Gruppen: den *kompakten halbeinfachen* Gruppen, ein den topologischen Raum definierendes Umgebungssystem auf Grund der Gruppenoperation

[1]) O. Schreier, Abstrakte kontinuierliche Gruppen, Abh. math. Sem. Hamburg 4 (1926), S. 15—32.

allein angegeben werden kann, wie in dieser Arbeit bewiesen wird. Das gelingt durch die Bildung einer Menge $\mathfrak{M}(A)$ von Produkten $G(A)$, welche auf Grund der Halbeinfachkeit eine volle Umgebung der Gruppeneins überdeckt und auf Grund der Kompaktheit bei passendem A in einer beliebig kleinen Umgebung der Eins enthalten ist. Daraus folgt, daß unstetige Automorphismen für diese Gruppen, sowie auch unstetige Isomorphismen zwischen ihnen, unmöglich sind.

Mit derselben Methode ergibt sich auch, daß alle in einer Umgebung der Eins beschränkten Darstellungen (insbesondere alle unitären Darstellungen) der halbeinfachen Lieschen Gruppen stetig (und damit bekanntlich auch durch infinitesimale Transformationen erzeugbar [2]), also analytisch) sind. Dieser Satz stellt für halbeinfache Gruppen eine Verschärfung eines Ergebnisses von J. von Neumann dar, der gefunden hat, daß bei einer Darstellung einer linearen Gruppe durch lineare Transformationen die Schwankung in der Umgebung der Einheit entweder 0 oder $\geqq 1$ ist [3]). Nach dem hier bewiesenen Satz ist die Schwankung bei halbeinfachen Gruppen entweder 0 oder ∞. Daß sie tatsächlich ∞ sein kann, zeigt wieder das obige v. Neumannsche Beispiel.

Schließlich wird bewiesen, daß die „einfachen Lieschen Gruppen", welche keine Lieschen Normalteiler außer sich selbst besitzen, überhaupt keine Normalteiler außer sich selbst und diskreten Zentrumsteilern haben

---

[2]) Siehe J. von Neumann, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 3—42. Es möge an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß der in Abschnitt V der erwähnten Arbeit enthaltene Beweis dafür, daß eine stetige Darstellung einer Lieschen Gruppe differenzierbar ist und von infinitesimalen Transformationen erzeugt wird, einfacher folgendermaßen geführt werden kann: Man beschränke sich zunächst auf einen eingliedrigen Untergruppenkeim e^{At} in $\mathfrak{G}$ in einer solchen Umgebung der Einheit, daß die darstellenden Matrizes eindeutig in der Form $e^B = C$ geschrieben werden können, wo $B = \log C$ sich nur wenig von der Nullmatrix unterscheidet. Wird dann das Gruppenelement e^A durch e^B dargestellt, so kann die Quadratwurzel $e^{\frac{1}{2}A}$ nur durch $e^{\frac{1}{2}B}$ dargestellt werden. Ebenso wird $e^{\frac{1}{2^m}A}$ durch $e^{\frac{1}{2^m}B}$ und daher auch $e^{\frac{a}{2^m}A}$ durch $e^{\frac{a}{2^m}B}$ dargestellt. Auf Grund der Stetigkeit der Darstellung folgt nun, daß e^{At} durch e^{Bt} dargestellt wird. — Ist nun die Gruppe $\mathfrak{G}$ n-gliedrig, so kann man sie aus n eingliedrigen Untergruppen $e^{A_\nu t}$ in der Weise erzeugen, daß jedes Gruppenelement einer Umgebung der Eins eindeutig als Produkt

$$e^{A_1 t}\, e^{A_2 t} \ldots e^{A_n t}$$

erscheint. Die darstellende Matrix

$$e^{B_1 t}\, e^{B_2 t} \ldots e^{B_n t}$$

hängt dann analytisch von den Parametern $t_1, \ldots, t_n$ ab.

[3]) J. von Neumann, S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1927, S. 76—90. Die Schranke 1 läßt sich genau zu 2 verschärfen.

können. Ein entsprechender Satz gilt für halbeinfache Liesche Gruppen jedoch lohnt es sich nicht, darauf näher einzugehen.

Ich erinnere zunächst an einige Grundbegriffe der Lieschen Theorie der n-gliedrigen kontinuierlichen Gruppen.

Jede n-gliedrige Liesche Gruppe wird erzeugt durch eine Umgebung der Gruppeneins (einen „Gruppenkeim" nach Schreier), welche durch Einführung von „kanonischen Parametern" derart auf eine n-dimensionale Euklidische Vollkugel topologisch abgebildet werden kann, daß die Strahlen durch den Kugelmittelpunkt den eingliedrigen Untergruppen (des Gruppenkeims) entsprechen. Die Vektoren im Mittelpunkt entsprechen dann den infinitesimalen Transformationen der Gruppe. Im folgenden unterscheiden wir nicht zwischen den Gruppenelementen und den ihnen entsprechenden Punkten der Vollkugel und ebensowenig zwischen den infinitesimalen Transformationen und den ihnen entsprechenden Vektoren.

Die Transformation $A \to BAB^{-1}$ führt die eingliedrigen Untergruppen wieder in ebensolche und daher die infinitesimalen Transformationen J wieder in ebensolche BJB^{-1} über. Die infinitesimalen Transformationen werden dabei linear transformiert: Diese linearen Transformationen des Vektorkörpers bilden die „adjungierte Gruppe". Einer infinitesimalen Transformation K der ursprünglichen Gruppe entspricht dabei auch eine infinitesimale Transformation der adjungierten Gruppe, welche den Vektor J in einen Vektor $[KJ]$ überführt, welcher bilinear von J und K abhängt.

Einer m-gliedrigen Untergruppe $\mathfrak{H}$ der n-gliedrigen Gruppe $\mathfrak{G}$ entspricht beim Übergang zu den infinitesimalen Transformationen ein (den Mittelpunkt enthaltender) m-dimensionaler Teilraum des n-dimensionalen Vektorraumes, welcher mit J und K auch $[KJ]$ enthält, und jeder solche Teilraum definiert im Kleinen, d. h. im Gruppenkeim, auch eine solche Untergruppe $\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so enthält der ihm entsprechende Teilraum mit J auch $[KJ]$, wo K eine beliebige infinitesimale Transformation von $\mathfrak{G}$ ist, oder was dasselbe ist, der Teilraum wird durch die adjungierte Gruppe in sich transformiert.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *einfach* (im Lieschen Sinn), wenn sie keinen Lieschen Normalteiler außer sich selbst (und wenn man will der Einheitsgruppe) enthält[4]), oder, was dasselbe ist, wenn ihr Vektorkörper keinen

[4]) Im gruppentheoretischen Sinn braucht die Gruppe nicht einfach zu sein, denn sie kann diskrete Normalteiler enthalten. Sonstige abgeschlossene Normalteiler besitzt sie nicht, denn nach einem Satz von E. Cartan (Mém. Sci. math. 42 (1930), S. 25) setzen alle abgeschlossenen Untergruppen einer Lieschen Gruppe sich zusammen aus einer Lieschen Untergruppe und einer diskreten Menge von Nebenklassen dieser Lieschen Untergruppe.

bei der adjungierten Gruppe invarianten echten linearen Teilraum enthält. Sie heißt *auflösbar*, wenn es eine Kette von Lieschen Normalteilern mit Abelschen Faktorgruppen gibt, die mit $\mathfrak{G}$ anfängt, und mit der Einsgruppe endigt. Sie heißt *halbeinfach*, wenn sie keinen auflösbaren Lieschen Normalteiler (außer der Einsgruppe) besitzt.

Die eingliedrigen einfachen Lieschen Gruppen sind Abelsch; alle übrigen einfachen Lieschen Gruppen sind nichtabelsch und können höchstens ein diskretes Zentrum besitzen. — Eine halbeinfache Liesche Gruppe ist im Kleinen direktes Produkt von (mehr als eingliedrigen) einfachen Lieschen Gruppen [5]).

Es sei nun $\mathfrak{G}$ eine n-gliedrige kontinuierliche Gruppe mit diskretem Zentrum, A ein beliebiges Nicht-Zentrumselement und $\mathfrak{M}(A)$ die Gesamtheit aller Produkte

$$G(A) = \prod_1^n C_\nu (B_\nu A B_\nu^{-1} A^{-1}) C_\nu^{-1},$$

wo die B_ν und C_ν die ganze Gruppe durchlaufen. Dann wird behauptet:

1. *Die Menge $\mathfrak{M}$ ist bei passender Wahl von A in einer beliebig kleinen Umgebung der Eins enthalten, falls $\mathfrak{G}$ kompakt ist.*

2. *Die Menge $\mathfrak{M}$ enthält immer eine volle Umgebung der Eins, falls $\mathfrak{G}$ eine mehr als eingliedrige „einfache Liesche Gruppe" ist.*

Beweis 1. Es sei $U(1)$ eine Umgebung der Eins und $A_1, A_2, \ldots$ eine zu 1 konvergente Folge von Gruppenelementen. Wir behaupten, daß es ein A_μ in der Folge gibt, so daß $\mathfrak{M}(A_\mu)$ in $U(1)$ enthalten ist. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es zu jedem A_μ ein

$$G_\mu = \prod_1^n C_{\nu\mu} (B_{\nu\mu} A_\mu B_{\nu\mu}^{-1} A_\mu^{-1}) C_{\nu\mu}^{-1}$$

außerhalb $U(1)$. Aus den Folgen $C_{\nu\mu}$ und $B_{\nu\mu}$ können wir für alle ν gleichzeitig konvergente Teilfolgen $C_{\nu u} \to C_\nu$ und $B_{\nu\mu} \to B_\nu$ auswählen. Dann folgt wegen $\lim A_\mu = 1$:

$$\lim G_\mu = \prod_1^n C_\nu (B_\nu B_\nu^{-1}) C_\nu^{-1} = 1,$$

also müßten doch unendlich viele G_μ in $U(1)$ liegen, entgegen der Annahme.

Beweis 2. Da A kein Zentrumselement ist, gibt es ein B mit $BAB^{-1} \neq A$. Läßt man dieses B eine eingliedrige Untergruppe durchlaufen: $B = B_t$, wo die „Zeit" t ein reeller Parameter und $B_0 = 1$ ist, so durchläuft $B_t A B_t^{-1}$ einen von A ausgehenden Weg, der den Anfangs-

[5]) Siehe E. Cartan, Thèse de doctorat. Paris 1894. S. 53.

punkt A mit einer von Null verschiedenen Geschwindigkeit verläßt[6]). Also wird der Punkt $A_t = B_t A B_t^{-1} A^{-1}$ die Eins auch mit einer von Null verschiedenen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ verlassen.

Der Vektor $\mathfrak{v}$ und seine Transformierten bei der adjungierten Gruppe $C\mathfrak{v}C^{-1}$ bilden ein System von Vektoren, unter denen n linear-unabhängige vorkommen müssen; denn sonst würden sie einen linearen Raum von weniger als n Dimensionen aufspannen, der bei der adjungierten Gruppe invariant bliebe, also ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ wäre, was der vorausgesetzten Einfachheit von $\mathfrak{G}$ widerspricht. Es gibt also n linear-unabhängige Vektoren

$$C_1\mathfrak{v}C_1^{-1},\ C_2\mathfrak{v}C_2^{-1},\ \ldots,\ C_n\mathfrak{v}C_n^{-1},$$

die Geschwindigkeitsvektoren der Gruppenelemente

$$C_1 A_t C_1^{-1},\ C_2 A_t C_2^{-1},\ \ldots,\ C_n A_t C_n^{-1}$$

für $t = 0$. Bildet man nun das Produkt

$$G(t_1, \ldots, t_n) = (C_1 A_{t_1} C_1^{-1})(C_2 A_{t_2} C_2^{-1}) \ldots (C_n A_{t_n} C_n^{-1}),$$

dessen kanonische Parameter $p_1, \ldots, p_n$ stetig differenzierbare Funktionen von $t_1, \ldots, t_n$ sind, so gehört dieses Produkt auf jeden Fall der Menge $\mathfrak{M}(A)$ an. Aus der linearen Unabhängigkeit der Geschwindigkeitsvektoren folgt aber, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(p_1, \ldots, p_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}$$

von Null verschieden ist. Also überdecken die Gruppenelemente $G(t_1, \ldots, t_n)$ die volle Umgebung der Eins, womit 2. bewiesen ist.

Es sei noch bemerkt, daß die Behauptung 2. laut Beweis auch dann noch gilt, wenn die B_ν und C_ν in der Definition von $\mathfrak{M}(A)$ auf eine Umgebung der Eins beschränkt werden.

Aus 2. folgt zunächst: *Ist $\mathfrak{G}$ eine „einfache Liesche Gruppe", so ist die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ nach dem Zentrum $\mathfrak{Z}$ eine einfache Gruppe im gruppentheoretischen Sinn.* Denn wenn ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ außer Zentrumselementen noch ein Element A enthält, so enthält er auch alle Produkte $G(A)$, also eine Umgebung der Eins, also die ganze Gruppe.

Aus 1. und 2. folgt weiter, daß in einer kompakten einfachen Lieschen Gruppe $\mathfrak{G}$ die rein gruppentheoretisch definierten Mengen $\mathfrak{M}(A)$ als „Umgebungen" der Eins brauchbar sind, welche zwar keine offenen Mengen sind, aber nichtsdestoweniger die Eins im topologischen Sinn „definieren". Ist H ein beliebiges Gruppenelement, so sind die Mengen $H \cdot \mathfrak{M}(A)$

[6]) Wäre die Anfangsgeschwindigkeit Null, so wäre $B_t A B_t^{-1}$ konstant $= A$, wie aus den Differentialgleichungen der adjungierten Gruppe sofort folgt.

im gleichen Sinn Umgebungen von H. Mit Hilfe dieses Umgebungssystems kann man alle topologischen Grundbegriffe (Limes, Häufungspunkt usw.) in gewohnter Weise definieren.

Daraus folgt nunmehr, daß *jeder Automorphismus einer kompakten einfachen mehrgliedrigen Lieschen Gruppe ein stetiger Automorphismus ist.* Bemerkt man noch, daß die Eigenschaften 1. und 2. erhalten bleiben, wenn man die in der Definition der Mengen $\mathfrak{M}(A)$ benutzte Zahl n durch eine größere ersetzt, so beweist man in derselben Weise, daß jeder Isomorphismus, der eine kompakte einfache nichtabelsche Liesche Gruppe in eine eben solche überführt, ein stetiger Isomorphismus ist. *Mithin können zwei kompakte einfache Liesche Gruppen nur dann isomorph sein, wenn sie stetig isomorph sind.*

Unser Hauptergebnis: die Angabe eines rein gruppentheoretisch definierten Umgebungssystems, ist nunmehr leicht auf kompakte halbeinfache Gruppen auszudehnen. Eine solche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist im Kleinen direktes Produkt von einfachen Lieschen Gruppen $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \ldots \times \mathfrak{H}_r$. Im Großen braucht das Produkt nicht direkt zu sein, sondern jeder Faktor kann mit dem Produkt der anderen eine diskrete endliche Gruppe gemeinsam haben. Bildet man aber die Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach dem Zentrum $\mathfrak{Z}$, so wird diese genau das direkte Produkt von einfachen Faktorgruppen $\mathfrak{H}_\nu/\mathfrak{Z}_\nu$. Diese sind auch gruppentheoretisch einfach, also nach einem bekannten gruppentheoretischen Satz bis auf Zentralisomorphie eindeutig bestimmt. Da das Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ nur die Eins enthält, sind die Faktoren sogar ganz eindeutig bestimmt. Macht man nun die Faktorbildung nach $\mathfrak{Z}$ wieder rückgängig, so folgt, daß auch $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r$ durch $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt sind. Eine Umgebung der Eins in $\mathfrak{G}$ ist nun das direkte Produkt von Umgebungen der Eins in $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_r$. Also sind auch in $\mathfrak{G}$ die Umgebungen rein gruppentheoretisch bestimmt.

Ist eine Darstellung einer Umgebung der Eins einer halbeinfachen Lieschen Gruppe mit beschränkten Matrixelementen gegeben, so ist diese Darstellung notwendig stetig.

Es genügt, den Beweis für den Fall einer einfachen Lieschen Gruppe zu führen. Die Darstellung kann dann in der Umgebung der Gruppeneins als treu (d. h. eineindeutig) angenommen werden, da sie sonst die Einsdarstellung wäre.

In der Menge der darstellenden Matrizes kann die Einheitsmatrix nicht isoliert sein, denn sonst müßten alle Matrizes der Darstellung isoliert sein und die Menge wäre nur abzählbar. Es gibt also eine Matrix A, Darstellung von A, die sich von der Einheitsmatrix um beliebig wenig unterscheidet. Bildet man dann wie oben die Gruppenelemente $G(A)$, wo-

bei man die B_ν und C_ν auf so kleine Umgebungen der Eins beschränkt, daß alle in $G(A)$ vorkommenden Produkte und Inversen noch in der betrachteten Umgebung der Eins enthalten sind, so unterscheidet sich die einem solchen Gruppenelement $G(A)$ zugeordnete Matrix

$$G(A) = \prod_1^n C_\nu (B_\nu A B_\nu^{-1} A_\nu^{-1}) C_\nu^{-1}$$

wegen der Beschränktheit der B_ν und C_ν und ihrer Inversen nur um beliebig wenig von der Einheitsmatrix. Zu den $G(A)$ gehören aber nach dem obigen Satz 2. alle Elemente in einer Umgebung der Gruppeneins. Daraus folgt die Stetigkeit der Darstellung an dieser Stelle und somit die Stetigkeit überhaupt.

(Eingegangen am 31. Mai 1932.)

A One-Sided Tauberian Theorem.

By

Norbert Wiener in Belmont (Mass. U. S. A.).

The present paper is the outcome of an attempt to apply the author's methods[1]) to a problem suggested to the author by Miss M. L. Cartwright. The theorem to be proved is the following:

Theorem I. *Let*

$$\lim_{r\to 0} \sum_0^\infty a_n \exp(-nre^{i\vartheta}) = s \qquad (-\pi/2 < \vartheta < \pi/2). \tag{1}$$

Let every quantity na_n *lie in the region*

$$-\frac{\pi}{2} < -\alpha \leqq \arg(na_n + B) \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

where α *and* B *are independent of* n. *Let*

$$s_n = \sum_0^n a_n = O(n^m) \tag{3}$$

for some finite m. *Then*

$$\sum_0^\infty a_n = s. \tag{4}$$

There is obviously no restriction in the assumption that $a_0 = 0$. We begin by writing

$$s_{[u]} = s(u), \tag{5}$$

and putting (1) in the form

$$\lim_{r\to 0} re^{i\vartheta} \int_0^\infty s(u) \exp(-ure^{i\vartheta})\, du = s, \tag{6}$$

which we can do because of (3). If (3) holds,

$$\begin{aligned} & r\int_0^\infty |s(u)|\, |\exp(-ure^{i\vartheta})|\, du \\ & \leqq Kr\int_0^\infty u^m \exp(-ur\cos\vartheta)\, du \\ & = Km!/(\cos\vartheta)^{m+1} r^m. \end{aligned} \tag{7}$$

[1]) Tauberian Theorems, Annals of Mathematics **33** (1932), pp. 1—100.

Now let us introduce the auxiliary function

$$V(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\Gamma(1-i\xi)} e^{\vartheta\xi} v^{-i\xi-1}\, d\xi. \tag{8}$$

It is easy to verify that for any k, $V(e^v)\, e^{kv}$ is the Fourier transform of a function of L_2, and hence belongs to L_2. This depends on the fact that $e^{-\xi^2/2}/\Gamma(1-i\xi)$ is entire and belongs to L_2 in the real part of ξ for every imaginary part of ξ. From this, it follows by the Schwarz inequality, since

$$\Big|\int_a^{\pm\infty} V(e^v) e^{lv}\, dv\Big| \leqq \sqrt{\int_a^{\pm\infty} [V(e^v) e^{kv}]^2\, dv \int_a^{\pm\infty} e^{(2l-2k)v}\, dv} \tag{9}$$

that $V(e^v) e^{lv}$ belongs to L_1, from which we may deduce that $V(v) v^{\pm\nu}$ is always absolutely integrable over $(0,\infty)$. Hence, by (7), the double integral

$$v\int_0^{\infty} V(vr)\, dr\, re^{i\vartheta}\int_0^{\infty} s(u) \exp(-ure^{i\vartheta})\, du \tag{10}$$

is absolutely convergent, and may be written

$$e^{i\vartheta}\int_0^{\infty} s(u)\, du \int_0^{\infty} vrV(vr) \exp(-ure^{i\vartheta})\, dr. \tag{11}$$

Thus by (6),

$$\lim_{v\to\infty} e^{i\vartheta}\int_0^{\infty} s(u)\, du \int_0^{\infty} vrV(vr) \exp(-ure^{i\vartheta})\, dr = s\int_0^{\infty} V(r)\, dr = s, \tag{12}$$

since

$$\int_0^{\infty} V(r)\, dr = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\Gamma(1-i\xi)} e^{\vartheta\xi} e^{-iy\xi}\, d\xi = \frac{e^0}{\Gamma(1)} = 1 \tag{13}$$

by the Fourier integral theorem. Now,

$$\begin{aligned}
&e^{i\vartheta}\int_0^{\infty} vr\, V(vr) \exp(-ure^{i\vartheta})\, dr \\
&= \frac{e^{i\vartheta}}{2\pi}\int_0^{\infty} vr \exp(-ure^{i\vartheta})\, dr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\Gamma(1-i\xi)} e^{\vartheta\xi} (vr)^{-i\xi-1}\, d\xi \\
&= \frac{e^{i\vartheta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\Gamma(1-i\xi)} e^{\vartheta\xi}\, d\xi \int_0^{\infty} (vr)^{-i\xi} \exp(-ure^{i\vartheta})\, dr \\
&= \frac{1}{2\pi v}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\Gamma(1-i\xi)}\, d\xi \int_0^{\infty} \varrho^{-i\xi} e^{-\frac{u}{v}\varrho}\, d\varrho \qquad (14) \\
&= \frac{1}{2\pi v}\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{u}{v}\Big)^{i\xi-1} e^{-\xi^2/2}\, d\xi = \frac{1}{2\pi u}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\log\frac{u}{v} - \xi^2/2}\, d\xi \\
&= \frac{e^{-(\log\frac{u}{v})/2}}{u\sqrt{2\pi}} = \frac{\Big(\frac{u}{v}\Big)^{-1-\frac{\log u/v}{2}}}{v\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

Thus (12) becomes:

$$\lim_{v\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,v}\int_0^\infty s(u)\left(\frac{u}{v}\right)^{-1-\frac{\log u/v}{2}}du = s. \tag{15}$$

This may again be written

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum a_n K(n\lambda) = s \tag{16}$$

where

$$K(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\log w}^\infty e^{-x^2/2}dx. \tag{17}$$

Let us now write

$$a_n = c_n e^{i\alpha} + d_n e^{-i\alpha}; \qquad s = p e^{i\alpha} + q e^{-i\alpha}, \tag{18}$$

where all the c_n's and d_n's are real, as well as p and q. It is easy to verify that $n c_n$ and $n d_n$ are bounded below, and that

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum c_n K(n\lambda) = q; \qquad \lim_{\lambda\to 0}\sum d_n K(n\lambda) = q. \tag{19}$$

Thus by Theorem XIII of the author's previous paper, in view of the fact that

$$K(0) = 1 \tag{20}$$

and

$$\int_0^\infty K(w)\,w^{iu-1}dw = e^{-u^2/2} \neq 0 \tag{21}$$

for any real argument, it follows that

$$\sum c_n = p; \qquad \sum d_n = q; \tag{22}$$

and by (18), that

$$\sum_0^\infty a_n = s. \tag{4}$$

(Eingegangen am 28. Mai 1932.)

Über die allgemeinen Integrale von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion und von Systemen solcher Gleichungen, die Integrale im Sinne von S. Lie zulassen.

Von

G. Pfeiffer in Kiew.

Erster Teil[1]).

Nehmen wir an, daß die Relation

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q, \varphi_{q+1}) = 0, \tag{1}$$

$$\varphi_i = \varphi_i(z, x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_h), \; z = x_0 \tag{2}$$

($\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}$ unabhängige Funktionen hinsichtlich der Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $c_1, c_2, \ldots, c_h$ wesentliche willkürliche Konstanten, Φ eine willkürliche Funktion der Argumente) ein allgemeines Integral einer Gleichung

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \tag{3}$$

oder eines Systems von m Gleichungen

$$f_i(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

ist.

Wenn man die Konstanten (5) $c_1, c_2, \ldots, c_h$ als Parameter betrachtet, so gibt die Beziehung (1), unter einer Voraussetzung, welche die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beschränkt, nämlich

$$u = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots, x_{q-1}, x_q)} \not\equiv 0, \tag{6}$$

das allgemeine Integral des Systems von $n - q$ linearen partiellen Differentialgleichungen:

---

[1]) G. Pfeiffer, Sur les intégrales des équations et des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue, qui possèdent les intégrales de S. Lie, C. R. 189 (1929), pp. 1228—1230.

$$p_k = \alpha_q^k p_q + \alpha_{q-1}^k p_{q-1} + \ldots + \alpha_1^k p_1 - \alpha_0^k \quad (k = q+1, q+2, \ldots, n);$$
$$= F_k(x_0, x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_h, p_1, \ldots, p_q)$$

$$\alpha_j^k = \frac{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, \ldots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots, x_q)}}{\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q, \varphi_{q+1})}{D(x_0, x_1, \ldots, x_{q-1}, x_q)}} \quad (j = 0, 1, \ldots, q). \tag{8}$$

Die Gleichung (3) und das System (4) werden durch Elimination der Konstanten (5), deren Zahl

$$h < n - q, \tag{9}$$

aus dem Systeme der linearen Gleichungen (7) erhalten.

Wenn zugelassen wird, daß in dem Systeme (7) h Gleichungen nach den Konstanten (5) auflösbar sind (in diesem Falle hält man das Integral (1) für allgemein), so kommen wir zu einer Gleichung (3), wenn $h = n - q - 1$ ist, und zu einem Systeme (4), wenn $h = n - q - m$ ist.

Wir sehen, daß es notwendig ist, die Bedingungen, unter welchen die Relation (1) das allgemeine Integral einer Gleichung (3) oder eines Systems (4) ist, gründlich zu studieren. Diese Bedingungen bestehen darin, daß h Gleichungen des Systems (7) nach den Konstanten (5) auflösbar sind, d. h. in

$$\frac{D(F_{\tau_1}, F_{\tau_2}, \ldots, F_{\tau_h})}{D(c_1, c_2, \ldots, c_h)} \not\equiv 0, \tag{10}$$

$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ Zahlen aus der Reihe $q+1, q+2, \ldots, n$.

Wir wollen nun die umgekehrte Frage studieren, unter welchen Umständen keine Kombination der h Gleichungen des Systems (7) nach den Konstanten (5) auflösbar ist, anders gesagt, unter welchen Umständen alle Determinanten

$$\begin{vmatrix}
(\alpha_q^{\tau_1})_{c_1} p_q + (\alpha_{q-1}^{\tau_1})_{c_1} p_{q-1} + \ldots + (\alpha_0^{\tau_1})_{c_1} p_0, \ldots, (\alpha_q^{\tau_1})_{c_\nu} p_q + (\alpha_{q-1}^{\tau_1})_{c_\nu} p_{q-1} + \ldots \\
\quad + (\alpha_0^{\tau_1})_{c_\nu} p_0, \ldots, (\alpha_q^{\tau_1})_{c_h} p_q + (\alpha_{q-1}^{\tau_1})_{c_h} p_{q-1} + \ldots + (\alpha_0^{\tau_1})_{c_h} p_0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\alpha_q^{\tau_\nu})_{c_1} p_q + (\alpha_{q-1}^{\tau_\nu})_{c_1} p_{q-1} + \ldots + (\alpha_0^{\tau_\nu})_{c_1} p_0, \ldots, (\alpha_q^{\tau_\nu})_{c_\nu} p_q + (\alpha_{q-1}^{\tau_\nu})_{c_\nu} p_{q-1} + \ldots \\
\quad + (\alpha_0^{\tau_\nu})_{c_\nu} p_0, \ldots, (\alpha_q^{\tau_\nu})_{c_h} p_q + (\alpha_{q-1}^{\tau_\nu})_{c_h} p_{q-1} + \ldots + (\alpha_0^{\tau_\nu})_{c_h} p_0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\alpha_q^{\tau_h})_{c_1} p_q + (\alpha_{q-1}^{\tau_h})_{c_1} p_{q-1} + \ldots + (\alpha_0^{\tau_h})_{c_1} p_0, \ldots, (\alpha_q^{\tau_h})_{c_\nu} p_q + (\alpha_{q-1}^{\tau_h})_{c_\nu} p_{q-1} + \ldots \\
\quad + (\alpha_0^{\tau_h})_{c_\nu} p_0, \ldots, (\alpha_q^{\tau_h})_{c_h} p_q + (\alpha_{q-1}^{\tau_h})_{c_h} p_{q-1} + \ldots + (\alpha_0^{\tau_h})_{c_h} p_0
\end{vmatrix}^{2)}$$

($\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ Zahlen der Reihe $q+1, q+2, \ldots, n$; $p_0 = -1$)

identisch gleich Null sind.

---

[2]) Unter dem Symbole $(\alpha_j^k)_c$ verstehen wir die Ableitung des durch (8) gegebenen Koeffizienten α_j^k des Systems (7) nach dem Parameter c.

Um die Untersuchung in größter Allgemeinheit zu führen, wollen wir bei der Determinante

$$(12)\qquad \left|\begin{array}{l} (\alpha_q^{\tau_1})_{c_1} p_q + (\alpha_{q-1}^{\tau_1})_{c_1} p_{q-1} + \cdots + (\alpha_0^{\tau_1})_{c_1} p_0, \ldots, (\alpha_q^{\tau_1})_{c_\nu} p_q \\ \qquad + (\alpha_{q-1}^{\tau_1})_{c_\nu} p_{q-1} + \cdots + (\alpha_0^{\tau_1})_{c_\nu} p_0 \\ (\alpha_q^{\tau_2})_{c_1} p_q + (\alpha_{q-1}^{\tau_2})_{c_1} p_{q-1} + \cdots + (\alpha_0^{\tau_2})_{c_1} p_0, \ldots, (\alpha_q^{\tau_2})_{c_\nu} p_q \\ \qquad + (\alpha_{q-1}^{\tau_2})_{c_\nu} p_{q-1} + \cdots + (\alpha_0^{\tau_2})_{c_\nu} p_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\alpha_q^{\tau_\nu})_{c_1} p_q + (\alpha_{q-1}^{\tau_\nu})_{c_1} p_{q-1} + \cdots + (\alpha_0^{\tau_\nu})_{c_1} p_0, \ldots, (\alpha_q^{\tau_\nu})_{c_\nu} p_q \\ \qquad + (\alpha_{q-1}^{\tau_\nu})_{c_\nu} p_{q-1} + \cdots + (\alpha_0^{\tau_\nu})_{c_\nu} p_0 \end{array}\right|$$

($\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ Zahlen der Reihe $q+1, q+2, \ldots, n$; $p_0 = -1$)

stehen bleiben; alsdann werden die Konstanten $c_{\nu+1}, \ldots, c_h$ als Parameter angesehen.

Die Determinante (12) besteht aus der Summe der Determinanten

$$(13)\qquad \left|\begin{array}{l} (\alpha_{j_1}^{\tau_1})_{c_1}, (\alpha_{j_2}^{\tau_1})_{c_2}, \ldots, (\alpha_{j_\nu}^{\tau_1})_{c_\nu} \\ (\alpha_{j_1}^{\tau_2})_{c_1}, (\alpha_{j_2}^{\tau_2})_{c_2}, \ldots, (\alpha_{j_\nu}^{\tau_2})_{c_\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\alpha_{j_1}^{\tau_\nu})_{c_1}, (\alpha_{j_2}^{\tau_\nu})_{c_2}, \ldots, (\alpha_{j_\nu}^{\tau_\nu})_{c_\nu} \end{array}\right| p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_\nu}$$

($j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, q$),

deren Zahl $\mathfrak{V}_{q+1}^{\nu}$ die Anzahl der Variationen der $q+1$ Elemente $0, 1, \ldots, q$ zu je ν mit Wiederholung ist.

Nach der Vereinigung der Glieder mit denselben Produkten

$$(14)\qquad p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_\nu}$$

schreiben wir die Determinante (12) in der Form

$$(15)\qquad \sum \left(\left(\left| \begin{array}{l} (\alpha_{j_1}^{\tau_1})_{c_1}, (\alpha_{j_2}^{\tau_1})_{c_2}, \ldots, (\alpha_{j_\nu}^{\tau_1})_{c_\nu} \\ (\alpha_{j_1}^{\tau_2})_{c_1}, (\alpha_{j_2}^{\tau_2})_{c_2}, \ldots, (\alpha_{j_\nu}^{\tau_2})_{c_\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\alpha_{j_1}^{\tau_\nu})_{c_1}, (\alpha_{j_2}^{\tau_\nu})_{c_2}, \ldots, (\alpha_{j_\nu}^{\tau_\nu})_{c_\nu} \end{array} \right| \right) \right) p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_\nu}.$$

Die Summe $\sum$ erstreckt sich auf die $\mathfrak{C}_{q+1}^{\nu}$ Kombinationen von $q+1$ Elementen $0, 1, \ldots, q$ zu je ν mit Wiederholung, wobei das Symbol:

$$(16)\qquad ((|\quad\quad|))$$

die Summe der Determinanten $|\ldots|$ bedeutet, die für alle Permutationen der ν Elemente:

$$(17)\qquad j_1, j_2, \ldots, j_\nu$$

mit Wiederholung gebildet sind.

Die Differentialquotienten

$$18)\quad (\alpha_j^{\tau})_c = \frac{1}{u^2}\sum_{\lambda=1}^{q+1}\left\{\frac{D\left(\varphi_1,\ldots,\varphi_{\lambda-1},\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial c},\varphi_{\lambda+1},\ldots,\varphi_{q+1}\right)}{D(x_0,\ldots,x_{j-1},x_\tau,x_{j+1},\ldots,x_q)}\cdot\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_q,\varphi_{q+1})}{D(x_0,x_1,\ldots,x_{q-1},x_q)}\right.$$

$$\left.-\frac{D\left(\varphi_1,\ldots,\varphi_{\lambda-1},\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial c},\varphi_{\lambda+1},\ldots,\varphi_{q+1}\right)}{D(x_0,x_1,\ldots,x_{q-1},x_q)}\cdot\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_q,\varphi_{q+1})}{D(x_0,\ldots,x_{j-1},x_\tau,x_{j+1},\ldots x_q)}\right\}$$

findet man, wenn man aus der Theorie der Determinanten die Formel

$$(19)\qquad A_1^{(1)}A_2^{(2)} - A_1^{(2)}A_2^{(1)} = A\,A_{1,2}^{1,2}\ ^{3})$$

auf die Matrix

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_j}, & \frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial c}\right)}{\partial x_j}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}, & \ldots, \frac{\partial\varphi_{\lambda-1}}{\partial x_j}, \frac{\partial\varphi_{\lambda+1}}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial x_j}\\
\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_\tau}, & \frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial c}\right)}{\partial x_\tau}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_\tau}, & \ldots, \frac{\partial\varphi_{\lambda-1}}{\partial x_\tau}, \frac{\partial\varphi_{\lambda+1}}{\partial x_\tau}, \ldots, \frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial x_\tau}\\
\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_0}, & \frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial c}\right)}{\partial x_0}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0}, & \ldots, \frac{\partial\varphi_{\lambda-1}}{\partial x_0}, \frac{\partial\varphi_{\lambda+1}}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial x_0}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_{j-1}}, & \frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial c}\right)}{\partial x_{j-1}}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{j-1}}, & \ldots, \frac{\partial\varphi_{\lambda-1}}{\partial x_{j-1}}, \frac{\partial\varphi_{\lambda+1}}{\partial x_{j-1}}, \ldots, \frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial x_{j-1}}\\
\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_{j+1}}, & \frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial c}\right)}{\partial x_{j+1}}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{j+1}}, & \ldots, \frac{\partial\varphi_{\lambda-1}}{\partial x_{j+1}}, \frac{\partial\varphi_{\lambda+1}}{\partial x_{j+1}}, \ldots, \frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial x_{j+1}}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_q}, & \frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial c}\right)}{\partial x_q}, & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_q}, & \ldots, \frac{\partial\varphi_{\lambda-1}}{\partial x_q}, \frac{\partial\varphi_{\lambda+1}}{\partial x_q}, \ldots, \frac{\partial\varphi_{q+1}}{\partial x_q}
\end{array}$$

anwendet:

$$20)\quad (\alpha_j^{\tau})_c = \frac{1}{u^2}\sum_{\lambda=1}^{q+1}(-1)^{\lambda+j-1}\frac{D(\varphi_1,\ldots,\varphi_{\lambda-1},\varphi_{\lambda+1},\ldots,\varphi_{q+1})}{D(x_0,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_q)}\cdot\frac{D\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial c},\varphi_1,\ldots,\varphi_{q+1}\right)}{D(x_\tau,x_0,\ldots,x_q)}$$

$$= \frac{1}{u^2}\sum_{\lambda=1}^{q+1}E_j^\lambda\frac{D\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial c},\varphi_1,\ldots,\varphi_{q+1}\right)}{D(x_\tau,x_0,\ldots,x_q)} = \frac{1}{u^2}\sum_{\lambda=1}^{q+1}E_j^\lambda G_{\tau}^{\lambda}.$$

---

3) H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Braunschweig 1898, 1, S. 115.

Hier sind

$$E_j^{\lambda} = (-1)^{\lambda+j-1} \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-1}, \varphi_{\lambda+1}, \ldots, \varphi_{q+1})}{D(x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_q)} \tag{21}$$

die Minoren der Elemente $\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_j}$ der durch (6) gegebenen Determinante u und

$$G_{\substack{\tau \\ c}}^{\lambda} = \frac{D\left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial c}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{q+1}\right)}{D(x_\tau, x_0, \ldots, x_q)}. \tag{22}$$

Nach der letzten Zeile (20) sehen die zu addierenden Determinanten (13) der Determinante (12) so aus:

$$\frac{1}{u^{2\nu}} \begin{vmatrix} \sum_{\lambda_1=1}^{q+1} E_{j_1}^{\lambda_1} G_{\substack{\tau_1 \\ c_1}}^{\lambda_1}, & \sum_{\lambda_2=1}^{q+1} E_{j_2}^{\lambda_2} G_{\substack{\tau_1 \\ c_2}}^{\lambda_2}, & \ldots, & \sum_{\lambda_\nu=1}^{q+1} E_{j_\nu}^{\lambda_\nu} G_{\substack{\tau_1 \\ c_\nu}}^{\lambda_\nu} \\ \sum_{\lambda_1=1}^{q+1} E_{j_1}^{\lambda_1} G_{\substack{\tau_2 \\ c_1}}^{\lambda_1}, & \sum_{\lambda_2=1}^{q+1} E_{j_2}^{\lambda_2} G_{\substack{\tau_2 \\ c_2}}^{\lambda_2}, & \ldots, & \sum_{\lambda_\nu=1}^{q+1} E_{j_\nu}^{\lambda_\nu} G_{\substack{\tau_2 \\ c_\nu}}^{\lambda_\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{\lambda_1=1}^{q+1} E_{j_1}^{\lambda_1} G_{\substack{\tau_\nu \\ c_1}}^{\lambda_1}, & \sum_{\lambda_2=1}^{q+1} E_{j_2}^{\lambda_2} G_{\substack{\tau_\nu \\ c_2}}^{\lambda_2}, & \ldots, & \sum_{\lambda_\nu=1}^{q+1} E_{j_\nu}^{\lambda_\nu} G_{\substack{\tau_\nu \\ c_\nu}}^{\lambda_\nu} \end{vmatrix} p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_\nu} \tag{23}$$

$$= \frac{1}{u^{2\nu}} \sum_{\lambda_1=1}^{q+1} \sum_{\lambda_2=1}^{q+1} \ldots \sum_{\lambda_\nu=1}^{q+1} E_{j_1}^{\lambda_1} E_{j_2}^{\lambda_2} \ldots E_{j_\nu}^{\lambda_\nu} \begin{vmatrix} G_{\substack{\tau_1 \\ c_1}}^{\lambda_1}, & G_{\substack{\tau_1 \\ c_2}}^{\lambda_2}, & \ldots, & G_{\substack{\tau_1 \\ c_\nu}}^{\lambda_\nu} \\ G_{\substack{\tau_2 \\ c_1}}^{\lambda_1}, & G_{\substack{\tau_2 \\ c_2}}^{\tau_2}, & \ldots, & G_{\substack{\tau_2 \\ c_\nu}}^{\lambda_\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{\substack{\tau_\nu \\ c_1}}^{\lambda_1}, & G_{\substack{\tau_\nu \\ c_2}}^{\lambda_2}, & \ldots, & G_{\substack{\tau_\nu \\ c_\nu}}^{\lambda_\nu} \end{vmatrix} p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_\nu}. \tag{24}$$

Wenn wir das Theorem von Sylvester[4]) auf die Matrix

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_q}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\tau_1}}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\tau_2}}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\tau_\nu}} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_q}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{\tau_1}}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{\tau_2}}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{\tau_\nu}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_0}, & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_q}, & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_{\tau_1}}, & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_{\tau_2}}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_{q+1}}{\partial x_{\tau_\nu}} \\ \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial c_1}\right), & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}\right), & \ldots, & \frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}\right), & \frac{\partial}{\partial x_{\tau_1}}\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}\right), & \frac{\partial}{\partial x_{\tau_2}}\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}\right), & \ldots, & \frac{\partial}{\partial x_{\tau_\nu}}\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_\nu}\right), & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda_\nu}}{\partial e_\nu}\right), & \ldots, & \frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_\nu}\right), & \frac{\partial}{\partial x_{\tau_1}}\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_\nu}\right), & \frac{\partial}{\partial x_{\tau_2}}\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_\nu}\right), & \ldots, & \frac{\partial}{\partial x_{\tau_\nu}}\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_\nu}\right) \end{array} \tag{25}$$

[4]) H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Braunschweig 1898, **1**, S. 115—116.

anwenden und für die Determinante A_ν die durch (6) gegebene Determinante u nehmen, bemerken wir, daß die Ausdrücke (24) die Gestalt bekommen:

$$\frac{1}{\nu+1}\sum_{\lambda_1=1}^{q+1}\sum_{\lambda_2=1}^{q+1}\cdots\sum_{\lambda_\nu=1}^{q+1}E_{j_1}^{\lambda_1}E_{j_2}^{\lambda_2}\ldots E_{j_\nu}^{\lambda_\nu}\frac{D\left(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{q+1},\frac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1},\frac{\partial\varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2},\ldots,\frac{\partial\varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_\nu}\right)}{D(x_0,x_1,\ldots,x_q,x_{\tau_1},x_{\tau_2},\ldots,x_{\tau_\nu})}p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_\nu}.$$

Die Determinante (12) bzw. (15) ist

$$(27)\quad \frac{1}{u^{\nu+1}}\sum\sum_{\lambda_1=1}^{q+1}\sum_{\lambda_2=1}^{q+1}\cdots\sum_{\lambda_\nu=1}^{q+1}((E_{j_1}^{\lambda_1}E_{j_2}^{\lambda_2}\ldots E_{j_\nu}^{\lambda_\nu}))\times\frac{D\left(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{q+1},\frac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1},\frac{\partial\varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2},\ldots,\frac{\partial\varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_\nu}\right)}{D(x_0,x_1,\ldots,x_q,x_{\tau_1},x_{\tau_2},\ldots,x_{\tau_\nu})}p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_\nu}.$$

Die Summe $\sum$ erstreckt sich auf $\mathfrak{C}_{q+1}^{\nu}$ Kombinationen von $q+1$ Elementen zu je ν mit Wiederholung; das Symbol (( )) deutet an, daß die Summe der in ihm angezeigten Ausdrücke für alle Permutationen der ν Elemente $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ mit Wiederholung genommen ist.

Wir beachten, daß in der Zeile (27) der Multiplikator

$$(28)\qquad ((E_{j_1}^{\lambda_1}E_{j_2}^{\lambda_2}\ldots E_{j_\nu}^{\lambda_\nu}))$$

für alle Permutationen der ν Elemente $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ mit Wiederholung unverändert bleibt. Deshalb schreiben wir den Ausdruck (27) der Determinante (12) bzw. (15) in folgender Weise:

$$\frac{1}{u^{\nu+1}}\sum S((E_{j_1}^{\lambda_1}E_{j_1}^{\lambda_2}\ldots E_{j_\nu}^{\lambda_\nu}))\left[\left[\frac{D\left(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{q+1},\frac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1},\frac{\partial\varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2},\ldots,\frac{\partial\varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_\nu}\right)}{D(x_0,x_1,\ldots,x_q,x_{\tau_1},x_{\tau_2},\ldots,x_{\tau_\nu})}\right]\right]p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_\nu}.$$

Die Summe $\sum$ erstreckt sich auf $\mathfrak{C}_{q+1}^{\nu}$ Kombinationen $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ von $q+1$ Elementen $0, 1, \ldots, q$ zu je ν mit Wiederholung, die Summe S auf die $\mathfrak{C}_{q+1}^{\nu}$ Kombinationen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ von $q+1$ Elementen $1, 2, \ldots, q+1$ zu je ν mit Wiederholung; das Symbol [[ ]] deutet an, daß die Summe der in ihm angezeigten Ausdrücke für alle Permutationen der ν Elemente $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ mit Wiederholung genommen ist.

Wenn $\nu = h$ ist, verwandelt sich die Determinante (12) in die Determinante (11).

Fordern wir, daß die Determinante (12) identisch gleich Null sei, so bekommen wir $\mathfrak{C}_{q+1}^{\nu} = C_{q+\nu}^{\nu}$ Gleichungen

$$(30)\quad S((E_{j_1}^{\lambda_1}E_{j_2}^{\lambda_2}\ldots E_{j_\nu}^{\lambda_\nu}))\left[\left[\frac{D\left(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{q+1},\frac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1},\frac{\partial\varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2},\ldots,\frac{\partial\varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_\nu}\right)}{D(x_0,x_1,\ldots,x_q,x_{\tau_1},x_{\tau_2},\ldots,x_{\tau_\nu})}\right]\right]=0,$$

die linear und homogen sind in den $\mathfrak{C}^{\nu}_{q+1} = C^{\nu}_{q+\nu}$ Unbekannten

$$\left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\gamma+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_\nu}\right)}{D(x_0, x_2, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_\nu})}\right]\right]. \tag{31}$$

Als Koeffizienten dienen die Ausdrücke (28).

Nehmen wir das System von linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} R_0 &= E_0^1 \xi_1 + E_0^2 \xi_2 + \ldots + E_0^{q+1} \xi_{q+1} = 0, \\ R_1 &= E_1^1 \xi_1 + E_1^2 \xi_2 + \ldots + E_1^{q+1} \xi_{q+1} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_g &= E_g^1 \xi_1 + E_g^2 \xi_2 + \ldots + E_g^{q+1} \xi_{q+1} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_q &= E_q^1 \xi_1 + E_q^2 \xi_2 + \ldots + E_q^{q+1} \xi_{q+1} = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

U_1

Es hat keine eigentliche Auflösung, weil seine Determinante

$$\begin{vmatrix} E_0' & \ldots & E_0^{q+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ E_q' & \ldots & E_q^{q+1} \end{vmatrix} = u^q \tag{33}$$

infolge der Voraussetzung (6) von Null verschieden ist.

Wir konstruieren jetzt aus dem Systeme (32) das System

$$\begin{aligned} R_0^2 = 0,\ R_1 R_0 = 0,\ \ldots,\ R_g R_0 = 0,\ \ldots,\ R_q R_0 = 0, \\ R_1^2 = 0,\ \ldots,\ R_g R_1 = 0,\ \ldots,\ R_q R_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_g^2 = 0,\ \ldots,\ R_q R_g = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ R_q^2 = 0; \end{aligned} \tag{34}$$

U_2

es sind die Gleichungen (32) mit den Multiplikatoren

$$R_0,\ R_1,\ \ldots,\ R_g,\ \ldots,\ R_q \tag{35}$$

multipliziert und die verschiedenen Gleichungen beibehalten.

Die Auflösung des Systems U_2 ist der Auflösung des Systems U_1 äquivalent. In der Tat, wenn in dem System U_2

$$R_g = 0 \tag{36}$$

angenommen wird, verwandelt es sich in das System, welches aus der

Gleichung (36) und den Gleichungen besteht, die aus dem Systeme

$$(37) \qquad R_0 = 0,\ R_1 = 0,\ \ldots,\ R_{g-1} = 0,\ R_{g+1} = 0,\ \ldots,\ R_q = 0$$

in derselben Weise konstruiert werden können, wie das System (34) aus dem System (32). Das Weitergehende ist klar.

Das System U_2 hat keine eigentliche Auflösung, seine Determinante ist von Null verschieden. Davon überzeugt man sich auch nach dem Theoreme von Scholz-Hunyady [5]).

Indem wir die Gleichungen des Systems U_2 mit den Multiplikatoren (35) multiplizieren und die verschiedenen Gleichungen beibehalten, kommen wir zum Systeme U_3.

Nach Multiplikation der Gleichungen des Systems U_3 mit den Multiplikatoren (35) und Beibehaltung der verschiedenen Gleichungen erhält man das System U_4, usw.

Endlich kommen wir zu dem System

$$(38) \qquad R_0^\nu = 0,\ \ldots,\ R_{j_1} R_{j_2} \ldots R_{j_\nu} = 0,\ \ldots,\ R_q^\nu = 0. \qquad U_\nu$$

Die Systeme $U_1, U_2, \ldots, U_\nu$ haben keine eigentlichen Auflösungen, ihre Determinanten sind von Null verschieden. Zu demselben Resultate führen auch die Arbeiten einer Reihe von Autoren, die im Repertorium des Herrn E. Pascal angezeigt sind [6]).

Die allgemeine Gleichung des Systems U_ν

$$(39) \qquad R_{j_1} R_{j_2} \ldots R_{j_\nu} = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$(40) \qquad \sum_{\lambda_1=1}^{q+1} \sum_{\lambda_2=1}^{q+1} \ldots \sum_{\lambda_\nu=1}^{q+1} E_{j_1}^{\lambda_1} E_{j_2}^{\lambda_2} \ldots E_{j_\nu}^{\lambda_\nu} \xi_{\lambda_1} \xi_{\lambda_2} \ldots \xi_{\lambda_\nu} = 0$$

bleibt für alle Permutationen der Elemente $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ mit Wiederholung unverändert. Sie kann daher in der Form

$$(41) \qquad \sum_{\lambda_1=1}^{q+1} \sum_{\lambda_2=1}^{q+1} \ldots \sum_{\lambda_\nu=1}^{q+1} ((E_{j_1}^{\lambda_1} E_{j_2}^{\lambda_2} \ldots E_{j_\nu}^{\lambda_\nu}))\, \xi_{\lambda_1} \xi_{\lambda_2} \ldots \xi_{\lambda_\nu} = 0$$

oder

$$(42) \qquad S((E_{j_1}^{\lambda_1} E_{j_2}^{\lambda_2} \ldots E_{j_\nu}^{\lambda_\nu}))\, [[\xi_{\lambda_1} \xi_{\lambda_2} \ldots \xi_{\lambda_\nu}]] = 0,$$

$$(43) \qquad S((E_{j_1}^{\lambda_1} E_{j_2}^{\lambda_2} \ldots E_{j_\nu}^{\lambda_\nu}))\, N(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu)\, \xi_{\lambda_1} \xi_{\lambda_2} \ldots \xi_{\lambda_\nu} = 0$$

---

[5]) E. Pascal, Die Determinanten, Leipzig 1900, S. 103–106. Hier ist eine große Literatur angezeigt; sie ist hauptsächlich an die Theorie der Kurven und Flächen zweiter Ordnung gebunden.

[6]) E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, I., Analysis, erste Hälfte, Leipzig und Berlin 1910, S. 148.

geschrieben werden, wo

$$N(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu) \tag{44}$$

die Anzahl der Permutationen der Elemente $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ mit Wiederholung ist.

Die Gegenüberstellung der Gleichungen (43), (30) zeigt, daß das System der $\mathfrak{C}_{q+1}^{\nu} = C_{q+\nu}^{\nu}$-Gleichungen (30), die linear und homogen sind in den $\mathfrak{C}_{q+1}^{\nu} = C_{q+\nu}^{\nu}$ Unbekannten (31), unter der gemachten Voraussetzung (6) keine eigentliche Auflösung hat; seine Determinante ist von Null verschieden.

Hieraus folgen die Sätze:

Satz 1. *Wenn die Determinante* (12) *für eine bestimmte Kombination* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ *der Zahlen* $q+1, q+2, \ldots, n$ $(\nu < h < n-q)$ *zu je* ν *oder für alle Kombinationen* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ *gleich Null ist, so verschwinden auch die durch* (31) *gegebenen Ausdrücke*

$$\left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_\nu}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_\nu})}\right]\right] \tag{45}$$

für die bestimmte Kombination $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ *bzw. für alle Kombinationen;* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ *sind die Kombinationen der Zahlen* $1, 2, \ldots, q+1$ *zu je* ν *mit Wiederholung.*

Satz 2. *Bei* $\nu = h$ *verwandelt sich die Determinante* (12) *in die Determinante* (11); *wenn daher die Determinante* (11) *für eine bestimmte Kombination* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ *der Zahlen* $q+1, q+2, \ldots, n$ $(h < n-q)$ *zu je* h *oder für alle Kombinationen* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ *gleich Null ist, so verschwinden die Ausdrücke*

$$\left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_h}}{\partial c_h}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_h})}\right]\right] \tag{46}$$

für die bestimmte Kombination $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ *bzw. für alle Kombinationen;* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ *sind die Kombinationen der Zahlen* $1, 2, \ldots, q+1$ *zu je* h *mit Wiederholung.*

Satz 3. *Indem man die Determinante* (11) *nach der Regel von Laplace entwickelt, bemerkt man: Wenn die Determinante* (12) *für alle Kombinationen* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ *der* h *Zahlen* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ *der Determinante* (11) *zu je* ν $(\nu < h)$ *gleich Null ist, so ist auch die Determinante* (11) *Null.*

In dem Falle, wo die Determinante (12) *für alle Kombinationen* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ *der Zahlen* $q+1, q+2, \ldots, n$ *zu je* ν *gleich Null ist, ist*

die Determinante (11) *für alle Kombinationen* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ *gleich Null, und die Relation* (1) *stellt kein allgemeines Integral der Gleichung* (3) *oder des Systems* (4) *dar.*

Satz 4. *Wenn die Relation* (1) *ein allgemeines Integral einer Gleichung* (3) *oder eines Systems* (4) *ist, so können die Ausdrücke*

$$\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1})} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \text{ eine der Zahlen } 1, 2, \ldots, q+1, \\ \tau_1 \text{ eine der Zahlen } q+1, q+2, \ldots, n \end{pmatrix}; \tag{47}$$

die Ausdrücke

$$\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2})} \tag{48}$$

(λ_1, λ_2 *Kombinationen der Zahlen* $1, 2, \ldots, q+1$ *zu je* 2 *mit Wiederholung,*

τ_1, τ_2 *Kombinationen der Zahlen* $q+1, q+2, \ldots, n$ *zu je* 2)

. . . . . .

die Ausdrücke

$$\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_h}}{\partial c_h}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_h})} \tag{49}$$

($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ *Kombinationen der Zahlen* $1, 2, \ldots, q+1$ *zu je* h *mit Wiederholung,*

$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ *Kombinationen der Zahlen* $q+1, q+2, \ldots, n$ *zu je* h)

nicht alle gleich Null sein.

Anmerkung. Im Falle, daß

$$\varphi_{q+1} = x_0 - u \tag{50}$$

und die Funktionen

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q, u \tag{51}$$

von x_0 unabhängig sind, nehmen die Ausdrücke (31) die Gestalt an:

$$(-1)^q \left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_\nu}\right)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_\nu})}\right]\right]; \tag{52}$$

die Relation (1) kann in der Form

$$z = u + \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q), \tag{53}$$

wo Φ eine willkürliche Funktion der Argumente ist, geschrieben werden; die Gleichung (3) und das System (4) enthalten die Funktion $z = x_0$ nicht.

Zweiter Teil[7]).

Betrachten wir die Relation

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q, \varphi_{q+1}) = 0, \tag{54}$$

$$\varphi_i = \varphi_i(z, x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_h), \quad z = x_0 \tag{55}$$

($\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}$ unabhängige Funktionen hinsichtlich der Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots, x_n$,

$$c_1, c_2, \ldots, c_h \text{ willkürliche Konstanten,} \tag{56}$$

$$\Phi \text{ eine willkürliche Funktion der Argumente),} \tag{57}$$

und zwar in dem Falle, wo für das System der Funktionen

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q, \varphi_{q+1} \tag{58}$$

die Anzahl s der wesentlichen Parameter

$$b_1, b_2, \ldots, b_s, \tag{59}$$

$$b_1 = \omega_1(c_1, c_2, \ldots, c_h), \ldots, b_s = \omega_s(c_1, c_2, \ldots, c_h)$$

kleiner ist als die Zahl $n - q$:

$$s < n - q. \tag{60}$$

Die Relation (54) kann angesehen werden als das Liesche Integral q-ter Klasse einer partiellen Differentialgleichung oder eines Involutionssystems von m partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion. Diese Differentialgleichung oder das System von Differentialgleichungen erhält man, indem man differentiert und dann die willkürliche Funktion Φ und die willkürlichen Konstanten $b_1, b_2, \ldots, b_s$ eliminiert.

Nun erhebt sich die praktisch sehr wichtige Frage.

Wir fragen nun: wenn $q+1$ Funktionen (58) gegeben sind, welche Bedingungen, die sich nur auf diese Funktionen beziehen, müssen erfüllt sein, damit 1. die Relation (54) ein Liesches Integral q-ter Klasse darstellt, und 2. wenn diese Bedingungen erfüllt sind, wie groß ist die Zahl m der Gleichungen des zugehörigen Involutionssystems von Differentialgleichungen erster Ordnung[8])?

Die gestellte Frage zerfällt ihrer Formulierung nach in zwei Teile. Der erste Teil wird auf Grund der Untersuchungen von L. Bianchi[9]) be-

---

[7]) G. Pfeiffer, Sur les intégrales de S. Lie, Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei **11** (1930), S. 6, S. 558–564.

[8]) Die Zahl m kann auch gleich eins sein.

[9]) L. Bianchi, Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni (Bologna 1928), S. 28–37.

antwortet, der zweite auf Grund der oben angeführten Untersuchungen von mir.

L. Bianchi hat das bekannte Liesche[10]) Kennzeichen der Wesentlichkeit oder Unwesentlichkeit willkürlicher Konstanten benutzt und ist so zu einem Theorem[11]) gelangt, welches auf die Funktionen (58) angewandt das folgende Resultat ergibt: Man füge zu den Funktionen (58) deren Deri vierte nach $x_1, \ldots, x_n, z$ bis zur Ordnung $h-1$ hinzu und bilde sodann die Funktionalmatrix in bezug auf die Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_h$. Ist der Rang dieser Matrix gleich s, so enthält das Funktionensystem (58) gerade s wesentliche Parameter (59). Die Relation (54) ist das Liesche Integral q-ter Klasse einer partiellen Differentialgleichung oder eines m-gliedrigen Involutionssystems von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, wenn

$$s < n - q. \tag{61}$$

Der erste Teil der aufgestellten Frage ist damit beantwortet.

Nehmen wir die Bedingungen (61) als erfüllt an und gehen wir zur Beantwortung des zweiten Teiles der Frage über.

Wir müßten die Funktionen (58) durch Funktionen mit den wesentlichen Parameter (59) ausdrücken; aber der Bequemlichkeit wegen wollen wir anders verfahren: wir werden von jetzt an, wie wir es schon früher gemacht haben, die Konstanten (56) selbst als wesentliche Parameter ansehen und die Zahl h kleiner als $n-q$ nehmen:

$$h < n - q. \tag{62}$$

Wir vermuten, daß $s = h$ ist.

Nehmen wir an, daß die Funktionalmatrix der durch (7) gegebenen Funktionen

$$F_{q+1}, F_{q+2}, \ldots, F_n \tag{63}$$

in bezug auf die Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_h$ den Rang ϱ hat; d. h. eine oder eine Anzahl von Determinanten

$$\frac{D(F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_\varrho})}{D(c_{g_1}, c_{g_2}, \ldots, c_{g_\varrho})} \tag{64}$$

($j_1, j_2, \ldots, j_\varrho$ gewisse Zahlen der Reihe $q+1, q+2, \ldots, n$,

$g_1, g_2, \ldots, g_\varrho$ gewisse Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, h$)

---

[10]) S. Lie und Fr. Engel, Theorie der Transformationsgruppen 1 (Leipzig 1888), S. 13. A. Forsyth, Theory of differential equations 5 (Cambridge 1906), S. 192.

[11]) Loc. cit., S. 36.

oder auch alle sind von Null verschieden, während die Determinanten

$$\frac{D(F_{\tau_1}, F_{\tau_2}, \ldots, F_{\tau_\nu})}{D(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_\nu})}, \qquad \varrho < \nu \leqq h \tag{65}$$

($\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ gewisse Zahlen der Reihe $q+1, q+2, \ldots, n$,

$i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ gewisse Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, h$)

alle gleich Null sind[12]).

Wenn wir solche Gleichungen

$$p_{j_1} = F_{j_1}, \; p_{j_2} = F_{j_2}, \; \ldots, \; p_{j_\varrho} = F_{j_\varrho} \tag{66}$$

des Systems (7), für welche

$$\frac{D(F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_\varrho})}{D(c_{g_1}, c_{g_2}, \ldots, c_{g_\varrho})} \not\equiv 0 \tag{67}$$

ist, nach den Konstanten

$$c_{g_1}, c_{g_2}, \ldots, c_{g_\varrho} \tag{68}$$

auflösen und die gefundenen Ausdrücke in die anderen Gleichungen (7) einsetzen, kommen wir zu einem Involutionssysteme von

$$m = n - q - \varrho \tag{69}$$

partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$f_i(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{70}$$

Auf Grund unserer im ersten Teile angeführten Erörterungen kann die Voraussetzung, daß eine, eine Anzahl oder auch alle Determinanten (64) von Null verschieden sind, während alle Determinanten (65) gleich Null sind, durch folgende Bedingungen, die nur an die Funktionen (58) geknüpft sind, ersetzt werden: einige oder auch alle Ausdrücke

$$\left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_{g_1}}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_{g_2}}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_\varrho}}{\partial c_{g_\varrho}}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\varrho})}\right]\right] \tag{71}$$

($j_1, j_2, \ldots, j_\varrho$ gewisse Zahlen der Reihe $q+1, q+2, \ldots, n$,

$g_1, g_2, \ldots, g_\varrho$ gewisse Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, h$,

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varrho$ gewisse Kombinationen der Zahlen $1, 2, \ldots, q+1$ zu je ϱ mit Wiederholung)

[12]) Bekanntlich ist das Nullwerden der Determinanten (65) der Ordnungen $\varrho+2, \varrho+3, \ldots, h$ eine Folge des Verschwindens der Determinanten der Ordnung $\varrho+1$. Wenn wir die Determinanten (65) der Ordnung $\varrho+1$ gleich Null setzen, bekommen wir Gleichungen, unter denen viele abhängige sind. Die unabhängigen werden wir nicht aufschreiben, obgleich es auch leicht gemacht werden könnte.

sind von Null verschieden, dagegen verschwinden alle Ausdrücke

$$(72)\qquad \left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_{i_1}}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_{i_2}}, \ldots \frac{\partial \varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_{i_\nu}}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_\nu})}\right]\right], \qquad \varrho < \nu \leqq h$$

($\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ gewisse Zahlen der Reihe $q+1, q+2, \ldots, n$,

$i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ gewisse Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, h$,

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ gewisse Kombinationen der Zahlen $1, 2, \ldots, q+1$ zu je ν mit Wiederholung).

Als Ergebnis haben wir den

Satz. *Wenn es unter den Ausdrücken* (72) *für* $\nu = h, h-1, \ldots, \varrho+1$ *keinen gibt, der von Null verschieden ist, während für* $\nu = \varrho$ *und selbstverständlich für jeden der andern Fälle* $\nu = \varrho-1, \varrho-2, \ldots, 1$ *Ausdrücke vorkommen, die nicht Null sind, dann führt die Relation* (1), (54), *wenn man differentiert und die willkürliche Funktion* Φ *sowie die wesentlichen willkürlichen Konstanten* $c_1, c_2, \ldots, c_h$ *der Funktionen* (58) *eliminiert, zu einem Involutionssystem* (70) *von*

$$(73)\qquad m = n - q - \varrho$$

partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Falls

$$(74)\qquad \left[\left[\frac{D\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_{g_1}}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_2}}{\partial c_{g_2}}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_\varrho}}{\partial c_{g_\varrho}}\right)}{D(x_0, x_1, \ldots, x_q, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\varrho})}\right]\right] \not\equiv 0$$

ist, sind in dem Integrale (1), (54) des Systems (70) alle willkürlichen Konstanten außer der Konstanten

$$(75)\qquad c_{g_1}, c_{g_2}, \ldots, c_{g_\varrho}$$

überzählig; die Zahl derselben ist gleich

$$(76)\qquad h - \varrho.$$

Es gibt keine überzähligen Konstanten, wenn

$$(77)\qquad \varrho = h.$$ [13])

Partielle Fälle. Nehmen wir an, daß $q = 0$, alsdann gehen die Formeln (1), (54), (9), (62), (6) in die Formeln über:

$$(78)\qquad \Phi(\varphi) = 0$$

[13]) Dieser Fall ist von mir im ersten Teile dieses Artikels studiert worden.

oder, was dasselbe ist,

$$\varphi(z, x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_h) = \text{konst.}; \tag{79}$$

$$h < n; \tag{80}$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \not\equiv 0. \tag{81}$$

In Anbetracht, daß die Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_h$ als wesentlich gerechnet werden, ist h der Rang der in bezug auf $c_1, c_2, \ldots, c_h$ gebildeten Funktionalmatrix der Funktion φ und ihrer Derivierten nach $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ bis zur Ordnung $h-1$.

Der Ausdruck (72) nimmt die Gestalt an:

$$\frac{D\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial c_{i_1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial c_{i_2}}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial c_{i_\nu}}\right)}{D(x_0, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_\nu})} \tag{82}$$

($\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ gewisse Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, n$,

$i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ gewisse Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, h$).

Wenn in dem Integrale (78) keine überzähligen Konstanten sind, dann ist auf Grund der Formeln (77), (74)

$$\frac{D\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial c_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial c_h}\right)}{D(x_0, x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_h})} \not\equiv 0 \tag{83}$$

($\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ gewisse Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, n$).

Nach der Formel (73) ist die Relation (78) das Integral eines Involutionssystemes von

$$m = n - h \tag{84}$$

partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, also das Integral einer Gleichung, wenn

$$m = n - h = 1, \quad h = n - 1. \tag{85}$$

Daraus folgt ein sehr wichtiger

Satz. *Die Relation*

$$\Phi(\varphi) = 0, \tag{86}$$

$$\varphi(z, x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_{n-1}) = \text{konst.} \tag{87}$$

ist das vollständige Integral (ohne überzählige Konstanten) einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \tag{88}$$

in dem Falle, wo

$$(89)\qquad \frac{D\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial c_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial c_2}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial c_{n-1}}\right)}{D(z, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)} \not\equiv 0 \quad (k \text{ eine der Zahlen } 1, 2, \ldots, n).$$

Die Bedingung (89) ist von mir längst aufgestellt worden[14]) und war auf die Form

$$(90)\qquad \frac{D\left\{\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}, \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}, \ldots, \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_{k-1}}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}, \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_{k+1}}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}, \ldots, \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\right\}}{D(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})} \not\equiv 0$$

(k eine von den Zahlen $1, 2, \ldots, n$),

gebracht worden[15]).

Der zweite Teil dieses Artikels ist unter dem Einflusse eines auf den ersten Teil bezüglichen Briefwechsels mit Herrn Professor Friedrich Engel geschrieben worden.

---

[14]) G. Pfeiffer, Sur les conditions, qui expriment, que les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre sont complètes, Bull. de l'Acad. des Sciences de l'Ukraïne 2, fasc. I, S. 6–17.

[15]) Ibidem, S. 14.

(Eingegangen am 12. Juni 1932.)